

**FICHA IDENTIFICATIVA****Datos de la Asignatura**

Código	34179
Nombre	Topología Diferencial
Ciclo	Grado
Créditos ECTS	6.0
Curso académico	2023 - 2024

Titulación(es)

Titulación	Centro	Curso	Periodo
1107 - Grado de Matemáticas	Facultad de Ciencias Matemáticas	4	Segundo cuatrimestre

Materias

Titulación	Materia	Caracter
1107 - Grado de Matemáticas	18 - Seminario de Topología y Geometría Diferencial	Optativa

Coordinación

Nombre	Departamento
NUÑO BALLESTEROS, JUAN JOSE	205 - Geometría y Topología

RESUMEN

El objetivo general de esta asignatura es introducir al alumno en el lenguaje y las técnicas propias de la Topología Diferencial, de manera que sea capaz de entender y resolver algunos de los problemas básicos en el área.

Podemos ver esta asignatura como una continuación natural de la Topología, cursada en el segundo año del Grado en Matemáticas, en la que el interés se centra en una clase especial de espacios topológicos de contrastada utilidad en diferentes aplicaciones y ámbitos de las Matemáticas, como son las variedades diferenciables. Se espera, como pre-requisito, que el alumno ya haya sido introducido en los conceptos básicos de variedades diferenciables, como definición de estructura diferenciable, espacio tangente,



aplicación diferenciable y aplicación tangente o subvariedad, en la asignatura Geometría Diferencial Clásica y que sepa manejar estos conceptos con cierta soltura, al menos en el caso de las superficies. Las técnicas que introduciremos descansan a la vez sobre ambas estructuras, la topológica y la diferenciable. Comenzaremos por una revisión de las propiedades topológicas que debe tener una variedad diferenciable, estudiando algunos ejemplos ilustrativos. Analizaremos algunas propiedades de las aplicaciones diferenciables entre variedades, como introducción al problema de clasificación de las mismas. En particular, nos centraremos en las funciones diferenciables de una superficie en la recta real y en las aplicaciones entre superficies, analizando el comportamiento típico de las que son estables. Esto nos llevará al estudio de las funciones de Morse sobre superficies, tanto desde el punto de vista local como global. Introduciremos la técnica por excelencia en Topología Diferencial: Transversalidad. Aplicaremos dicha técnica al estudio de varios problemas, tales como la densidad de las funciones de Morse, o el Teorema de inmersión de Whitney, definición de grado de una aplicación diferenciable y sus propiedades. Daremos una introducción a la Teoría de Morse, que relaciona el tipo topológico de una superficie con el tipo de singularidades de una función estable (de Morse) cualquiera sobre la misma. Finalizaremos con un estudio de las aplicaciones estables entre superficies desde el punto de vista local.

Contenidos: Revisión de conceptos básicos sobre Variedades Diferenciables. Topología de Variedades. Transversalidad. Funciones de Morse. Complejos celulares y su homología. Introducción a la Teoría de Morse. Grado de una aplicación diferenciable. Aplicaciones estables entre superficies.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Relación con otras asignaturas de la misma titulación

No se han especificado restricciones de matrícula con otras asignaturas del plan de estudios.

Otros tipos de requisitos

Topología, Ecuaciones diferenciales ordinarias, Geometría diferencial clásica, Análisis matemático III.

COMPETENCIAS

1107 - Grado de Matemáticas

- Tener capacidad de análisis y síntesis.
- Tener capacidad de crítica.
- Resolver problemas que requieran el uso de herramientas matemáticas.



- Saber trabajar en equipo.
- Aprender de manera autónoma.
- Poseer y comprender los conocimientos matemáticos.
- Saber aplicar los conocimientos al mundo profesional.
- Expresarse matemáticamente de forma rigurosa y clara.
- Conocer el momento y el contexto histórico en que se han producido las grandes contribuciones de mujeres y hombres al desarrollo de las matemáticas.
- Visualizar e interpretar las soluciones que se obtengan.

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Resultados de aprendizaje

Competencias a adquirir:

- Conocer las propiedades topológicas de las variedades diferenciables y saber utilizarlas en el contexto de la Topología Diferencial.
- Manejar con soltura la técnica de transversalidad entre subvariedades del espacio Euclídeo.
- Construir funciones de Morse y saber determinar sus puntos críticos con sus correspondientes invariantes.
- Entender el concepto de complejo celular y saber manejar la descomposición de una superficie, como complejo celular, asociada a una función de Morse sobre la misma.
- Saber detectar los puntos singulares de las aplicaciones entre superficies y clasificarlos en el caso estable.
- Saber calcular el grado de aplicaciones diferenciables entre superficies.
- Saber definir y detectar isotopías.
- Conocer algunos los resultados clásicos de la Topología Diferencial y sus posibles aplicaciones.

Habilidades sociales:

- Capacidad para realizar trabajos individuales de tipo teórico, relacionados con los



conceptos y técnicas descritos por los profesores, incluyendo la búsqueda bibliográfica necesaria para completarlos.

- Capacidad para comunicar, oralmente y por escrito, las conclusiones y técnicas de su trabajo.
- Capacidad de planificación y organización del trabajo.
- Capacidad de crítica frente a las conclusiones obtenidas en su trabajo o en trabajos ajenos.
- Capacidad para trabajar en equipo en la resolución de problemas prácticos relacionados con la asignatura.

DESCRIPCIÓN DE CONTENIDOS

1. Variedades

- . Variedades y aplicaciones diferenciables
- . Espacio tangente y diferencial
- . El teorema de la función inversa. Inmersiones
- . El teorema del valor regular. Sumersiones

2. Variedades con borde y orientación

- . Variedades con borde
- . Orientación
- . Clasificación de 1-variedades

3. Transversalidad

- . Transversalidad
- . Teorema de Sard y teorema de transversalidad
- . Funciones de Morse
- . Teorema de la inmersión de Whitney
- . Homotopía y estabilidad

4. Particiones de la unidad y aplicaciones

- . Particiones de la unidad
- . Encaje de variedades en el espacio euclídeo
- . El teorema de transversalidad por homotopía

**5. Teoría de la intersección**

- . Número de intersección orientado
- . Grado de una aplicación
- . Teoría del punto fijo de Lefschetz
- . Campos vectoriales. El teorema de Poincaré-Hopf
- . Campos vectoriales de tipos gradiente

VOLUMEN DE TRABAJO

ACTIVIDAD	Horas	% Presencial
Clases de teoría	37,50	100
Prácticas en aula	15,00	100
Otras actividades	7,50	100
Elaboración de trabajos individuales	7,00	0
Estudio y trabajo autónomo	8,00	0
Lecturas de material complementario	10,00	0
Preparación de actividades de evaluación	25,00	0
Preparación de clases de teoría	30,00	0
Preparación de clases prácticas y de problemas	10,00	0
TOTAL	150,00	

METODOLOGÍA DOCENTE

La parte teórica se desarrollará en clase magistrales donde el profesor introducirá los contenidos y el método matemático. En cada tema, se incluirán suficientes ejemplos para ilustrar tanto los nuevos conceptos, como la resolución de los problemas relacionados con el mismo. Al final de cada tema se proporcionarán listas de ejercicios para que sean resueltos por los alumnos.

La parte práctica se realizará distribuyendo a los alumnos en grupos permanentes de 3 o 4 miembros. En estas clases, los alumnos resolverán problemas, relacionados con el material que se haya ido viendo en las clases teóricas anteriores, bajo la supervisión del profesor. Cada grupo entregará las respuestas de los ejercicios propuestos para ser calificados por el profesor.

Tanto en las clases teóricas como en la prácticas se podrá recurrir al uso de herramientas informáticas



para la visualización de objetos geométricos cuando se considere conveniente.

Se realizarán seminarios periódicamente en los que los alumnos resolverán dudas y comentarán con el profesor aspectos de la materia referentes a los trabajos complementarios que se les haya asignado individualmente como material de evaluación. Las exposiciones de dichos trabajos se llevarán a cabo en los últimos seminarios del curso.

EVALUACIÓN

Sistema de evaluación de la asignatura

La evaluación del aprendizaje de los conocimientos y competencias conseguidas por los estudiantes constará de los siguientes bloques:

1. **Examen:** se realizará un examen de tipo teórico-práctico al final del cuatrimestre, con un peso del 50% de la nota final.
2. **Prácticas:** se evaluará el trabajo realizado por cada alumno, así como la exposición del mismo en las clases prácticas, con un peso del 10% de la nota final.
3. **Tutorías y seminarios:** se evaluará el trabajo realizado por cada alumno, así como la exposición del mismo en los seminarios, con un peso del 40% de la nota final.

Observaciones:

Las calificaciones obtenidas en los bloques 2 y 3 se conservarán en las dos convocatorias del curso académico en que hayan sido realizadas, dado que su evaluación sólo será posible a lo largo del cuatrimestre y nunca en la convocatoria extraordinaria.



REFERENCIAS

Básicas

-

Referencia b1: V. Guillemin y A. Pollack, Differential Topology. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

Referencia b2: E. Outerelo Domínguez y J. M. Ruíz Sancho, Topología Diferencial. Addison-Wesley Iberoamericana España S. A. (1998).

Referencia b3: E. Outerelo, J.A. Rojo y J. M. Ruíz, Topología Diferencial, un curso de iniciación. Sanz y Torres S.L. (2014).

Complementarias

-

Referencia c1: J. Milnor, Morse Theory. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1969).

Referencia c2: E. Outerelo y J. M. Ruíz. Mapping degree theory. Graduate Studies in Mathematics, 108. American Mathematical Society, Real Sociedad Matemática Española (2009).