

**FITXA IDENTIFICATIVA****Dades de l'Assignatura**

<b>Codi</b>	34179
<b>Nom</b>	Topologia diferencial
<b>Cicle</b>	Grau
<b>Crèdits ECTS</b>	6.0
<b>Curs acadèmic</b>	2024 - 2025

**Titulació/titulacions**

<b>Titulació</b>	<b>Centre</b>	<b>Curs</b>	<b>Període</b>
1107 - Grau Matemàtiques	Facultat de Ciències Matemàtiques	4	Segon quadrimestre

**Matèries**

<b>Titulació</b>	<b>Matèria</b>	<b>Caràcter</b>
1107 - Grau Matemàtiques	18 - Seminario de Topología y Geometría Diferencial	Optativa

**Coordinació**

<b>Nom</b>	<b>Departament</b>
NUÑO BALLESTEROS, JUAN JOSE	205 - Geometria i Topologia

**RESUM**

L'objectiu general d'aquesta assignatura és introduir a l'alumne en el llenguatge i les tècniques pròpies de la Topologia Diferencial, de manera que siga capaç d'entendre i resoldre alguns dels problemes bàsics en l'àrea.

Podem veure aquesta assignatura com una continuació natural de la Topologia, cursada en el segon any del Grau en Matemàtiques, en la qual l'interès se centra en una classe especial d'espais topològics de contrastada utilitat en diferents aplicacions i àmbits de les Matemàtiques, com són les varietats diferenciables. S'espera, com prerrequisit, que l'alumne ja haja estat introduït en els conceptes bàsics de varietats diferenciables, com definició d'estructura diferenciable, espai tangent, aplicació diferenciable i aplicació tangent o subvariedad, en l'assignatura Geometria Diferencial Clàssica i que sàpia manejar aquests conceptes amb certa soltesa, almenys en el cas de les superfícies. Les tècniques que introduïrem



descansen alhora sobre ambdues estructures, la topològica i la diferenciable. Començarem per una revisió de les propietats topològiques que ha de tenir una varietat diferenciable, estudiant alguns exemples il·lustratius. Analitzarem algunes propietats de les aplicacions diferenciables entre varietats, com introducció al problema de classificació de les mateixes. En particular, ens centrarem en les funcions diferenciables d'una superfície en la recta real i en les aplicacions entre superfícies, analitzant el comportament típic de les quals són estables. Açò ens durà a l'estudi de les funcions de Morse sobre superfícies, tant des del punt de vista local com global. Introduïrem la tècnica per excel·lència en Topologia Diferencial: Transversalitat. Aplicarem aquesta tècnica a l'estudi de diversos problemes, tals com la densitat de les funcions de Morse, o el Teorema d'immersió de Whitney, definició de grau d'una aplicació diferenciable i les seues propietats. Donarem una introducció a la Teoria de Morse, que relaciona el tipus topològic d'una superfície amb el tipus de singularitats d'una funció estable (de Morse) qualsevol sobre la mateixa. Finalitzarem amb un estudi de les aplicacions estables entre superfícies des del punt de vista local.

Continguts: Revisió de conceptes bàsics sobre Varietats Diferenciables. Topologia de Varietats. Transversalitat. Funcions de Morse. Complexos cel·lulars i la seua homologia. Introducció a la Teoria de Morse. Grau d'una aplicació diferenciable. Aplicacions estables entre superfícies.

## CONEIXEMENTS PREVIS

### Relació amb altres assignatures de la mateixa titulació

No heu especificat les restriccions de matrícula amb altres assignatures del pla d'estudis.

### Altres tipus de requisits

Topologia, Equacions diferencials ordinàries, Geometria diferencial clàssica, Anàlisi matemàtica III.

### 1107 - Grau Matemàtiques

- Tenir capacitat d'anàlisi i de síntesi.
- Tenir capacitat de crítica.
- Resoldre problemes que requerisquen l'ús d'eines matemàtiques.
- Saber treballar en equip.



- Aprendre de manera autònoma.
- Posseir i comprendre els coneixements matemàtics.
- Saber aplicar els coneixements al món professional.
- Expressar-se matemàticament de forma rigorosa i clara.
- Conèixer el moment i el context històric en què s'han produït les grans contribucions de dones i homes al desenvolupament de les matemàtiques.
- Visualitzar i interpretar les solucions que s'obtinguen.

#### Competències a adquirir:

- Conèixer les propietats topològiques de les varietats diferenciables i saber utilitzar-les en el context de la Topologia Diferencial.
- Manejar amb soltesa la tècnica de transversalitat entre subvarietats de l'espai Euclidià.
- Construir funcions de Morse i saber determinar els seus punts crítics amb els seus corresponents invariants.
- Entendre el concepte de complex cel·lular i saber manejar la descomposició d'una superfície, com complex cel·lular, associada a una funció de Morse sobre la mateixa.
- Saber detectar els punts singulars de les aplicacions entre superfícies i classificar-los en el cas estable.
- Saber calcular el grau d'aplicacions diferenciables entre superfícies.
- Saber definir i detectar isotopies. Conèixer alguns dels resultats clàssics de la Topologia Diferencial i les seues possibles aplicacions.

#### Habilitats socials:

- Capacitat per a realitzar treballs individuals de tipus teòric, relacionats amb els conceptes i tècniques descrits pels professors, incloent la recerca bibliogràfica necessària per a completar-los.
- Capacitat per a comunicar, oralment i per escrit, les conclusions i tècniques del seu treball.
- Capacitat de planificació i organització del treball.
- Capacitat de crítica enfront de les conclusions obtingudes en el seu treball o en treballs aliens.
- Capacitat per a treballar en equip en la resolució de problemes pràctics relacionats amb l'assignatura.



## DESCRIPCIÓ DE CONTINGUTS

### 1. Varietats

- . Varietats i aplicacions diferenciables
- . Espai tangent i diferencial
- . El teorema de la funció inversa. Immersions
- . El teorema del valor regular. Submersions

### 2. Varietats amb vora i orientació

- . Varietats amb vora
- . Orientació
- . Classificació de 1-varietats

### 3. Transversalitat

- . Transversalitat
- . Teorema de Sard i teorema de transversalitat
- . Funcions de Morse
- . Teorema de la immersió de Whitney
- . Homotopia i estabilitat

### 4. Particions de la unitat i aplicacions

- . Particions de la unitat
- . Encaix de varietats en l'espai euclidià
- . El teorema de transversalitat per homotopia

### 5. Teoria de la intersecció

- . Número d'intersecció orientat
- . Grau d'una aplicació
- . Teoria del punt fix de Lefschetz
- . Camps vectorials. El teorema de Poincaré-Hopf
- . Camps vectorials de tipus gradient

**VOLUM DE TREBALL**

ACTIVITAT	Hores	% Presencial
Classes de teoria	37,50	100
Pràctiques en aula	15,00	100
Altres activitats	7,50	100
Elaboració de treballs individuals	7,00	0
Estudi i treball autònom	8,00	0
Lectures de material complementari	10,00	0
Preparació d'activitats d'avaluació	25,00	0
Preparació de classes de teoria	30,00	0
Preparació de classes pràctiques i de problemes	10,00	0
<b>TOTAL</b>	<b>150,00</b>	

**METODOLOGIA DOCENT**

La part teòrica es desenvolupa en classe magistrals on el professor introduirà els continguts i el mètode matemàtic. En cada tema, s'inclouran suficients exemples per a il·lustrar tant els nous conceptes, com la resolució dels problemes relacionats amb el mateix. Al final de cada tema es proporcionaran llistes d'exercicis perquè siguin resolts pels alumnes.

La part pràctica es realitzarà distribuïnt als alumnes en grups permanents de 3 o 4 membres. En aquestes classes, els alumnes resoldran problemes, relacionats amb el material que s'haja anat veient en les classes teòriques anteriors, sota la supervisió del professor. Cada grup lliurarà les respostes dels exercicis proposats per a ser qualificats pel professor.

Tant en les classes teòriques com en la pràctiques es podrà recórrer a l'ús d'eines informàtiques per a la visualització d'objectes geomètrics quan es considere convenient.

Es realitzaran seminaris periòdicament en els quals els alumnes resoldran dubtes i comentaran amb el professor aspectes de la matèria referents als treballs complementaris que se'ls haja assignat individualment com material d'avaluació. Les exposicions d'aquests treballs es portaran a terme en els últims seminaris del curs.



## AVALUACIÓ

Valencià

Sistema d'avaluació de l'assignatura

L'avaluació de l'aprenentatge dels coneixements i competències aconseguides pels estudiants constarà dels següents blocs:

1. **Examen:** es realitzarà un examen de tipus teòric-pràctic al final del quadrimestre, amb un pes del 50% de la nota final.

2. **Pràctiques:** s'avaluarà el treball realitzat per cada alumne, així com l'exposició del mateix en les classes pràctiques, amb un pes del 10% de la nota final.

2. **Tutories i seminaris:** s'avaluarà el treball realitzat per cada alumne, així com l'exposició del mateix en els seminaris, amb un pes del 40% de la nota final.

### Observacions:

Les qualificacions obtingudes en els blocs 2 i 3 es conservaran en les dues convocatòries del curs acadèmic en què hagin estat realitzades, atès que la seva avaluació només serà possible al llarg del quadrimestre i mai en la convocatòria extraordinària.



## REFERÈNCIES

### Bàsiques

-

Referencia b1: V. Guillemin y A. Pollack, Differential Topology. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

Referencia b2: E. Outerelo Domínguez y J. M. Ruíz Sancho, Topología Diferencial. Addison-Wesley Iberoamericana España S. A. (1998).

Referencia b3: E. Outerelo, J.A. Rojo y J. M. Ruíz, Topología Diferencial, un curso de iniciación. Sanz y Torres S.L. (2014).

### Complementàries

-

Referencia c1: J. Milnor, Morse Theory. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1969).

Referencia c2: E. Outerelo y J. M. Ruíz. Mapping degree theory. Graduate Studies in Mathematics, 108. American Mathematical Society, Real Sociedad Matemática Española (2009).