UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN
DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de la resolución aritmética de problemas usando un sistema tutorial inteligente

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:

Miguel Ángel García Moreno

DIRIGIDA POR:

David Arnau Vera

José Antonio González-Calero Somoza

Miguel Arevalillo-Herráez

Enero 2021

Índice

Capítulo 4

Capítulo 5

1. Introducción

1.1. JUSTIFICACIÓN Y PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1.1. LA PROBLEMÁTICA

La resolución de problemas siempre ha ocupado un lugar importante en los currículos de matemáticas tanto en educación primaria como en educación secundaria. Un tipo de problemas, particularmente frecuente, son aquellos en los que la información viene dada mediante una narración en la que se describen situaciones cotidianas en las que participan cantidades. Estos problemas son conocidos dentro de la comunidad investigadora como problemas verbales aritméticos-algebraicos. El nombre responde al hecho de que, en el ámbito escolar, se resuelven mediante una secuencia de operaciones aritméticas o mediante el planteamiento y resolución de una ecuación o sistema de ecuaciones (Cerdán, 2008). Estos problemas verbales son unos de los primeros a los que se enfrentan los estudiantes en su etapa escolar y que les acompañan hasta la finalización de la etapa secundaria.

De manera general, los resultados mostrados en el estudio PISA (OECD, 2014a) ponen de manifiesto que la resolución de problemas matemáticos escolares y los problemas de la vida real son algunas de las áreas en las que los estudiantes españoles muestran un menor rendimiento. También se constata que, los estudiantes españoles obtienen una media en resolución de problemas inferior a lo esperado, si se toma como referente su rendimiento en matemáticas (OECD, 2014a). Esta diferencia de resultados indica que el potencial de los estudiantes como resolutores de problemas no es desarrollado completamente desde la asignatura de matemáticas.

Los problemas verbales es una de las tres categorías empleadas en la evaluación PISA 2012 para medir el grado de exposición a la oportunidad de aprender a resolver problemas (OECD, 2014b). Nuestro país está muy por encima de la media de la OCDE en el uso de problemas verbales en el aula (OECD, 2014b). Sin embargo, estas oportunidades de aprendizaje no se reflejan en el rendimiento en la resolución de problemas.

Es durante la enseñanza primaria, cuando los estudiantes aprenden a resolver los problemas verbales de forma aritmética. Inicialmente se introducen los problemas que se resuelven mediante una operación de suma o resta, más conocidos como problemas aditivos de una etapa. A pesar de su aparente sencillez, estos problemas ya suponen una primera importante fuente de dificultades asociadas a las características del propio sujeto tales como, su edad, el nivel cognitivo, experiencia matemática o nivel de lectura y comprensión lectora (veáse por ejemplo, Hanich, Jordan, Kaplan y Dick, 2001; Pedrotty, Brian y Hammill, 2000; Fuchs, Seethaler, Powell, Fuchs, Hamlett y Fletcher, 2008; Jitendra, George, Sood y Price, 2010; Powell, 2011). Por otro lado, se ha tenido en cuenta la influencia de las características de la propia tarea tales como: la introducción de información irrelevante en el enunciado, el orden en que aparecen las cantidades conocidas y desconocidas, algunas características de las cantidades, como el tipo de números o la magnitud de estas cantidades; las características del contexto planteado en el enunciado o la complejidad semántica del mismo; la estructura sintáctica del enunciado teniendo en cuenta variables como el número y tipo de palabras o la posición de la pregunta y ubicación de la incógnita dentro del enunciado (véase por ejemplo, Fuchs y Fuchs, 2002; Parmar, Cawley y Frazita, 1996; Squire y Bryant, 2002; Chapman, 2006; García, Jiménez y Hess, 2006; Xin y Zhang, 2009).
Dentro de los estudios dirigidos a determinar la influencia de la tarea, la clasificación semántica de los problemas de una etapa, que son los primeros problemas que se ofrecen en los sistemas educativos, se ha demostrado como una herramienta sólida a la hora de proporcionar una predicción de la dificultad esperada (Durand y Vergnaud, 1976; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Nesher, Greeno y Riley, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983; Marshall, Pribe y Smith, 1987; Puig y Cerdán, 1988; Vergnaud, 1983; Bell, Fischbein y Greer, 1984; Nesher, 1982, 1988a; Schmidt y Weiser, 1995; Nathan, Kintsch y Young, 1992). De manera progresiva se introducen en la educación primaria los problemas que se resuelven realizando un conjunto de operaciones aritméticas. Estos problemas, que reciben el nombre de problemas multietapa, plantean nuevas exigencias que son fuente de dificultades para los estudiantes de estos niveles. En la resolución de estos problemas multietapa se ponen en juego habilidades que también son necesarias en los problemas de una etapa, como podría ser la identificación de esquemas conceptuales a partir de la situación descrita en el enunciado o la construcción de relaciones entre cantidades que se materializan en una operación aritmética. Sin embargo, surgen nuevas exigencias, consecuencia de la necesidad de confeccionar un plan y de secuenciar el conjunto de operaciones (Lester, 1983; Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988 y Hershkovitz y Nesher, 2003). Es por ello que el marco teórico de la presente investigación lo hemos querido articular en torno a dos ejes: a) la

resolución aritmética de problemas verbales exige desencadenar procesos cognitivos analítico-sintéticos ordenados (Bogolyubov 1972a; Kalmykova, 1975; Puig y Cerdán, 1988); b) estos episodios analítico-sintéticos se apoyan sobre un conjunto finito de esquemas conceptuales (Riley et al., 1983).

Para poder responder al primer eje, tomaremos el método de análisis-síntesis como marco conceptual y aquellas investigaciones que lo proponen como método heurístico en la resolución aritmética de problemas verbales de varias etapas. Este método se divide en dos fases entrelazadas en el que el análisis nos va a proporcionar el plan de actuación, mientras que en la síntesis se va a ejecutar ese plan, lo que nos va a llevar desde los datos a la incógnita del problema.

> El análisis en la resolución de problemas aritméticos incluye, primero, la descomposición del problema en datos individuales y la incógnita, descubrimiento del contenido desconocido y los datos, aislamiento de sus características y facetas individuales, aislamiento de los principios que los conectan y aislamiento de sus relaciones funcionales (Kalmykova, 1975, p. 12).

> En el método de síntesis, los datos conocidos del problema son el punto de partida, y preguntándonos acerca de estos datos, la respuesta debería llevarnos más cerca de encontrar la solución desconocida (Kalmykova, 1975, p. 16)

Es decir, la tarea de análisis consiste en descomponer el problema original en situaciones de una etapa mediante la introducción de nuevas incógnitas auxiliares en un plan de solución ordenado mientras que, en la síntesis, se ejecutará el plan. Según Puig y Cerdán (1988), este método proporciona una estrategia de validez universal para resolver cualquier problema aritmético de varias etapas.

Sin embargo, la existencia de un plan general de resolución, no implica que los estudiantes no encuentren dificultades a la hora de resolver aritméticamente los problemas verbales. De hecho, en Kalmykova (1975) se ofrece una detallada relación de las objeciones planteadas a la enseñanza de un método analítico en educación primaria junto a descripciones de actuaciones erróneas de estudiantes cuando intentan poner en marcha los procesos de análisis. Sin embargo, la autora propugna que es justamente la dificultad asociada al desencadenamiento del análisis, el valor didáctico del propio método. Dentro de los estudios soviéticos sobre el tema, Bogolyubov (1972a) también plantea algunas dudas sobre la validez didáctica del método de análisis y síntesis, pues de sus observaciones concluye que los estudiantes de los últimos niveles de primaria, rara vez realizan un análisis completo previo a la síntesis. No obstante, el autor señala la importancia en la resolución aritmética de los procesos de análisis-síntesis parciales, considerados estos como procesos en los que es imposible separar una parte de otra.

Con respecto al segundo eje de nuestra propuesta, partiremos de la hipótesis de que para establecer las relaciones en cada una de las etapas del proceso de análisis anteriormente descrito, el resolutor utilizará esquemas conceptuales y supondremos que estos esquemas conceptuales son los mismos que se encuentran en los problemas verbales de una etapa. En este caso, podríamos asociar el esquema conceptual con la categoría semántica de los problemas aditivos y multiplicativos de una etapa. Extendiendo la idea, el entramado de relaciones matemáticas de un problema multietapa puede ser descrito como el resultado de aplicar una colección de esquemas conceptuales (Arnau, 2015).

En la década de los años 80 del siglo pasado, la introducción de las computadoras y otras herramientas electrónicas en el ámbito educativo supuso una oportunidad para abordar las dificultades que presentaban los estudiantes en las diferentes áreas de la matemática (Kodippili y Senaratne, 2008; Sangwin, Cazes, Lee y Wong, 2010 y Leigh-Lancaster, 2010). Inicialmente, la investigación se centró en el efecto de la introducción de soluciones tecnológicas no diseñadas con una finalidad educativa como podrían ser las calculadoras o las hojas de cálculo. Así, a mediados de los años 70, Etlinger (1974) predecía que “una calculadora electrónica, con un precio inferior a 50 $ pronto será parte integral de muchos programas escolares de matemáticas” (p. 43). De manera similar, Arganbright (1984) anticipaba que “la hoja electrónica de cálculo puede ser usada para complementar el estudio de los problemas verbales en algebra, trigonometría y cálculo” (p. 187). Desde grupos de investigación y desde el capital privado se plantearon evoluciones de estas soluciones de propósito general para dotarlas de una orientación puramente educativa, como podrían ser las calculadoras con posibilidades de representación gráfica.

Al mismo tiempo se introdujeron los conocidos como Computer Assisted Instruction (CAI). Estos entornos informáticos se caracterizan por ser sistemas de enseñanza que se modifican según unos modelos fijados previamente y, cuyo conocimiento programado, no se ve modificado en el tiempo. Se presentaba el contenido a aprender, se esperaba la respuesta del estudiante y esta se comparaba con la respuesta correcta. Solo si la respuesta era correcta, permitía al estudiante pasar a otro problema. La evolución de los CAI se dirigió hacia la creación de los Intelligent Tutoring Systems (ITS) en los que se separan, la parte de los contenidos que se van a enseñar, de las estrategias para enseñar, respondiendo de manera personalizada a las características individuales de los sujetos.

Desarrollar las habilidades de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales es una parte fundamental de las matemáticas. Para ello, supervisar la resolución aritmética que realiza un estudiante de un problema verbal es una tarea muy difícil ya que diferentes estudiantes pueden utilizar distintas líneas de razonamientos para intentar llegar a la solución correcta (Arevalillo-Herraez et al, 2014). Estos sistemas deberían intentan emular algunas de las tareas que realizaría un tutor humano cuando un estudiante encuentra alguna dificultad durante el proceso de resolución (Arnau, Arevalillo-Herraez, González-Calero, 2014). En el caso particular de la resolución aritmética de problemas verbales se han diseñado numerosos intentos de ITS. Un ejemplo de ellos es el tutor *Story Problem Solver* (SPS) (Marshall, 1995), cuyo objetivo era ayudar a los estudiantes en la resolución de problemas que contenían cinco estructuras semánticas (cambio, agrupación, comparación, variación[1] y transformación) mediante el uso de diagramas que representaban cada tipo de relación. Otro entorno informático creado para la resolución de problemas verbales utilizando el modelo de construcción es el *WORDMATH* (Looi y Tan, 1996). Es un entorno informático que utiliza la representación de relaciones parte-todo y que permite expresar de manera esquemática la información contenida en el problema. El ITS *MathCal* (Chang, Sung y Lin, 2006) ofrece un entorno de trabajo con herramientas dirigidas a aplicar las cuatro fases de Polya (1945) (p.e., permite subrayar parte del enunciado o proporciona una serie de preguntas-guía para que el estudiante trace un plan). Por último, *AnimalWatch* (Beal, Arroyo, Cohen y Woolf, 2010) permite resolver aritméticamente problemas verbales utilizando como contexto situaciones en las que participan animales en peligro de extinción, intentando de esta manera relacionar las matemáticas con contextos reales donde se pueda mostrar su importancia.

Como se apunta en Arnau et al. (2014) los ITS desarrollados en el campo de la resolución de problemas verbales no han sido capaces de implementar simultáneamente dos aspectos que son necesarios en la tutorización. Por un lado, dotar al sistema de la capacidad de tutorizar el proceso con independencia de las decisiones del resolutor y, por otro, permitir la máxima flexibilidad al resolutor en la toma de decisiones. En este sentido, HINTS (Arevalillo-Herráez y Arnau, 2013; Arevalillo-Herráez, Arnau, y Marco-Giménez, 2013 y Arnau et al., 2014) ha conseguido compaginar ambas exigencias dando como resultado un sistema que permite resolver problemas de manera aritmética y de manera algebraica, que comprueba la validez de una expresión atendiendo a las restricciones del problema y a las decisiones adoptadas por el resolutor previamente y que es capaz de supervisar distintas líneas de resolución de un mismo problema.

El uso de ITSs, y la posibilidad de restringir y tasar de manera automática la cantidad de información que recibe un estudiante, ha apoyado el surgimiento de líneas de investigación dirigidas a arrojar luz sobre el conocido como dilema de la ayuda (Koedinger y Aleven, 2007). Lejos de tratarse de un tema lejano a la investigación en educación matemática, la determinación de cuándo y en qué cantidad debe proporcionarse ayuda a un estudiante, es un tema recurrente por su habitual presencia en cualquier situación de aula donde se ponen en juego las matemáticas y, en especial, en las tareas de resolución de problemas (Aleven, Mc Laren, Roll y Koedinger, 2006; Waalkens, Aleven y Taatgen, 2013). En este sentido, el sistema HINTS puede proporcionar distintos niveles de información y ayuda gracias a disponer de una interfaz configurable (González-Calero, Arnau, Puig y Arevalillo-Herraez, 2015).

Por todo esto, planteamos una investigación en la que vamos a estudiar la enseñanza de la resolución aritmética de problemas verbales y las dificultades que encuentran los estudiantes cuando los resuelven. En nuestra investigación utilizaremos HINTS, pues

[1] La estructura semántica de variación citada en Marshall, Pribe y Smith (1987) es la que se relaciona con isomorfismo de medidas de Puig y Cerdán (1988).

las características ya descritas nos permitirán observar y registrar las decisiones que toman los sujetos observados cuando resuelven problemas, así como poner a prueba el efecto en la competencia de los estudiantes de proporcionar una cantidad distinta de ayuda.

No obstante, conviene señalar desde un principio, que el uso de HINTS introduce una distorsión respecto a las condiciones típicas en las que se resuelve un problema verbal en una situación escolar. Esto es así porque HINTS determina la validez de la resolución en cada paso. Por lo tanto, para el resolutor esto supone una nueva perspectiva, pues en todo momento las acciones aceptadas por HINTS serán correctas y, en consecuencia, el resolutor no se verá obligado a incluir ante cualquier dificultad, el hecho de comprobar si ha cometido un error previamente. Sin embargo, desde el punto de vista de la investigación, esta distorsión ofrece nuevas perspectivas para analizar las actuaciones de los estudiantes. Así, el uso de HINTS permite observar cómo los estudiantes abordarían pasos que podrían no alcanzar cuando resuelven en lápiz y papel como consecuencia de haber cometido un error previo. De igual modo, nos posibilita observar cómo los estudiantes modifican sus certezas y reelaboran sus planes cuando el sistema señala como incorrecta alguna de sus acciones.

Este trabajo se enmarca en una línea de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales en entornos tecnológicos iniciada en los trabajos de Arnau (2010) y González-Calero (2014). En concreto, la tesis continúa una línea de investigación resultado de la colaboración de miembros de los Departamentos de Didáctica de la Matemática y de Informática de la Universitat de València en la que se estudia la resolución de problemas cuando se utiliza HINTS. Esta colaboración ha producido resultados de investigación como Arevalillo-Herráez, Marco-Giménez, Arnau, y González-Calero (2017); González-Calero et al. (2015) o Sanz, González-Calero, Arnau, y Arevalillo-Herráez (2019).

1.1.2. OBJETIVOS

La investigación que proponemos pretende responder a los siguientes objetivos de investigación:

1) Conocer cómo influye la enseñanza de la resolución aritmética de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente y qué efectos puede tener en la competencia de un estudiante, la cantidad de ayuda recibida.

2) Identificar cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven aritméticamente problemas verbales en un sistema tutorial inteligente tras haber sido instruidos previamente en la resolución aritmética de problemas verbales mediante dicho sistema.

1.2. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

El desarrollo de la investigación muestra una representación de las diferentes etapas de elaboración de este trabajo que permite mostrar la estructura, organización y componentes que se han tenido en cuenta en la situación problemática considerada.

Básicamente, podemos distinguir una primera parte en la que se plantea la elaboración de un marco de referencia para la construcción de los instrumentos y para el diseño de un marco operativo desde el que estructurar el análisis de los datos y, una segunda, en la que se esquematiza la fase experimental.

En la fase experimental participaron 52 estudiantes de quinto curso de primaria que pertenecían a dos grupos naturales de un centro de Educación Primaria. El planteamiento de la investigación requería contar con estudiantes que ya hubieran sido instruidos previamente en la resolución aritmética de problemas verbales y que, a la vez, no hubiesen alcanzado plena competencia en este campo. Esto era debido a que teníamos la intención de incluir en la investigación problemas, sobre todo, de varias etapas, por lo que consideramos necesario garantizar que no fuera la primera vez que los estudiantes se enfrentasen a problemas de este tipo. De hecho, los estudiantes habían recibido instrucción en la resolución aritmética de problemas verbales de una y varias etapas durante ese mismo año y en años anteriores.

El desarrollo de la fase empírica se inició con la administración de un cuestionario formado por 10 problemas verbales estructuralmente distintos (cuestionario Pre) que los alumnos resolvieron con lápiz y papel. A cada sujeto se le suministró una calculadora para evitar que las dificultades de los estudiantes a la hora de resolver operaciones aritméticas influyeran en nuestra observación. La intención de este cuestionario era determinar la competencia inicial de los estudiantes a la hora de resolver problemas de manera aritmética. Además, los resultados del cuestionario Pre nos permitieron verificar estadísticamente que la distribución de los alumnos en cada uno de los grupos generaba grupos comparables en relación con su habilidad en la resolución aritmética de problemas verbales. A continuación, a cada uno de los grupos naturales se le aplicaron tres sesiones dentro de la secuencia de enseñanza de 50 minutos cada una en las que los estudiantes resolvían los mismos 30 problemas verbales usando HINTS (10 en cada sesión). La diferencia fundamental entre las dos configuraciones experimentales era la cantidad de ayuda que proporcionaba HINTS. En uno de los grupos, el grupo experimental, los estudiantes recibían confirmación de la validez de sus acciones y tenían la posibilidad de solicitar ayudas a demanda a HINTS. Este ofrecía ayuda con contenido del problema en una secuencia de tres niveles de ayuda por paso. En el otro grupo, el grupo de control, la configuración de HINTS no proporcionaba ayudas a demanda y los estudiantes solo recibían confirmación de la validez o no de las operaciones aritméticas que planteaban. Una vez finalizada la secuencia de enseñanza se administró un segundo cuestionario, el cuestionario Post, isomorfo al cuestionario Pre. Las condiciones de administración de este segundo cuestionario fueron idénticas a las del primero.

La comparación de las actuaciones de los estudiantes en los cuestionarios Pre y Post nos permitió realizar un estudio de grupo. Los resultados del estudio de grupo fueron analizados desde la doble perspectiva, cuantitativa y cualitativa, lo que nos permitió dar respuesta al primer objetivo de la investigación, así como, formar las parejas que participarían en el estudio de casos.

Para dar respuesta al segundo objetivo, se realizó el estudio de casos una vez finalizado el estudio de grupo. Este estudio, de carácter exploratorio, nos permitió documentar actuaciones de seis parejas de estudiantes (tres de cada grupo) resolviendo aritméticamente problemas verbales mediante el sistema tutorial inteligente. Las parejas se eligieron tomando como referencia las similitudes en cuanto a errores-aciertos en las resoluciones de los problemas del cuestionario Post. De esta manera, se intentaba obtener para cada uno de los grupos, una pareja con una competencia alta (tres problemas resueltos erróneamente y siete resueltos correctamente); otra con competencia media (cinco problemas resueltos erróneamente y cinco resueltos correctamente); y otra con una competencia baja (siete problemas resueltos erróneamente y tres resueltos correctamente). En el caso de que no fuera posible encontrar alguna pareja que cumpliera estos criterios, se intentaría formar la pareja con estudiantes que hubieran tenido dificultades similares en la realización de los problemas del cuestionario Post o estudiantes que hubiesen tenido actuaciones de interés durante las etapas previas al estudio de casos.

La configuración experimental se apoyó sobre la técnica de dar sentido a protocolos de “*out loud*” (Schoenfeld, 1985). El análisis de las transcripciones de los diálogos y de las actuaciones de los estudiantes nos dieron, por un lado, indicaciones del porqué de ciertos resultados obtenidos por los diferentes estudiantes durante el estudio de grupo. Por otro lado, nos permitieron documentar ciertas tendencias de los estudiantes cuando resolvieron de manera aritmética problemas verbales utilizando HINTS, pudiendo observar cómo este instrumento privilegia determinados comportamientos en relación con actuaciones documentadas en investigaciones previas en otros entornos.

En la Figura 1.1 mostramos gráficamente las diferentes etapas de la que consta el desarrollo de nuestra investigación:

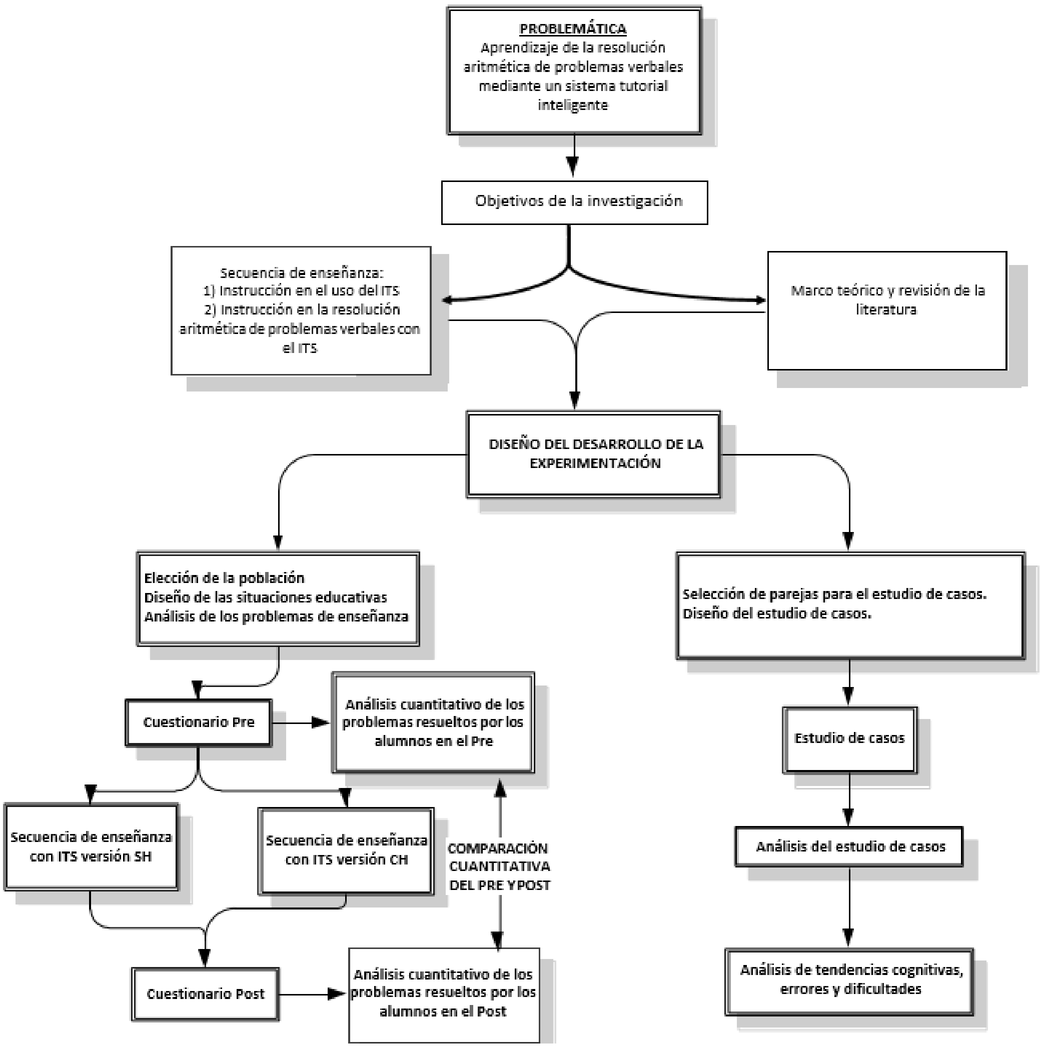


Figura 1.1. Esquema del diseño y desarrollo de la investigación.

1.3. DESCRIPCIÓN DE LOS CAPÍTULOS

A continuación, se presenta la estructura y contenido de los diferentes capítulos que conforman el trabajo de investigación, con el fin de facilitar al lector la posibilidad de poder conocer de antemano un breve resumen de aquello que se aborda en cada uno de ellos.

En este primer capítulo, hemos identificado la existencia de un problema en el campo de la resolución de problemas y, en particular, la resolución aritmética de problemas verbales. Dentro de este amplio campo, hemos conformado brevemente lo que será nuestro marco teórico y metodológico que nos permitirá llevar a cabo cada una de las fases en que se divide la investigación.

En el capítulo 2, tratamos de recoger distintas investigaciones que abordan la resolución de problemas verbales desde diferentes puntos de vista. En primer lugar se pone el punto de atención en aquellas investigaciones que indican las variables que se deben tener en cuenta o que pueden afectar a la enseñanza y aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos. Posteriormente, se trata de dar una definición de lo que algunas investigaciones consideran un problema verbal y como esta definición está asociada a los problemas que los alumnos resuelven en la etapa primaria. Se definen lo que se consideran problemas de una etapa o multietapa y nos centramos en una de las variables que más interés despierta en la resolución aritmética de problemas verbales; las variables de tarea, que tienen que ver con las características del problema. Estas variables son las que nos van a medir el nivel de complejidad de los diferentes problemas (Cerdán, 2008) y en particular, las variables semánticas. Esa estructura semántica que aparece en el enunciado de un problema va a evocar en los estudiantes diferentes esquemas conceptuales que permitirán, en la resolución aritmética de problemas verbales de una etapa, intentar colocar las variables conocidas y desconocidas en una estructura coherente en el que solo una cantidad es desconocida. La importancia de esta estructura semántica nos permite realizar una revisión de investigaciones que realizan una categorización semántica de los problemas aditivos y multiplicativos de una etapa. Por otra parte, se realiza una revisión de investigaciones que clasifican la dificultad y complejidad de las diferentes estructuras semánticas que pueden aparecer en estos problemas. Con respecto a los problemas multietapa, hay un menor número de investigaciones que realizan una clasificación semántica y las revisadas lo hacen, sobre todo, con problemas de dos etapas. No obstante, como apuntan Puig y Cerdán (1988), una clasificación de los problemas multietapa en función de los esquemas que constituyen su estructura matemática, no sería viable por la cantidad de combinaciones diferentes que se pueden conseguir. Dentro de la resolución de estos problemas multietapa se profundiza en investigaciones que abordan el método de análisis-síntesis como método heurístico relacionado con la resolución aritmética de problemas verbales multietapa. Dentro del modelo ideal de un resolutor competente de problemas verbales de manera aritmética, establecemos la importancia que tienen estos esquemas conceptuales dentro del método de análisis-síntesis y las distintas dificultades que pueden tener los estudiantes cuando resuelven aritméticamente problemas verbales. También fijamos la atención, en los diferentes entramados de relaciones entre cantidades que se pueden abordar dentro de la resolución de un problema multietapa. Por último, se hace un recorrido por distintos sistemas tutoriales inteligentes para la resolución aritmética de problemas verbales. Todas estas investigaciones nos permiten delimitar lo que se conoce respecto a este tema y establecer una base sobre la que analizar y describir los datos recogidos en nuestra investigación.

En el capítulo 3, describimos la población que fue objeto de estudio y la planificación que se llevó a cabo dentro de las tres sesiones de la secuencia de enseñanza. Además presentamos los recursos que se utilizaron en la secuencia de enseñanza, centrando la atención especialmente en el análisis de los problemas que se propusieron en cada una de las sesiones, en las distintas configuraciones de HINTS y en la forma en que se introdujo a los estudiantes en su funcionamiento.

Los capítulos 4 y 5 están destinados a describir con detalle el análisis de las actuaciones de los participantes en la investigación. El capítulo 4 se ocupa del estudio de grupo. En el apartado 4.1. se plantean los propósitos del estudio de grupo, mientras que los apartados 4.2. y 4.3. se dedican a la descripción pormenorizada de los problemas incluidos en los cuestionarios Pre y Post. El apartado 4.4. recoge el análisis cuantitativo de las producciones de los estudiantes al resolver los cuestionarios Pre y Post. En concreto, el apartado 4.4.1. detalla la forma en que se codificaron las producciones de los estudiantes para el análisis posterior. El apartado 4.4.2. se dedica a explicar cómo los resultados en el cuestionario Pre fueron utilizados para conocer el nivel previo de competencia de los estudiantes en la resolución aritmética de problemas verbales. Por último, en el apartado 4.4.3. se realiza un análisis comparativo global de los resultados de los cuestionarios Pre y Post y de las diferentes subfamilias de problemas consideradas lo que permite cuantificar y comparar la efectividad de las dos secuencias de enseñanza.

En el capítulo 5, se recoge el propósito que se persigue con el estudio de casos (apartado 5.1.) y se describe la técnica de recogida de datos mediante protocolos audiovisuales y las convenciones usadas en las transcripciones a protocolos escritos para mantener la información (apartado 5.2.). En el apartado 5.3. se describe el procedimiento para la selección de las parejas de estudiantes, así como los problemas que resolvieron. En el apartado 5.4 se presenta un extenso análisis de los protocolos escritos obtenidos de las grabaciones de las actuaciones de los distintos participantes en el estudio.

Por último y en el capítulo 6, se presentan las conclusiones que se obtuvieron del estudio de grupo a partir de la secuencia de enseñanza recibida y el rendimiento global o local que tuvieron en la resolución aritmética de los problemas entre el cuestionario Pre y Post (apartado 6.1), así como, de las conclusiones que se obtuvieron tras el análisis de las actuaciones de las parejas que conformaron el estudio de casos (apartado 6.2).

2. Antecedentes y marco teórico y metodológico

Tras delimitar los objetivos de nuestro trabajo en el capítulo anterior, vamos a presentar una revisión de las investigaciones que ya han tratado la problemática de la resolución aritmética de problemas desde diferentes puntos de vista. Esto nos permitirá delimitar un campo de investigación que consideramos muy amplio en aquellos aspectos relevantes y, de esta manera, podremos definir una base conceptual que nos permita describir las actuaciones de los estudiantes y extraer conclusiones a partir del análisis de los datos obtenidos.

2.1 VARIABLES EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

A mediados de la década de los 70, Jeremy Kilpatrick organizó las variables que deben tenerse en cuenta cuando se realiza una investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos (Kilpatrick, 1978; Kulm, 1979). Dentro de las variables independientes se identifican tres categorías principales: (1) variables del sujeto, (2) variables de tarea, y (3) variables de situación. Las variables de sujeto son aquellas que describen o miden las características propias de los resolutores, tales como: la instrucción recibida en resolución de problemas; rasgos de la personalidad como la actitud o la persistencia; y variables orgánicas, como la edad o el sexo. Las variables de tarea describen las características de los problemas. Dentro de esta categoría, podemos distinguir tres subcategorías: las variables de contexto, que describen el contenido semántico; las variables de estructura, que describen la estructura matemática del problema; y las variables de formato, que describen las características sintácticas del enunciado. Una última categoría viene definida por las variables de situación, que describen las características del entorno físico, psicológico o social en el que la resolución de problemas se da. Con respecto a las variables dependientes, Kilpatrick identifica cuatro categorías: (1) las variables de producto, relacionadas con el logro en la obtención de la solución, como por ejemplo, tiempo empleado en la solución, si es correcta o no, o si está completa; (2) las variables del proceso, en las que se recogen todas las aportaciones verbales o escritas del sujeto durante la resolución del problema y donde se reflejan la toma de decisiones; (3) las variables de evaluación, que tienen en cuenta las opiniones expresadas por el sujeto después de la resolución del problema; y (4) las variables concomitantes, que tienen que ver con aquellas actitudes y habilidades del sujeto que se modifican a medida que va resolviendo problemas.

De manera similar, Lester (1983) propone una categorización de distintos aspectos que se podrían investigar en el campo de la resolución de problemas y establece algunas precisiones metodológicas. Así plantea que se distinga entre: factores de tarea, factores de sujeto, factores ambientales, factores de instrumentación y metodología de la investigación. Por otra parte, Perales (1993) agrupa las variables de investigación en torno a: (1) la naturaleza del problema, donde se incluyen las variables que contemplan principalmente aspectos formales del problema (como la precisión, estructura, lenguaje, complejidad, tipo de tarea o solución requerida); (2) el contexto de la resolución del problema, donde se incluyen aquellas variables que influyen en el proceso de solución del problema y son externas al resolutor (por ejemplo, si hay manipulación de objetos reales, consulta de fuentes de información, verbalización o tiempo de resolución) y (3) el propio estudiante mediante variables como la creatividad, la actitud, la edad o el sexo.

Para el caso concreto de la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales Castro, Rico y Gil (1992) proponen cuatro enfoques de investigación: 1) el enfoque lingüístico, en el que se presta especial atención a la importancia del lenguaje en la resolución de problemas y a aspectos tales como, la habilidad lectora o la legibilidad de textos; 2) el enfoque de variables estructurales, que permiten determinar la dificultad de un problema tanto a nivel lingüístico como operacional; 3) el enfoque de proposiciones abiertas, que clasifican la dificultad de los problema en relación al número de proposiciones abiertas que tiene un problema y la posición de la variable desconocida dentro de una misma proposición abierta; y 4) el enfoque semántico en el que se estudia el enunciado de un problema desde dos puntos de vista: un análisis local donde se buscarán palabras clave que influyan en la elección de la operación que hay que realizar y un análisis global que contempla el enunciado como un conjunto e intenta estudiar los esquemas mentales que utiliza el resolutor cuando resuelve problemas.

2.2. DEFINICIÓN DE PROBLEMA VERBAL.

A la hora de intentar definir lo que los investigadores entienden por problema se tiene la dificultad de que este término puede definirse desde diferentes puntos de vista: (1) desde un punto de vista coloquial o social, como una cuestión o tarea que se trata de aclarar o resolver; (2) desde un punto de vista más pedagógico, donde se ven los problemas como un vehículo que permite responder a alguna cuestión planteada; o (3) desde un punto de vista más científico, como una dificultad a la que se enfrenta un sujeto que es incapaz de resolverlo utilizando el conocimiento que tiene en ese momento y donde el sujeto tiene que pensar un camino que le permita llegar a la solución del problema (Kantowski, 1977).

Por otra parte, se tiene que tener en cuenta que la mayoría de los problemas que se plantean a los estudiantes en la Educación Primaria y Secundaria, son problemas que solo tienen una solución y en los que el estado inicial y el estado final son conocidos. Estos problemas se conocen con el nombre de problemas cerrados (Pehkonen, 1997). Por el contrario, aquellos problemas que tienen múltiples soluciones correctas y en los que se permite al estudiante elaborar sus ideas matemáticas como respuesta a "su poder matemático", se les conoce con el nombre de problemas abiertos (Nohda, 2000).

Los problemas que aparecen inmersos en el currículo escolar y de los que nos hacemos eco en esta investigación, son los que llamaremos problemas verbales. En estos la información que se proporciona en el enunciado expresa relaciones de tipo cuantitativo entre cantidades conocidas y desconocidas, y la pregunta se refiere a la determinación de una o varias cantidades desconocidas. La resolución del problema, o lo que es preciso para contestar la pregunta del problema, parece consistir fundamentalmernte en la realización de una o varias operaciones aritméticas (Puig y Cerdán, 1988).

Por otro lado, Verschaffel, Greer y De Corte (2000) establecen que un problema verbal es una descripción de un problema en la que se plantean una o más preguntas y cuya respuesta puede obtenerse mediante la aplicación de operaciones matemáticas a los datos que se presentan en el enunciado. Uno de los objetivos de estos problemas será plantear situaciones reales donde los estudiantes pondrán en práctica aquellos conocimientos obtenidos en las clases, buscando la motivación, la mejora en la aplicación de las diferentes estrategias de resolución de problemas y desarrollar el pensamiento creativo para el aprendizaje de nuevos contenidos y habilidades matemáticas.

Desde un punto de vista escolar, estos problemas verbales se resuelven típicamente de manera aritmética en primaria, y mediante el recurso al lenguaje del álgebra en secundaria. Tal y como apuntan Puig y Cerdán (1990) para entender si un problema es aritmético o algebraico, se tiene que describir el proceso de resolución del problema verbal, y si la traducción del enunciado del problema se ha llevado a cabo mediante una expresión aritmética o algebraica. Es decir, no hay problemas aritméticos o algebraicos hasta que el estudiante no resuelve un problema y, por tanto, no se pueden obtener conclusiones exclusivamente del enunciado. Si nos atenemos a la definición que da Cerdán (2008) tenemos que:

> La familia de problemas aritmético-algebraicos se concibe como la familia de problemas que acoge a problemas que en el ámbito escolar se resuelven mediante el recurso a varias operaciones aritméticas elementales, que se van

> combinando hasta obtener el resultado del problema, o bien mediante el planteamiento de ecuaciones, que posteriormente se resuelven hasta obtener el resultado. (Cerdán, 2008, p. 27)

En conclusión, para remarcar la imposibilidad de señalar el carácter aritmético o algebraico de un problema verbal, en esta investigación nos referiremos a ellos tanto como problemas verbales aritmético-algebraicos o, de manera abreviada, como problemas verbales.

2.2.1. PROBLEMAS DE UNA ETAPA O MULTIETAPA

Según Puig y Cerdán (1988), un problema verbal es un problema de encontrar, donde se nos pide que, bajo ciertas condiciones, se determine una cantidad desconocida a partir de otras que nos proporcionan y que, por tanto, son conocidas. Es decir, lo que se pretende es establecer una relación o relaciones entre cantidades conocidas, para obtener el valor de algunas cantidades desconocidas. En el caso de la aritmética, esto nos proporcionará un entramado de relaciones entre cantidades que nos permitirá trazar un camino de resolución entre las cantidades proporcionadas en el enunciado y la cantidad desconocida que nos proporciona la solución del problema.

Diremos que un problema verbal aritmético-algebraico será de una etapa cuando el entramado de relaciones esté formado por una sola relación, (lo que en el caso de una resolución aritmética se materializará en una única operación), mientras que será multietapa cuando el entramado de relaciones entre las cantidades esté formado por más de una relación aritmética (lo que en el caso de una resolución aritmética se materializará en más de una operación).

En los problemas de una etapa, sabemos que tenemos que relacionar las dos cantidades conocidas mediante alguna operación aritmética para obtener la cantidad desconocida. Es decir, la misión del resolutor se limita prácticamente a elegir qué operación va a realizar. Sin embargo, en los problemas multietapa hay más decisiones que tomar y se deberán tener en cuenta al menos tres componentes: qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden (Puig y Cerdán, 1990). Como consecuencia, estos autores apuntan que la resolución de los problemas multietapa no se reduce solamente a la realización de traducciones ordenadas.

Dependiendo del número de cantidades conocidas y desconocidas y el número de relaciones entre cantidades necesario para resolver el problema, los problemas verbales aritmético-algebraicos los podemos dividir en: (1) problemas determinados, en los que el número de cantidades desconocidas coincide con el número de relaciones entre las cantidades; (2) problemas indeterminados, en los cuales el número de cantidades desconocidas es mayor que el número de relaciones entre cantidades necesario para resolver el problema y; (3) problemas sobredeterminados, en los que el número de cantidades desconocidas es menor que el número de relaciones entre las cantidades necesarias para resolver el problema. En nuestra investigación nos centraremos en los problemas determinados.

2.2.2. VARIABLES DE TAREA APLICADAS A LOS PROBLEMAS VERBALES.

La descripción operativa de los problemas verbales exige definir de manera precisa diversos procedimientos de medida o de identificación de sus características. Como ya se ha indicado en el apartado 2.1, las variables de tarea, en el caso de estudios dirigidos a la resolución de problemas, pueden clasificarse en: variables de contexto, variables de estructura y variables de formato (Kilpatrick, 1978).

Las variables de formato tendrán que ver con la sintaxis propia del enunciado. Entre estas variables sintácticas podemos encontrar: el número de palabras del enunciado, la longitud de las frases, las pistas verbales, el tipo de números utilizados o la posición de la pregunta (Caldwell y Goldin, 1979; Nesher, 1976; Puig y Cerdán, 1988). Las variables de estructura tendrán que ver con la estructura matemática del problema y en particular con el entramado de relaciones entre cantidades necesaria para resolver el problema. Entre estas variables de estructura podríamos encontrar: el número de relaciones, el número de cantidades (conocidas o desconocidas), el número de cantidades desconocidas en una relación o el número de relaciones en las que participa una misma cantidad desconocida (Cerdán, 2008). En el caso de los problemas de una etapa, podríamos asociar una única estructura matemática al problema, pero en el caso de los problemas multietapa el entramado de relaciones puede no ser único. Por último, las variables de contexto tienen que ver con la semántica del enunciado ligada al contexto que se presenta y con el conocimiento de los campos semánticos.

2.2.3. DIFICULTAD Y COMPLEJIDAD DE UN PROBLEMA VERBAL

Según la RAE, el adjetivo difícil es algo que presenta obstáculos o que es poco probable. Es así que, podemos decir que un problema es difícil para un resolutor porque éste carece o no posee en grado suficiente las habilidades que se requieren para resolver o entender el problema (Cerdán, 2008). En principio, un alumno tendrá más dificultades para resolver un problema (o le resultará más difícil) cuando tenga menos habilidades o menos competencias para resolverlo. Entre estas habilidades encontraríamos: distinguir la información relevante del enunciado, las cantidades conocidas de las desconocidas, recordar un esquema conceptual evocado por la situación descrita, identificar las relaciones correctas entre las cantidades y, en general, montar el entramado de relaciones entre cantidades necesarios para resolver el problema. Por todo esto, y de acuerdo con Cerdán (2008), la dificultad de un problema será una variable dependiente del tipo de producto o de proceso y dará cuenta de una apreciación directa (explícitada al observador) o indirecta (interpretada por el observador), del resolutor.

Por otro lado, la idea de complejidad asociada a la resolución de problemas verbales sería una característica propia de la tarea (Cerdán, 2008) y, por lo tanto, una variable independiente asociada a aspectos sintácticos, semánticos o de estructura matemática. El uso en la investigación de las variables de estructura como una medida de la complejidad de la tarea ha sido muy limitado. Una excepción la encontraríamos en Cerdán (2008). Una mayor cantidad de investigaciones han recurrido a variables sintácticas con la intención de encontrar correlaciones con la dificultad de las tareas. En este caso se han utilizado como variables: número de palabras del enunciado, longitud de las frases, la complejidad gramatical, legibilidad, pistas verbales, magnitud de los números, o la situación de la pregunta (Barnett, 1979; Caldwell y Goldin, 1979; Cook, 1973; Jerman y Ress, 1972; Nesher, 1976).

2.3. LOS ESQUEMAS CONCEPTUALES EN LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DE PROBLEMAS VERBALES.

Sin embargo, las variables semánticas se han revelado como las mejores medidas de complejidad de un problema verbal (Puig y Cerdán, 1988). Posiblemente, la importancia de las variables semánticas se relacione con el hecho de que en los problemas verbales se describen situaciones que evocan acciones a nivel cognitivo que resultan el origen del proceso de resolución. Así, en el desarrollo de las habilidades de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales de manera aritmética, hay que tener en cuenta el complejo conocimiento conceptual que se debe poseer para entender las situaciones descritas (Riley et al., 1983). El enunciado de un problema verbal está formado por una serie coherente de relaciones conceptuales ligadas a la estructura semántica que subyace en el problema (Marshall et al., 1987). Esta estructura semántica global viene determina por diferentes relaciones semánticas determinadas por hechos, palabras concretas o situaciones tipo que pueden asociarse a un constructo mental que llamamos esquema conceptual. Más concretamente, Riley et al. (1983) define esquema como una herramienta para “organizar la información de una frase o historia y ampliar la representación del mensaje incluyendo componentes que no son explícitamente mencionados pero, sin embargo, necesarios para realizar una representación coherente y completa” (p. 166). En el caso de la resolución aritmética de problemas verbales de una etapa se trataría de intentar colocar las variables conocidas y desconocidas en una estructura coherente en el que solo una cantidad es desconocida.

Marshall et al. (1987) indica los cuatro componentes necesarios para que se produzca la transferencia entre las relaciones semánticas y los esquemas conceptuales: (1) el conocimiento declarativo pertinente a la relación semántica en cuestión, en el que el estudiante asigna las cantidades del problema a un hueco específico dentro de la relación ternaria; (2) unos prerrequisitos generales, vistos como el conjunto de condiciones que deben ser reunidos para que el esquema pueda ser aplicado instantáneamente (por ejemplo, en el esquema de cambio, una condición es que la cantidad inicial y final sea una alteración de una cantidad de la misma naturaleza física); (3) para el caso de los problemas multietapa, los mecanismos de fijación de objetivos, entendidos estos como la determinación de cantidades intermedias o auxiliares desconocidas pero necesarias para la resolución correcta del problema verbal; (4) las reglas de implementación para plasmar externamente la información representada mentalmente, es decir, una vez el esquema ha sido evocado con éxito y los prerrequisitos conseguidos, se trata de realizar las operaciones aritméticas específicas para la resolución del problema.

De modo similar, Riley et al. (1983) distinguen tres tipos de conocimiento necesarios para la resolución de problemas: (1) el conocimiento esquemático del problema, para entender la variedad de relaciones semánticas que se pueden dar; (2) la acción del esquema para representar ese modelo de conocimiento sobre las acciones envueltas en las soluciones de los problemas y; (3) el conocimiento estratégico para planificar las soluciones. Es decir, cuando a un sujeto se le da a resolver un problema verbal aritmético-algebraico, usa su conocimiento del esquema del problema para representar la situación particular descrita. En estos modelos la solución se consigue logrando entender el problema como un todo y cómo las relaciones de los elementos del problema y la solución actúan en el conjunto.

2.4. CATEGORIZACIÓN SEMÁNTICA DE LOS PROBLEMAS DE UNA ETAPA

En el caso de los problemas de una etapa se aplica un único esquema conceptual. Este esquema conceptual viene ligado a la estructura semántica del propio problema y, por tanto, podemos establecer una correspondencia biunívoca entre el esquema conceptual y la categorización semántica del problema.

2.4.1. CATEGORIZACIÓN SEMÁNTICA DE LOS PROBLEMAS ADITIVOS DE UNA ETAPA

De acuerdo con Puig y Cerdán (1988) y Vergnaud (1991), la distinción entre problemas de suma y de resta no es pertinente cuando la intención es analizar el proceso de la resolución de problemas verbales. Esto es así porque, el hecho de considerar el problema de suma o resta, es consecuencia de las decisiones que pudiera tomar el resolutor. Por ejemplo, si el resolutor utilizara el lenguaje del álgebra, podría plantear, si así lo quisiera, todos los problemas aditivos como un problema de suma. En definitiva, el hecho de considerar un problema de suma o de resta no es una consecuencia de su estructura matemática. Por todo lo anterior, llamaremos problemas aditivos de una etapa a aquellos problemas cuyas soluciones impliquen realizar solamente una suma o una resta (Castro et al., 1992; Puig y Cerdán, 1988).

Las relaciones aditivas que aparecen entre las cantidades de un problema verbal de una etapa son, como mínimo, relaciones ternarias que pueden entrelazarse de diferentes maneras, lo que nos va a permitir distinguir una gran variedad de estructuras aditivas. Así, en una primera clasificación, Durand y Vergnaud (1976) distinguen cinco grandes categorías de relaciones y presentan los diferentes tipos de problemas que nos podemos encontrar dentro de cada categoría dependiendo de cuál sea la cantidad desconocida en la relación entre cantidades. En un trabajo posterior, Vergnaud (1991) establece una nueva clasificación de los problemas aditivos añadiendo una categoría y reformulando la clasificación anterior. En estas investigaciones, se apunta la necesidad de distinguir el diferente papel que pueden jugar las cantidades en un problema verbal aditivo. De esta forma distingue entre cantidades de tipo estado y de tipo transformación. Los estados serán cantidades estáticas en el tiempo (a las que habitualmente se refiere como medidas), normalmente positivas, mientras que las transformaciones, son cantidades dinámicas y que pueden ser positivas o negativas dependiendo si la transformación se hace a más o a menos. Un tercer tipo de cantidades que se menciona son las comparaciones que se establecen entre dos estados. Las categorías que distinguen estos autores son:

(A) Dos medidas se componen en una tercera (estado-estado-estado (EEE)).

Esta categoría fue reformulada como la relación parte-parte-todo.

Figura 2.1: Esquema relación parte-parte-todo (Vergnaud, 2001, p.202)

En este caso tenemos tres estados de diferente naturaleza en los que dos de ellos, llamados partes, se combinan para formar un tercero llamado todo. A partir de esta estructura podemos identificar dos subestructuras dependiendo si la variable desconocida es el estado total, y se correspondería con la operación suma, o uno de los estados parte, correspondiéndose con la operación aritmética resta.

El primer problema muestra el caso en el que la incógnita se encuentra en el estado total mientras que en el segundo problema la incógnita se encuentra en uno de los estados parte:

Nadia tiene 7 canicas de cristal y 4 de metal. ¿Cuántas canicas tiene en total?

Carlos ha invitado a 9 niños por su cumpleaños. 5 de ellos son chicos. ¿Cuántas niñas hay?

(B) Una transformación opera sobre una medida para dar una medida.

Esta categoría fue reformulada como la relación estado-transformación-estado[1] (ETE).

[1] En la estructura, Vergnaud representa los estados mediante cuadrados refiriéndose siempre a medidas o cantidad de elementos positivos y a las transformaciones y relaciones mediante elipses y círculos teniendo en cuenta que una relación será la cantidad positiva o negativa con la que parte uno de los elementos que interviene en el problema respecto del otro.

Figura 2.2: Esquema relación estado-transformación-estado (Vergnaud, 2001, p.202)

En este caso los estados son medidas o cantidad de elementos y se produce una modificación a más o a menos que relaciona el estado inicial y el estado final. En este caso, todas las medidas son de la misma naturaleza. A partir de esta estructura podemos identificar 6 subestructuras dependiendo si la variable desconocida es el estado inicial, final o la transformación y si la transformación es a más o a menos.

Tabla 2.1.

Ejemplos de problemas de la categoría ETE.

	Incógnita en el estado final	**Incógnita en la transformación**	**Incógnita en el estado inicial**
Transformación a más	Pedro tenía 6 canicas. Ha jugado una partida y ha ganado 5. ¿Cuántas canicas tiene ahora?	Pedro tenía 6 canicas. Ha jugado una partida y ahora tiene 11. ¿Cuántas canicas ha ganado?	Pedro acaba de ganar 5 canicas y ahora tiene 11. ¿Cuántas canicas tenía al principio?
Transformación a menos	Pedro tenía 6 canicas. Ha jugado una partida y ha perdido 5. ¿Cuántas canicas tiene ahora?	Pedro tenía 6 canicas. Ha jugado una partida y ahora tiene 1. ¿Cuántas canicas ha perdido?	Pedro acaba de perder 5 canicas y ahora tiene 1. ¿Cuántas canicas tenía al principio?

(C) Dos transformaciones se componen en una tercera (transformación-transformación-transformación (TTT)).

Esta categoría fue reformulada como composición de transformaciones.

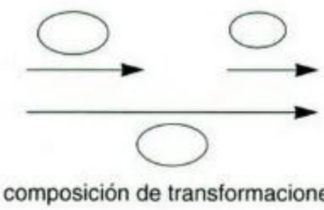


Figura 2.3: Esquema composición de transformaciones (Vergnaud, 2001, p.202)

Son problemas en las que intervienen dos transformaciones para relacionarlas con una tercera. Aquí tenemos una amplia variedad de subtipos que dependerá de que la incógnita esté en una de las transformaciones elementales o en la resultante, del signo de las transformaciones (a más o a menos) y el signo de la transformación resultante en el caso de que las otras dos transformaciones sean de distinto signo. La complejidad de estos problemas reside en el hecho de que, aunque puede resolverse con una operación aritmética, se evocan cantidades desconocidas que podrían desencadenar un proceso de resolución apoyado en tres relaciones ETE. El recurso a estas tres relaciones ETE exigiría usar el lenguaje del álgebra y, es posiblemente esta colección de circunstancias, las que originan que este tipo de problemas comiencen a resolverse de manera correcta a los 11 años (Vergnaud, 1982). A continuación, presentamos una resolución a modo de ejemplo.

E*n una partida Pedro ganó 13 cromos por la mañana, pero perdió 5 por la tarde. ¿Cuántos cromos ganó al final del día?*

Vamos a llamar x al número de cromos con los que Pedro fue al colegio. Al acabar la primera partida donde ganó 13, Pedro tendría $x + 13$. Por la tarde empezó con $x + 13$ pero perdió 5, por lo que Pedro acabaría el día con $x + 13 – 5$ cromos. Además de lo anterior, podríamos asignar la letra y al número de cromos que Pedro ganó al final. De esta manera, podemos afirmar que en este problema se evocan tres cantidades desconocidas (no explícitas en el enunciado) y aparece explícitamente una cantidad desconocida en la pregunta del problema. Entre las seis cantidades (conocidas y desconocidas) hemos establecido 3 relaciones: (1) $x + 13$ que tiene su origen en una relación ETE donde se transforma la cantidad inicial de cromos en la cantidad final al acabar la mañana; (2) $x +13 –5$ que es resultado de aplicar otra relación ETE donde se transforma la cantidad de cromos con la que acabo la mañana a otra cantidad $x +13 –5$ que se refiere a la cantidad de cromos con la que acabó el día y; (3) $x + 13 - 5 – x = y$ que resulta de una tercera relación ETE entre el momento inicial y el momento final. En la resolución de esta ecuación, al reducir términos semejantes, desaparece la x y nos queda $13 – 5 = y$.

Es decir, si utilizamos el lenguaje del álgebra, estos problemas también podrían resolverse mediante el uso de tres relaciones ETE y, por lo tanto, la consideración de esta categoría de problemas como problemas de una etapa podría ser discutida.

(D) Una transformación opera sobre un estado relativo para dar un estado relativo (estado-comparación-estado (ECE)).

Esta categoría fue reformulada como la categoría de comparación.

Figura 2.4: Esquema comparación (Vergnaud, 2001, p. 202).

A este caso pertenecen los problemas en los que se establece una comparación (C) entre una cantidad llamada referente (estado) y la otra cantidad que será la cantidad comparada (estado). De la misma manera encontramos, por tanto, seis subgrupos dependiendo si la cantidad desconocida es la cantidad comparada, el referente o la comparación y si esa comparación es a más o a menos.

Tabla 2.2.

Ejemplos de problemas de la categoría ECE.

	Incógnita la cantidad comparada	Incógnita en la comparación	Incógnita en el referente
Comparación a más con el referente	Marcos tiene una cantidad de euros en el bolsillo. Si sabemos que tiene 3 más que Raquel y esta lleva 5 euros. ¿Cuántos euros tiene Marcos?	Marcos tiene 8 euros. Raquel tiene 5 euros. ¿Cuántos euros más tiene Marcos que Raquel?	Marcos tiene 8 euros. Si sabemos que tiene 3 más que Raquel. ¿Cuántos euros tiene Raquel?
Comparación a menos con el referente	Pedro tenía unas cuantas canicas en una bolsa. Si sabemos que tiene 5 canicas menos que su amiga Sofía que tiene 12 ¿Cuántas canicas tiene Pedro?	Pedro tiene 6 canicas y Sofía 8. ¿Cuántas canicas menos tiene Pedro que Sofía?	Pedro tiene 7 canicas, que son 3 menos que las que tiene Sofía. ¿Cuántas canicas tiene Sofía?

(E) Dos estados relativos se componen en un tercero (comparación-transformación-comparación (CTC)).

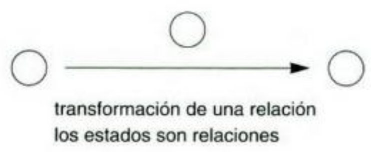


Figura 2.5: Esquema transformación de relaciones (Vergnaud, 2001, p. 202).

Aquí la transformación aparece sobre una relación inicial para obtener una relación final entre los elementos que intervienen en el problema. El número de subestructuras que encontraremos son las seis que encontrábamos en los problemas del tipo EEE, pero con un mayor número de casos ya que depende del signo positivo o negativo de la relación inicial y/o final.

Por el mismo motivo que el comentado con los problemas TTT, es discutible que los problemas incluidos en esta categoría semántica puedan ser considerados problemas de una etapa. Veamos un ejemplo de ello:

Elena tiene 13 euros más que su madre. Hoy se ha gastado 6 euros. ¿Cuántos euros tiene Elena más que su madre ahora?

De nuevo en este problema verbal aparecen cuatro cantidades desconocidas (tres no explícitas y una explícita en la pregunta del problema) y dos conocidas que juegan el papel de comparación (13) y de transformación (6).

Euros que tiene la madre de Elena (los mismos que tiene al final): x

Euros que tiene Elena: $x + 13$ (ECE)

Euros que tiene Elena después de la compra: $x + 13 – 6$ (ETE)

Euros que tiene más Elena que su madre después de la compra: y

$$y = x + 13 – 6 – x \quad <—> \quad y = 13 – 6 \text{ (ECE)}$$

(F) La nueva categoría formulada por Vergnaud (1991) es la que llama composición de relaciones.

Figura 2.6: Esquema composición de relaciones (Vergnaud, 2001, p. 202)

Aquí tenemos problemas en los que intervienen dos relaciones que se componen para dar como resultado la relación final. En esta categoría no hay transformación de relaciones. En este caso habrá que tener en cuenta la relación desconocida y la naturaleza positiva o negativa de las relaciones para determinar el número total de problemas diferentes que se pueden plantear. Un ejemplo de uno de ellos podría ser el siguiente:

Juan tiene 15 euros más que Javier y éste 30 euros más que Manolo. ¿Cuántos euros tiene Juan más que Manolo?

Sin embargo, podríamos realizar un análisis similar al realizado anteriormente con los problemas de tipo TTT y CTC, y tendríamos que:

Euros que tiene Manolo: x

Euros que tiene Javier: $x + 30$ (ECE)

Euros que tiene Juan: $x + 30 + 15$ (ECE)

Euros que tiene Juan más que Manolo: y

$y = x + 30 + 15 – x \quad <—> \quad y = 30 + 15$ (ECE).

De igual manera que en los problemas TTT y CTC, sería discutible que los problemas incluidos en esta estructura semántica pudieran ser clasificados como problemas de una etapa, pues es posible realizar una lectura del problema apoyada en las cantidades evocadas en la que se usarían tres relaciones ECE.

En conclusión, la clasificación de los problemas verbales aditivos de una etapa de Vergnaud sería discutible para los problemas del tipo TTT, CTC y CCC y, por lo tanto, no utilizaremos esta clasificación en nuestro estudio.

Siguiendo con la categorización semántica, dentro de los distintos enfoques de análisis de los problemas aritmético verbales, Carpenter, Hiebert and Moser (1981) también realizan una clasificación de los problemas aditivos teniendo en cuenta la estructura semántica de los problemas, pero introducen ciertas diferencias respecto a investigaciones anteriores. Estos investigadores consideraron cuatro tipos de problemas verbales distintos que se podían resolver con una suma o una resta:

Tipo 1: Uniendo/Separando

Tipo 2: Parte-Parte-Todo

Tipo 3: Comparación

Tipo 4: Igualando

Además, Carpenter et al. (1981) remarcan las dos dimensiones por la que los cuatro tipos de problemas son diferentes:

- La primera es que en los problemas de unir/separar y los de igualación hay directamente aplicada la idea de acción de una cantidad sobre otra, mientras que, en los otros dos tipos, parte-parte-todo y comparación, son problemas en los que hay una relación estática entre las cantidades que intervienen.
- La segunda está basada en el conjunto de relaciones que hay entre cantidades. En los problemas de unir/separar y en los de parte-parte-todo, dos de las cantidades del problema son un subconjunto de la tercera, mientras que en los problemas de comparación e igualación, uno de los subconjuntos descritos en el problema es totalmente disjunto a los otros dos.

En Nesher, Greeno y Riley (1982) y Riley et al. (1983), se propone una clasificación más detallada de la propuesta por Carpenter et al. (1981) limitando su atención a las categorías de Cambio (uniendo/separando), Combinación (parte-parte-todo) y Comparación como se muestra en la Tabla 2.3:

Tabla 2.3.

Estructura semántica y descripción (Nesher, Greeno y Riley, 1982).

CATEGORÍA	DESCRIPCIÓN GENERAL
Combinación 1	Pregunta sobre el conjunto unión (El todo).
Combinación 2	Pregunta sobre un subconjunto (La parte).
Cambio 1	Creciente, pregunta sobre el conjunto final.
Cambio 2	Decreciente, pregunta sobre el conjunto final.
Cambio 3	Creciente, pregunta sobre el cambio.
Cambio 4	Decreciente, pregunta sobre el cambio.
Cambio 5	Creciente, pregunta sobre el conjunto inicial.
Cambio 6	Decreciente, pregunta sobre el conjunto inicial.
Comparación 1	Menciona “más que”, pregunta sobre la diferencia.
Comparación 2	Menciona “menos que”, pregunta por la diferencia.
Comparación 3	Menciona “más que”, pregunta por la cantidad comparada.
Comparación 4	Menciona “menos que”, pregunta sobre la cantidad comparada.
Comparación 5	Menciona “más que”, pregunta sobre el referente.
Comparación 6	Menciona “menos que”, pregunta sobre el referente.

Puig y Cerdán plantean una clasificación que pretende integrar y completar las propuestas de Carpenter et al. (1981) y Riley et al. (1983). Estos autores sugieren la existencia de cuatro categorías semánticas: cambio, combinación, comparación e igualación. En nuestro estudio utilizaremos esta clasificación, por lo que a continuación pasamos a desarrollarla de manera detallada a partir de la información que podemos encontrar en el capítulo 3 de Puig y Cerdán (1988).

CAMBIO: En esta categoría se incluyen los problemas verbales en los que se distinguen tres momentos diferentes y en los que una cantidad inicial es sometida a una acción que la modifica obteniendo otra cantidad. Esta es la categoría que Vergnaud llama ETE en la que una medida se transforma a lo largo del tiempo para dar otra medida. Considerando que la acción puede aumentar o disminuir la cantidad y que dos de las tres cantidades están contenidas en la información que presenta el problema (representada por d en la Figura 2.7), podremos hablar de seis tipos de problemas diferentes de cambio. En estos problemas de cambio las tres cantidades son de la misma naturaleza.

	INICIAL	CAMBIO	FINAL	CRECER	DECRECER
CAMBIO1	d	d	i	*	
CAMBIO2	d	d	i		*
CAMBIO3	d	i	d	*	
CAMBIO4	d	i	d		*
CAMBIO5	i	d	d	*	
CAMBIO6	i	d	d		*

Figura 2.7: Subcategorías semánticas para la categoría semántica de Cambio (Puig y Cerdán, 1988, p. 100) (d = cantidad conocida; i = cantidad desconocida; * cambio a más o a menos)

COMBINAR: Son los problemas que Vergnaud categorizaba como EEE (parte-parte-todo) y en los que la pregunta del problema se puede referir a una de las partes o al total por lo que tenemos dos tipos de problemas. En este tipo de problemas las cantidades suelen ser de distinta naturaleza, ya que las cantidades y su relación suele diferenciarse por adjetivos (canicas rojas y canicas verdes), sustantivos (chicos y chicas), localizaciones (monos arriba y monos debajo), etc.

	PARTE	PARTE	TODO
COMBINAR1	d	d	i
COMBINAR2	d	i	d

Figura 2.8: Subcategorías semánticas para la categoría semántica de Combinación (Puig y Cerdán, 1988, p. 101) (d = cantidad conocida; i = cantidad desconocida)

COMPARAR: son problemas en los que hay presente una relación estática de comparación entre dos cantidades compartiendo esta característica con los de Combinación, pero en estos problemas la relación se establece entre cantidades y no entre conjuntos como era el caso anterior. A las tres cantidades que intervienen se les llaman referente, cantidad comparada y la diferencia o comparación. Esta comparación puede establecerse en más o en menos y la cantidad desconocida puede ser cualquiera de las tres. Por tanto, estaremos hablando de seis subcategorías dentro de esta categoría.

	REFERENCIA	COMPARADA	DIFERENCIA	MÁS	MENOS
COMPARAR1	d	d	i	*	
COMPARAR2	d	d	i		*
COMPARAR3	d	i	d	*	
COMPARAR4	d	i	d		*
COMPARAR5	i	d	d	*	
COMPARAR6	i	d	d		*

Figura 2.9: Subcategorías semánticas para la categoría semántica de Comparación (Puig y Cerdán, 1988, p. 102) (d = cantidad conocida; i = cantidad desconocida; * comparación a más o a menos)

IGUALACIÓN: Al igual que Carpenter et al. (1981) distinguen una cuarta categoría que se caracteriza por tener una comparación entre las cantidades, pero en este caso de manera dinámica ya que se intenta modificar una cantidad para tener “tantos como” la otra cantidad. Las cantidades que aparecen son las mismas que en la categoría de comparación, el referente, la cantidad a igualar y la cantidad que iguala. Como la cantidad que iguala puede ser a más o a menos y la incógnita puede ser cualquiera de las tres, tenemos de nuevo seis subcategorías distintas.

	REFERENCIA	COMPARADA	DIFERENCIA	MÁS	MENOS
IGUALAR1	d	d	i	*	
IGUALAR2	d	d	i		*
IGUALAR3	d	i	d	*	
IGUALAR4	d	i	d		*
IGUALAR5	i	d	d	*	
IGUALAR6	i	d	d		*

Figura 2.10: Subcategorías semánticas para la categoría semántica de Igualación (Puig y Cerdán, 1988, p. 104) (d = cantidad conocida; i = cantidad desconocida; * igualación a más o a menos)

Como novedad estos autores señalan que hay veces que esta clasificación no nos permite asignar un determinado problema a una determinada categoría, sino que hay veces que un problema puede tener características de dos clases y por tanto clasificable en ambas categorías dependiendo la interpretación que haga el lector del problema. Es lo que ellos llaman problemas híbridos. Veamos el ejemplo que presentan Puig y Cerdán (1988) en la página 105:

En un autobús van 20 personas. En una parada se bajan las 8 mujeres. ¿Cuántos hombres quedan en el autobús?

En este caso podríamos pensar que la cantidad inicial de 20 personas se ha visto modificada por las 8 que bajan y, por tanto, estaríamos hablando de un problema de cambio 2, pero también podríamos pensar que tenemos dos conjuntos disjuntos de hombres y mujeres en el autobús (que serían las partes) y que, conocida una parte y el total, nos tocaría averiguar la otra parte. En este caso estaríamos hablando de un problema de combinación 2.

2.4.2 DIFICULTAD Y COMPLEJIDAD DE LOS PROBLEMAS ADITIVOS DE UNA ETAPA ATENDIENDO A SU ESTRUCTURA SEMÁNTICA.

Desde la década de los ochenta, las investigaciones en la resolución de problemas verbales aditivos de una etapa, intentaron impulsar el estudio de aquellas variables que podían afectar a la dificultad de un problema. La mayoría de las investigaciones fijaban sus objetivos en intentar relacionar la dificultad de un problema verbal con su estructura semántica (Steffe y Johnson, 1971, Nesher y Teubel, 1975; Durand y Vergnaud, 1976; Nesher y Katriel, 1978; Carpenter et al., 1981; Nesher, 1982; Nesher et al., 1982; Riley et al., 1983; Christou y Phipippou, 1998; Koedinger y Nathan, 2004; Nesher, 1999 y Herschkovitz y Nesher, 2003); o relacionar la dificultad del problema verbal con las características del formato o sintaxis del enunciado (Nesher, 1976; Lepik, 1990; Cummins et al., 1988; Van der Schoot, Bakker, Horsley y Van Lieshout, 2009).

Como ya hemos señalado anteriormente, la clasificación semántica ha ofrecido los mejores resultados a la hora de comparar la dificultad de un problema con alguna medida de su complejidad. Es por esta razón que en este apartado centraremos la atención en esta caracterización de la complejidad.

Partiremos del análisis comparartivo ofrecido en Puig y Cerdán (1988) para los problemas de cambio, combinación y comparación donde se usa como medida de dificultad el éxito en la resolución de distintas poblaciones de estudiantes (Figura 2.11).

	Nesher (1982)	Riley et al. (1983)	
	2º-6º	1º	2º
Combinar 1	79	100	100
Combinar 2	52	39	70
Cambio 1	82	100	100
Cambio 2	75	100	100
Cambio 3	72	56	100
Cambio 4	77	78	100
Cambio 5	48	28	80
Cambio 6	49	39	70
Comparar 1	76	28	85
Comparar 2	66	22	75
Comparar 3	65	17	80
Comparar 4	66	28	90
Comparar 5	60	11	65
Comparar 6	54	6	35

Figura 2.11: Dificultad de los problemas aditivos de una etapa según su estructura semántica (Puig y Cerdán, 1988, p. 111)

Nesher et al. (1982) y posteriormente Nesher (1999) y Herschkovitz y Nesher (2003) explican estas diferencias en la dificultad, indicando que el estudiante aprende progresivamente a lo largo de cuatro niveles (Figura 2.12), los esquemas conceptuales necesarios para resolver cada una de las categorías semánticas en que dividimos los problemas verbales aditivos de una etapa. Dentro del nivel 1, el estudiante es capaz de representar y operar en conjuntos individuales, por lo que en este nivel es capaz de resolver los problemas de cambio 1, cambio 2 y los de combinación 1. Estos serían los problemas más fáciles para los estudiantes. En el nivel 2, hay una comprensión de la diferencia entre las operaciones aritméticas de suma y resta donde el estudiante es capaz de evaluar cualitativamente y cuantitativamente la acción que propone el problema. Además, también es capaz de transformar cantidades más pequeñas en más grandes o viceversa. Es por eso que, en este nivel, el estudiante puede resolver problemas de cambio 3, cambio 4, comparación 1 y comparación 2. En el nivel 3, indican que el esquema parte-parte-todo ya es dominado por el estudiante y, por tanto, el estudiante ya distingue el conjunto parte del conjunto total y le permite realizar operaciones donde sea necesario entender la inclusión de conjuntos. Este es el caso de los problemas de combinación 2. Por otra parte, si el estudiante es capaz de tener una comprensión de la semántica subyacente en el enunciado y no se deja "engañar" por las marcas sintácticas que representan algunas palabras del enunciado, será capaz de resolver problemas verbales de cambio 5, cambio 6, comparación 3 y comparación 4. En el último nivel, el estudiante realiza descripciones direccionales y relativas manejando la desigualdad A > B con la igualdad A – C = B. Esto le permite resolver los problemas más difíciles para estas autoras, que son los de comparación 5 y comparación 6.

Word Problems by Levels of Development

Type of Problem	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4
Combine 1	X			
Combine 2			X	
Change 1	X			
Change 2	X			
Change 3		X		
Change 4		X		
Change 5			X	
Change 6			X	
Compare 1			X	
Compare 2			X	
Compare 3			X	
Compare 4			X	
Compare 5				X
Compare 6				X

Figura 2.12: Estructura semántica y niveles de desarrollo de los diferentes esquemas (Hershkovitz y Nesher, 2003, p.10)

Esta teoría de los cuatro niveles de desarrollo cognitivo es descrita también por Christou y Phipippou (1998) y señalan que en el nivel 1 la mayoría de los alumnos son capaces de resolver los problemas verbales aditivos de una etapa en el que la palabra clave informa de la operación a realizar (excluyendo la categoría de comparación y combinación). Este es el caso de los problemas de cambio 1 y cambio 2. En el nivel 2, la mayoría de los alumnos ya son capaces de realizar comparaciones aditivas entre dos conjuntos y resolver todos los problemas de combinación y de cambio, excepto cambio 5 y cambio 6 mientras que en el nivel 3, estos autores apuntan que la mayoría de los alumnos ya resuelven todos los problemas de estructura aditiva.

A modo de estudio de replicación, De Corte y Verschaffel (1987), presentaron ocho problemas verbales aditivos a 30 estudiantes de primer grado correspondientes a las categorías de cambio 1, cambio 2, cambio 3, cambio 6, combinación 1, combinación 2, comparación 1 y comparación 3. Los resultados de la investigación no varían en gran medida de los resultados de otras investigaciones obteniendo que los problemas de cambio 1, cambio 2 y combinación 1 fueron los más fáciles. El de cambio 3 y el de combinación 2 fueron de dificultad media, mientras que los que les resultaron más difíciles a los estudiantes fueron los de cambio 6, comparación 1 y comparación 3.

De igual modo, Stern (1993), realizó una investigación con los problemas de comparación donde los resultados obtenidos apuntaban a que los problemas de comparación con la cantidad referente desconocida son los más difíciles de resolver por los estudiantes. Los seis experimentos realizados con estudiantes revelaron que, la falta de acceso de los estudiantes al lenguaje usado en los problemas de comparación, hacía que los problemas de comparación 5 y 6 fuesen los problemas en los que los estudiantes tenían más dificultades.

2.4.3. CATEGORIZACIÓN SEMÁNTICA DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE UNA ETAPA.

Por las mismas razones que en los problemas aditivos no era pertinente distinguir entre problemas de suma y resta, llamaremos problemas de estructura multiplicativa (o simplemente problemas multiplicativos) a aquellos problemas de una etapa cuya resolución impliquen realizar una multiplicación o una división (Puig y Cerdán, 1988 y Castro et al., 1992).

2.4.3.1. TIPOS DE RELACIONES MULTIPLICATIVAS

Como apuntan Puig y Cerdán (1988), dependiendo de la aproximación que se realice al conjunto de los números naturales (N) se pueden obtener dos interpretaciones diferentes para la multiplicación. Si la aproximación ha sido por la vía de contar considerando que ambos componentes de la multiplicación juegan papeles diferentes y en el que una cantidad actúa sobre otra, se puede ver la multiplicación como una suma de sumandos iguales (cuatro veces cinco cromos). Esta concepción unitaria está relacionada con la definición que se da de la multiplicación como suma reiterada donde una cantidad llamada multiplicando se repite tantas veces como indica la segunda cantidad llamada multiplicador. Si, por el contrario, la vía de aproximación ha sido por conjuntos, tendremos la interpretación de la multiplicación como producto cartesiano. La multiplicación vista así tiene un carácter binario en el que a un par de elementos (x, y)

se le asigna un tercero *z* y en el que los dos primeros juegan un papel equivalente en la relación (4 camisetas y 3 faldas para vestirme). Por tanto, estas dos maneras de entender la multiplicación en las distintas etapas donde los estudiantes aprenden, pueden provocar dificultades en la resolución aritmética de los problemas verbales.

En la mayoría de las situaciones en las que tenemos que realizar una multiplicación o una división, las cantidades conocidas o desconocidas que participan son de diferentes tipos, y, por tanto, resulta necesario comentar esas diferencias. Esta es una diferencia central con respecto a las situaciones aditivas donde todas las cantidades son de la misma especie. Veamos, con un ejemplo propuesto por Schwartz (1996, p. 22), la diferencia entre las diferentes cantidades que pueden aparecer en una relación multiplicativa.

"Supongamos que tenemos un montón de granos de café caracterizado por las tres cantidades siguientes:

(5.0, lb) peso del café en libras, (40.00, $) precio del café en dólares y (8.00, $/lb) precio del café en dólares por cada libra.

Si nosotros tuviéramos dos montones de granos de café como el que hemos descrito y los juntamos, las cantidades que representarían a este nuevo contexto serían las siguientes:

(10.0, lb) peso del café en libras, (80.00, $) precio del café en dólares y (8.00, $/lb) precio del café en dólares por cada libra".

Se observa que la manera de componer la cantidad precio/libra es diferente de las otras dos cantidades a pesar de haber modificado la cantidad de café. Esto nos lleva a pensar que esa cantidad es un descriptor diferente del café. Además, mientras que las dos primeras cantidades describen el montón de granos de café, la última cantidad puede describir tanto al montón entero como a un solo grano de café. Como dice Schwartz (p. 22) "es una cantidad que describe la calidad del café y no describe ningún aspecto que tenga que ver con la cantidad de café". Estas cantidades son las llamadas cantidades intensivas (I) y en ellas realmente se expresa una relación entre dos cantidades. Por otro lado, una cantidad extensiva (E) será aquella que exprese la extensión de una magnitud (continuas) o de un conjunto (discretas). Como las cantidades extensivas pueden ser discretas (D) y continuas (C) y las cantidades intensivas están formadas por el cociente de dos cantidades extensivas, obtenemos cuatro tipos de cantidades intensivas: D/D (por ejemplo, canicas por bolsa), C/D (por ejemplo, litros por botella), D/C (por ejemplo, personas por año), C/C (por ejemplo, gramos por litro). Como consecuencia, Nunes, Desli y Bell (2003) sugieren que para una correcta comprensión de las cantidades intensivas, los estudiantes deberían entender que están formadas por dos cantidades extensivas y ser capaces de identificarlas. Si nos fijamos en la relación existente entre las dos cantidades extensivas y la cantidad intensiva, esa relación difiere de una a otra. Por ejemplo, si la cantidad intensiva "*como de dulce está el zumo de limón*" depende de las variables extensivas "*cantidad de azúcar*" y "*cantidad de líquido*" observamos que cuánto más azúcar tenga el zumo, más dulce estará (directamente proporcionales) y cuánto más líquido tenga el zumo, menos dulce estará (inversamente proporcionales). Estos autores defienden la necesidad de que para entender las cantidades intensivas hay que conocer los dos tipos de relaciones que pueden existir entre las cantidades extensivas e intensivas (directa e inversa).

Además, existen cantidades intensivas que pueden aparecer en los problemas multiplicativos que no llevan asociada ninguna unidad de medida. Por ejemplo, en los problemas de comparación cuando hablamos del "*triple*" o "*doble*" o cuando estamos en un contexto de conversión de factores. En el primer caso, este escalar se considera una cantidad intensiva que no cambia la naturaleza del referente sobre el que opera, sino que solo cambia la magnitud de su medida, mientras que en el caso de cambio de unidades, la cantidad tampoco cambia la naturaleza del referente, sino simplemente la descripción numérica de su medida (Schwartz, 1996).

En definitiva, teniendo en cuenta que las cantidades pueden ser extensivas o intensivas, Schwartz (1996) establece tres ternas de cantidades diferentes en los problemas multiplicativos de una etapa:

1) La terna (I, E, E´).

Estas tres cantidades pueden estar asociadas mediante una multiplicación o una división. Por tanto, obtendremos estas cuatro posibilidades relacionando las tres cantidades:

$$IxE = E' \quad ; \quad ExI = E' \quad ; \quad \frac{E'}{E} = I \quad ; \quad \frac{E'}{I} = E$$

Si nos fijamos en las dos primeras multiplicaciones y, teniendo en cuenta la conmutatividad de la multiplicación, podemos afirmar que se tratan de dos posibilidades equivalentes en las que para poderse dar se necesita que el denominador con el que se mide la cantidad intensiva coincida con la cantidad extensiva *E* para poder obtener la otra cantidad extensiva. Estas dos primeras ternas multiplicativas se relacionarán con las estructuras semánticas de isomorfismo de medidas 1 y comparación multiplicativa 1, enunciada por Puig y Cerdán (1988)[2]. Respecto a las divisiones y, siempre y cuando las unidades con las que se mide la cantidad intensiva coincidan con las cantidades extensivas, en el caso de $\frac{E'}{E} = I$, estaremos hablando de una división reparto o partición (estructuras semánticas de isomorfismo de medidas 2 o comparación multiplicativa 2), mientras que en el caso $\frac{E'}{I} = E$, estaremos hablando de una división por agrupamiento o cuotición (estructuras semánticas de isomorfismo de medidas 3 o comparación multiplicativa 3). En este sentido, Schwartz (1996) destaca la dificultad que tienen muchos alumnos con la división partición cuando las cantidades extensivas son discretas y la intensiva es continua.

---

[2] Véase apartado 2.4.3.2

2) La terna (E, E´, E´´)

Para esta terna tenemos asociadas una multiplicación o una división entre dos de las cantidades para averiguar la tercera:

$$ExE' = E'' \quad ; \quad \frac{E}{E'} = E''$$

Esta terna es la que está asociada a la estructura semántica de producto cartesiano (producto de medidas según Vergnaud, 1983) en la que las tres cantidades son de distinta naturaleza (chicos, chicas, parejas de baile).

3) La terna (I, I´, I´´)

Para esta terna tenemos asociadas también una multiplicación y dos divisiones (partitiva o cuotitiva) según las cantidades de medida de las cantidades intensivas. Puig y Cerdán (1988) indican la dificultad de encontrar problemas en las aulas que sean de la estructura $I'xI'' = I$ a no ser que la unidad del numerador de una se cancele con la del denominador de la otra, quedando de nuevo otra cantidad intensiva.

2.4.3.2. CATEGORIZACIÓN SEMÁNTICA DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE UNA ETAPA.

Así como en los problemas verbales aditivos de una etapa se ha conseguido llegar a una clasificación más o menos consensuada, no ocurre lo mismo con la clasificación de los problemas multiplicativos (Puig y Cerdán, 1988). Respecto a la cantidad de tipos de problemas que podemos obtener en una relación multiplicativa y fijándonos en la forma de la relación, si las cantidades que intervienen son extensivas o intensivas y dentro de estas, continuas o discretas, podemos entender que el número es bastante elevado (Vergnaud, 1997). Pero si atendemos exclusivamente a su carácter extensivo o intensivo, Vergnaud (1983, 1988) identifica tres tipos de problemas: isomorfismo de medidas, problemas con un solo espacio de medidas y producto de medidas.

Tipo I: Isomorfismo de medidas

Para Vergnaud (1983), este tipo de problemas están formados por relaciones cuaternarias en las que dos cantidades son medidas de un cierto tipo y otras dos de otro tipo diferente. Son situaciones que están basadas en la proporcionalidad y en las que se establece un isomorfismo entre dos cantidades medibles. Ese isomorfismo puede ser entre dos cantidades de distinta naturaleza, lo que nos proporcionará dos subestructuras (multiplicación y división por reparto), o puede ser entre dos cantidades de la misma naturaleza, lo que nos proporcionará otra subestructura (división por agrupamiento). Es decir, si relacionamos canicas con bolsas, lo podemos hacer de dos maneras: (1) multiplicando o, (2) dividiendo por reparto. Mientras que si relacionamos canicas con canicas, solamente podremos hacerlo mediante la división por agrupamiento para obtener bolsas.

Tabla 2.4.

Ejemplos de problemas verbales de la categoría de Isomorfismo de medidas.

Multiplicación	**División por reparto**	**División por agrupamiento**
Hay 6 bolsas de canicas y en cada bolsa hay 12 canicas. ¿Cuántas canicas hay en total?	Tenemos 6 bolsas y 72 canicas, ¿cuántas canicas tendremos que poner en cada bolsa para que haya el mismo número de canicas en cada bolsa?	Si tenemos en total 30 canicas y en cada bolsa había 6 canicas, ¿cuántas bolsas hemos comprado?

Regla de tres
Tres botellas de agua pesan 1,5 kilógramos. ¿Cuánto pesan 12 botellas de agua?

A parte del problema de multiplicación y los dos de división, Vergnaud (1997) incluye dentro de este tipo los problemas de regla de tres como una tabla de correspondencia entre dos tipos de cantidades.

Tipo II: Problemas con un espacio único de medidas

Son los problemas en los que aparece un coeficiente multiplicativo o escalar que establece esa comparación entre las otras dos cantidades (doble, triple, mitad…), por lo que se pierde uno de los dos espacios de medida del que hablamos anteriormente. Aparte de este coeficiente, las otras dos cantidades pertenecientes al otro espacio de medida, son cantidades de la misma naturaleza. Según la operación a realizar sea una multiplicación o una división (de reparto o de agrupamiento), y la comparación sea en más o en menos, obtenemos seis subestructuras de este tipo como podemos apreciar en la tabla 2.5:

Tabla 2.5.

Ejemplos de problemas verbales de la categoría de Problemas con un espacio único de medidas.

	Multiplicación	**División reparto**	**División agrupamiento**
Comparación en más	Juan tiene 8 euros. Luisa tiene cuatro veces más dinero que él. ¿Cuánto dinero tiene Luisa?	Begoña tiene 32 euros. Paco tiene 8 euros. ¿Cuántas veces más dinero tiene Begoña que Paco?	Fabián recibe cada mes una cantidad de dinero. Su hermana María recibe 4 veces más, es decir, 100 euros. ¿Cuánto recibe Fabián?

Comparación en menos	Fabián recibe cada mes una cantidad de dinero. Su hermana María recibe 4 veces menos, es decir, 100 euros. ¿Cuánto recibe Fabián?	Begoña tiene 32 euros. Paco tiene 8 euros. ¿Cuántas veces menos dinero tiene Paco que Begoña?	Juan tiene 8 euros. Luisa tiene cuatro veces menos dinero que él. ¿Cuánto dinero tiene Luisa?

Tipo III: Producto de medidas

En este caso, no aparece una relación basada en la proporcionalidad, y la relación es entre dos cantidades de distinta naturaleza para obtener otra cantidad de distinta naturaleza a las de la relación. Por ejemplo, pantalones con camisetas para obtener uniformes. De esta manera podemos obtener dos subestructuras, una para la relación de multiplicación y otra para la división, ya que aquí la estructura semántica de multiplicación sí es conmutativa.

Tabla 2.6.

Ejemplos de problemas verbales de la categoría de Producto de medidas.

Multiplicación	**División**
Si tengo 7 camisetas y 5 pantalones diferentes, ¿de cuántas maneras distintas me podré vestir?	Si me puedo vestir de 35 maneras distintas y tengo 7 camisetas, ¿cuántos pantalones tengo?

Siguiendo con los intentos de categorización semántica de los problemas multiplicativos de una etapa, Nesher (1988) realiza una clasificación introduciendo algunas diferencias respecto a la propuesta realizada por Vergnaud. Esta autora mantiene la existencia de la categoría de isomorfismo de medidas, pero realiza una puntualización al último tipo de problemas que Vergnaud llama de regla de tres. A esta última subcategoría la llama regla de correspondencia, ya que la autora afirma que la tarea que se debe realizar en este tipo de problemas es encontrar la cantidad que se repite (multiplicando) e intentar conectarla con la cantidad que indica cuántas veces se repite (multiplicador). Tiene que ver con la idea de multiplicación como suma reiterada. Además, teniendo en cuenta el tipo de cantidades que pueden aparecer, esta categoría está relacionada con la primera terna que Schwartz (1996) considera, es decir (E, E´, I).

Respecto a la segunda categoría definida por Vergnaud, Nesher (1988) la llama categoría de comparación y matiza que está relacionada con la misma estructura de cantidades que el isomorfismo de medidas. La única diferencia que apunta es que en estos problemas la cantidad intensiva es el escalar que establece la comparación entre las dos cantidades de la misma especie que toman el papel de referente (Er) y de cantidad comparada (Ec) dentro del contexto del problema.

Respecto a la última categoría planteada por Vergnaud, Nesher (1988) la llama de multiplicación cartesiana y tiene que ver con la estructura de cantidades E X E = E. Como en los otros tipos de problemas multiplicativos, estos problemas están formados por concatenación de tres frases con información relevante para la resolución. Las dos primeras describirán dos conjuntos de elementos disjuntos y diferentes, mientras que la tercera describe el cruce entre las dos primeras frases.

Otros autores como Bell et al. (1984) y Bell, Greer, Grimison y Mangan (1989) afirman que en la primera categoría de isomorfismo de medidas las cantidades que van a ser multiplicadas juegan distintos roles dentro de la multiplicación, por lo que consideran que la multiplicación es asimétrica en este caso. Es por esto, que tienen en cuenta tres tipos de problemas: adición repetida en el que hay múltiples grupos, adición repetida en el que se repite alguna medida, y problemas de razón. En las dos primeras categorías hay un número entero de repeticiones del conjunto de objetos o una cantidad continua y el multiplicador es el número de repeticiones. En los problemas de razón la relación es entre cantidades de la misma naturaleza y el multiplicador es la cantidad que juega un rol análogo y que parece que pueda indicar el número de repeticiones. Cuando los autores hablan de un rol análogo no precisan la diferencia entre las cantidades extensivas e intensivas e inciden en que la cantidad que juega el papel de multiplicador no siempre está clara a priori. Posteriormente, enuncian cuatro tipos de problemas multiplicativos más en los que la cantidad que juega el papel del multiplicador tampoco está clara. Estos problemas son los que llaman cambio de tamaño, con las mismas y distintas unidades, y problemas de mezclas con las mismas y distintas unidades. Finalmente, indican que a cada uno de estos siete tipos de problemas les corresponde las dos estructuras asociadas a la división, distinguiendo, como hemos indicado anteriormente en Schwartz (1996), la división partitiva y cuotitiva.

En una categorización posterior, Schmidt y Weiser (1995) consideraron que la categoría de isomorfismo de medidas, incluyendo la estructura cociente, equivale a todos los problemas que pertenecen a la estructura que ellos llaman "*formando el n-ésimo múltiplo de medidas*". Esta estructura semántica está formada por una medida o un cardinal finito llamado multiplicando y por una segunda cantidad llamada multiplicador, que es un operador que forma el n-ésimo múltiplo de la primera cantidad. El resultado es una cantidad de la misma naturaleza que la primera. Si la primera cantidad o el operador son la incógnita es cuando aparece la estructura cociente dentro de esta estructura semántica. Dentro de esta estructura semántica, indican distintos tipos de subestructuras: (1) la estructura parte-todo (esta categoría es la que Bell y sus colaboradores llamaban adición repetida en el que hay múltiples grupos y adición repetida en el que se repite alguna medida); (2) la estructura iteración; (3) la estructura de cambio multiplicativo (llamada por Bell y sus colaboradores cambio de tamaño en las mismas unidades); (4) la estructura de comparación multiplicativa y (5) la estructura de proporción (llamada por Bell y sus colaboradores como cambio de tamaño con diferentes unidades, los problemas de mezclas con diferentes unidades y la categoría de razón).

La segunda categoría que enuncian es la categoría de combinación, en la que las dos cantidades son los cardinales de dos conjuntos finitos y el producto se obtiene como combinación de los elementos del primer conjunto con todos los elementos del segundo conjunto. Esta es la que se corresponde con la categoría denominada por Vergnaud producto de medidas.

La tercera categoría formulada es la que denominan la estructura de composición de operadores. En esta estructura, los dos factores y el producto son operadores en un mismo dominio de medidas. La multiplicación ocurre como la composición de los dos factores, por lo que se necesita la comprensión de la estructura multiplicativa de cambio o comparación de los problemas de una etapa. Un ejemplo de esta categoría podría ser el siguiente problema:

> *Durante su primer año de vida, Óscar triplicó su peso al nacer. En su segundo año duplicó su peso. ¿Qué múltiplo de su peso tiene Óscar al final de su segundo año de vida?*

La última categoría es la que llaman multiplicación por fórmula, en la que las tres cantidades son medidas y en las que las unidades de medida encajan para determinar, bien por producto o división, la cantidad pedida en el problema.

En el trabajo de Maza (1991) se apunta la existencia de cuatro tipos de problemas de multiplicación. A los primeros, que se pueden resolver como una suma reiterada, les llama problemas de razón. En estos problemas se relacionan una cantidad extensiva con otra intensiva para obtener otra cantidad extensiva. La segunda categoría, a la que pertenecen los problemas que se pueden resolver utilizando la noción de producto cartesiano, el autor los denomina como problemas de combinación. En estos problemas se relacionan dos cantidades extensivas que al multiplicarlas nos permite obtener otra cantidad extensiva. Junto a estas dos primeras categorías, aparecen dos tipos de problemas más, en los que la diferencia radica en la estructura de las cantidades que aparecen relacionadas. La categoría de comparación, con una estructura de relación de cantidades igual a la categoría de razón y, los de conversión, en el que se relacionan dos cantidades intensivas para obtener otra intensiva. A partir de esta clasificación de los problemas de multiplicación se deduce una organización de los problemas de división (véase Tabla 2.7):

Tabla 2.7.

Clasificación de problemas multiplicativos propuesto por Maza (1991).

PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN	PROBLEMAS DE DIVISIÓN
RAZÓN……………… E X I = E	AGRUPAMIENTO-RAZÓN……….. ¿ X I = E
COMPARACIÓN…… E X I = E	PARTICIÓN-RAZÓN……………….. E X ¿ = E
COMBINACIÓN…... E X E = E	AGRUPAMIENTO-COMPARACIÓN… E X ¿ = E
CONVERSIÓN……… I X I = I	PARTICIÓN-COMPARACIÓN …… ¿ X I = E
	COMBINACIÓN…………………..... ¿ X E = E

PROBLEMAS DE RAZÓN: En estos problemas se dispone de una cantidad inicial que va cambiando a medida que se repite sucesivamente un número de veces. Como indica Maza es una concepción unitaria de la operación y se pueden resolver mediante una suma reiterada. Con respecto a la división, el autor distingue los problemas de agrupamiento-razón, en los que la solución puede alcanzarse mediante una resta reiterada y los de partición-razón, donde se requiere hacer un reparto y no una resta reiterada al uso[3] .

Tabla 2.8.

Ejemplos de problemas verbales de la categoría Razón.

RAZÓN	AGRUPAMIENTO-RAZÓN	PARTICIÓN-RAZÓN
Tengo 8 bolsas de plástico y en cada bolsa 6 canicas, ¿cuántas canicas tengo en total?	Tengo 50 canicas y en cada caja tengo que colocar 5 canicas, ¿cuántas cajas necesito?	Tengo 24 canicas y las tengo que colocar en 6 bolsas. ¿Cuántas bolsas necesitaré para colocarlas?

PROBLEMAS DE COMBINACIÓN: Estos corresponden a una concepción binaria de la operación y estrechamente ligada al producto cartesiano donde se disponen de dos cantidades iniciales, al mismo nivel y donde se consideran las dos para obtener una tercera. Respecto a la división, como cada cantidad tiene sentido al mismo nivel, solo tendremos un tipo de problema de división, llamado de división-combinación.

Tabla 2.9.

Ejemplos de problemas verbales de la categoría de Combinación.

COMBINACIÓN (•)	COMBINACIÓN (÷)
Tengo 3 tonos de rojo y 4 tonos de blanco. ¿Cuántos colores distintos podemos obtener?	Un pintor ha conseguido 12 colores diferentes, mezclando 3 tonos de rojo con varios tonos de blanco. ¿Cuántos tonos de blanco ha tenido que emplear?

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN: Maza los define como un refinamiento de los problemas de razón, ya que la cantidad intensiva no es una cantidad por unidad, sino un cuantificador que genera una comparación.

Tabla 2.10.

Ejemplos de problemas verbales de la categoría de Comparación.

COMPARACIÓN	AGRUPAMIENTO-	PARTICIÓN-

[3] Maza (1991) no excluye resolver estos problemas por resta reiterada pero no se puede realizar como en los problemas de agrupamiento- razón. Veamos el ejemplo que aparece en la página 29:
Con 60 pesetas te compras 4 paquetes de chicles. ¿Cuánto vale cada paquete?
Está claro que no podemos restar 60 – 4 ya que estaríamos restando pesetas y paquetes. Pero si le asignas una peseta a cada paquete sí que podría restar 60 – 4 y me quedarían 60 – 4 = 56 pesetas. Si repito el procedimiento y asigno una segunda peseta a cada paquete 56 – 4 = 52. De esta manera a la decimoquinta vez me quedaría 4 – 4 = 0 por lo que cada paquete costaría 15 pesetas.

	COMPARACIÓN	**COMPARACIÓN**
Un coche de juguete vale 50 euros. Otro, más grande, vale 3 veces más. ¿Cuánto valdría el coche más grande?	Un coche grande de juguete vale 150 euros y otro pequeño 50 euros. ¿Cuántas veces vale más el grande que el pequeño?	Un coche grande de juguete vale 150 euros. Cuesta 3 veces más que uno pequeño. ¿Cuánto vale el coche pequeño?

PROBLEMAS DE CONVERSIÓN: Maza apunta que, aunque suelen estar asociados a problemas de conversión de unidades, podemos encontrar problemas que siguen la estructura I x I = I, que no son de conversión de unidades y que pertenecerían a este grupo. Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 1: *Si un mes tiene 4 semanas y cada semana te dan 25 euros de paga. ¿Cuánto puedes ahorrar en un mes?*

Ejemplo 2: *Una caja tiene 25 bombones. Una más grande tiene 3 veces más. ¿Cuántos bombones tiene la caja más grande?*

Como podemos observar ninguno de los dos problemas es de conversión de unidades y, sin embargo, se rigen por la estructura I x I = I, aunque en el primer caso las dos variables intensivas sean razones; mientras que en el segundo problema, una de las variables intensivas sea un cuantificador.

Con la intención de plantear una síntesis operativa de investigaciones anteriores, Puig y Cerdán proponen clasificar los problemas multiplicativos de una etapa en tres categorías: isomorfismo de medidas, comparación multiplicativa y productor de medidas. En la primera categoría, Puig y Cerdán (1988) consideran que hay tres[4] tipos de problemas de isomorfismos diferentes según qué cantidad sea la desconocida en la estructura de cantidades $ExI = E'$. Así tenemos:

a) Isomorfismo de medidas 1 (IM1): en el que la cantidad desconocida es la extensiva E´, pudiéndola averiguar mediante la estructura de cantidades $ExI =?$.

b) Isomorfismo de medidas 2 (IM2): en el que la cantidad desconocida es la intensiva I y, por tanto, tiene que ver con la división por reparto o partición y con la estructura de cantidades $\frac{E}{E'} =?$.

c) Isomorfismo de medidas 3 (IM3): en el que la cantidad desconocida es la extensiva E y, por tanto, tiene que ver con la división por agrupamiento o cuotición y con la estructura de cantidades $\frac{E'}{I} =?$, la llama de transformación, como una relación estática donde las cantidades no se modifican.

[4] Puig y Cerdán (1988), consideran que en esta categoría hay otra estructura de relación de cantidades *IxI = I* pero que esta estructura es muy difícil que aparezca en los problemas propuestos en la escuela ya que las cantidades intensivas han de tener unas unidades relacionadas de manera que el denominador de una se cancele con el numerador de la otra y que, entonces, el resultado es una nueva cantidad intensiva.

Por otra parte, Puig y Cerdán (1988) siguiendo el razonamiento de que, el escalar que compara es una cantidad intensiva y que estos problemas tienen la misma estructura de cantidades ($E_r xI = E_c$) que la estructura de isomorfismo de medidas, define tres tipos de problemas para la categoría semántica de comparación:

a) Comparación 1 (CM1): en el que la cantidad desconocida es la extensiva de la cantidad comparada Ec, pudiéndola averiguar mediante la estructura de cantidades $E_r xI =?$.

b) Comparación 2 (CM2): en el que la cantidad desconocida es la intensiva I (escalar de comparación) y, por tanto, tiene que ver con la división partitiva y con la estructura de cantidades $\frac{E_r}{E_c} =?$.

c) Comparación 3 (CM3): en el que la cantidad desconocida es la extensiva de la cantidad referente Er y, por tanto, tiene que ver con la división por cuotición y con la estructura de cantidades $\frac{E_c}{I} =?$.

Relacionar el CM2 con la partición, y el CM3 con la cuotición, ha seguido el mismo criterio que habíamos utilizado en la categoría de isomorfismo de medidas. Pero para los autores esta categorización no es tan simple, ya que dependería de la interpretación del problema que le diese el resolutor pudiendo intercambiar los papeles[5]. En nuestra investigación aplicaremos la primera interpretación.

Esto autores coinciden con Nesher (1988) al considerar los problemas de comparación multiplicativa como un tipo particular de isomorfismo de medidas donde la cantidad intensiva tiene la característica de ser adimensional. De igual manera, coinciden con los trabajos anteriores al considerar el producto de medidas como una estructura multiplicativa conmutativa donde se incluyen todos los problemas que tienen que ver con área, volumen, trabajo y otros conceptos físicos. En concreto, los definen como una composición cartesiana entre dos espacios de medida en un tercer espacio de medida donde se da de manera necesaria una conmutatividad semántica de la estructura multiplicativa.

En nuestra investigación partiremos de la clasificación semántica de los problemas multiplicativos de una etapa propuesta por Puig y Cerdán (1988) y además, la reinterpretaremos como la colección de esquemas conceptuales multiplicativos puestos en juego cuando se resuelve un problema multietapa.

2.4.4. DIFICULTAD Y COMPLEJIDAD DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE UNA ETAPA SEGÚN SU ESTRUCTURA SEMÁNTICA.

[5] Para ver la otra interpretación se puede consultar el ejemplo que aparece en Puig y Cerdán, 1988, pp. 132-133 donde con una interpretación diferente del problema habría que identificar CM2 con la división cuotitiva y la CM3 con la partitiva

En Ivars y Fernández (2016), se muestran los porcentajes de éxito que tuvieron 273 alumnos, con edades comprendidas entre los 6 y los 12 años, cuando resolvían problemas verbales multiplicativos de una etapa atendiendo a una categorización semántica compatible con la propuesta por Puig y Cerdán (1988) (Figura 2.13).

	Isomorfismo de medidas			Comparación multiplicativa			Producto de medidas		
Curso	Multiplic.	División partitiva	División medida	Multiplica. Incóg. Comp.	División Incóg. Ref.	División Incóg. Esc.	Multiplic.	División	Total
1º	36%	19%	26%	0%	0%	0%	0%	0%	**10%**
2º	50%	20%	30%	7%	9%	0%	0%	0%	**14%**
3º	72%	68%	55%	51%	15%	15%	17%	15%	**39%**
4º	81%	89%	87%	72%	43%	21%	21%	26%	**55%**
5º	87%	98%	77%	92%	65%	23%	19%	31%	**62%**
6º	93%	100%	95%	88%	61%	49%	24%	34%	**68%**

Figura 2.13: Porcentaje de éxito en la resolución aritmética de problemas multiplicativos de una etapa (Ivars y Fernández, 2016, p. 26).

Con los datos de porcentaje de éxito obtenidos, estos autores propusieron 5 niveles de dificultad (de menor a mayor dificultad) para los problemas multiplicativos de una etapa. En el nivel 1, y por tanto con un menor nivel de dificultad, estarían los problemas de isomorfismo de medidas multiplicativos y de división partitiva que, en alumnos de 9 años, empiezan a alcanzar porcentajes de éxito superiores al 70%. En el nivel 2, estarían los problemas de isomorfismos de medida de división cuotitiva y los de comparación con la incógnita en la cantidad comparada, alcanzando porcentajes superiores al 50% en alumnos de 9 años, y superiores al 70% u 80% respectivamente, en alumnos de 10 años. En el nivel 3, estarían los problemas de comparación con la incógnita en el referente, con un porcentaje de éxito del 43% en alumnos de 10 años, y un 65% en alumnos de 11 años. En el nivel 4, estarían los problemas de comparación con la incógnita en la comparación, que tiene un porcentaje de éxito superior al 20% en alumnos de 10 y 11 años, y aparecen los problemas de producto de medidas en los que hay que realizar una división con un porcentaje de éxito ligeramente superior al 30% en alumnos de 11 y 12 años. Por último, en el nivel 5, los problemas de producto de medidas en los que hay que realizar una multiplicación y que alcanzan porcentajes cercanos al 20% en alumnos de 11 y 12 años, y que por tanto, son los más difíciles de resolver para los alumnos de educación primaria. Estos resultados confirman los obtenidos en estudios anteriores como el realizado por Vergnaud (1983) donde se concluyó que los problemas de producto de medidas eran más difíciles que los de isomorfismo de medidas. De igual modo, Mulligan y Mitchelmore (1997) en un estudio longitudinal desarrollado durante dos años en segundo y tercer grado observaron que, los problemas de comparación eran más difíciles que los problemas de isomorfismo de medidas (problemas de razón para los autores) y que los más difíciles para los alumnos eran los problemas de producto de medidas (producto cartesiano para los autores).

Diversos trabajos han analizado la dificultad de los problemas verbales multiplicativos atendiendo a otros criterios. Así, Nunes et al., (2003) muestran que cuando los alumnos resuelven problemas de producto de medidas, tienen más dificultades con las preguntas en las que se pide la relación inversa a la proporcionada por el enunciado si las cantidades son intensivas que cuando son extensivas. Por otra parte, Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) indican que el tipo de número usado en el problema también puede ser un motivo de dificultad. Cuando se plantean problemas equivalentes de multiplicación en los que los datos del enunciado son números decimales, los estudiantes muestran una mayor dificultad que cuando los datos son números enteros. En este caso, los estudiantes tienden a pensar que la multiplicación siempre da como resultado un número más grande. De igual manera apuntan que la familiaridad del vocabulario que aparece en el enunciado puede ser una característica a tener en cuenta a la hora de proponer problemas aritméticos verbales a ciertas edades.

Con respecto a la división, los problemas donde el dividendo es más pequeño que el divisor son más difíciles para los alumnos sobre todo más jóvenes. Ante estas situaciones, la mayoría de las actuaciones, consisten en invertir los papeles de los operandos dentro de la división. También remarcan que los problemas de división cuotitiva son más difíciles que los de división partitiva, excepto en los casos donde se utilizan números decimales en los que parece que al alumno se le rompe el esquema de división partitiva y les resulta más difícil. Neuman (1999) señala que los alumnos utilizan indistintamente el concepto de división para referirse tanto a la división partitiva como cuotitiva, y es por ello que se debería dedicar tiempo a introducir la división desde los dos puntos de vista. Este último hecho también es apuntado por Fischbein et al. (1985). Esta predilección por un determinado tipo de división se refleja en el estudio de Kinda (2013) donde se muestra que los alumnos de primaria prefieren generar contextos donde aparece la división partitiva frente a problemas donde aparece la división coutitiva. Sin embargo, Kouba (1989) presentó seis problemas multiplicativos con diferente estructura semántica (dos de multiplicación y cuatro de división) a 128 estudiantes de primer, segundo y tercer grado, clasificando las diferentes estrategias utilizadas para resolverlos. Esas estrategias indicaban la existencia de un modelo intuitivo de dos pasos para la multiplicación, donde los alumnos creaban conjuntos equivalentes para posteriormente verlo todo como un único conjunto; dos modelos intuitivos comunes para la división partitiva y división cuotitiva, asociadas a la operación de resta en el que al dividendo le iban eliminando sucesivamente grupos equivalentes hasta su eliminación (resta repetida) o a la acumulación repetida en el conteo doble y contando por múltiplos; y un tercer modelo para la división partitiva. Estos modelos coinciden con los encontrados por Mulligan (1992).

2.5. CATEGORIZACIÓN SEMÁNTICA DE LOS PROBLEMAS MULTIETAPA.

Ha habido intentos de construir categorizaciones semánticas para los problemas multietapa. En concreto, para los problemas de dos etapas, investigaciones como Nesher (1991, 1999), Nesher y Hershkovitz (1994), Marchand y Bednarz (1999, 2000) y Nesher, Hershkovitz y Novotna (2003) fijan su atención en los esquemas que intervienen en los problemas de dos etapas como unión de dos esquemas simples. Sin embargo, lo hacen sin centrar la atención en estos esquemas simples. Por ello proponen tres tipos de esquemas para problemas de dos etapas: (1) esquema jerárquico, en el que el todo de un esquema es una parte en el otro esquema; (2) esquema compartir el todo, en el que los dos esquemas simples comparten un todo y; (3) esquema compartir una parte, en el que los dos esquemas comparten una parte.

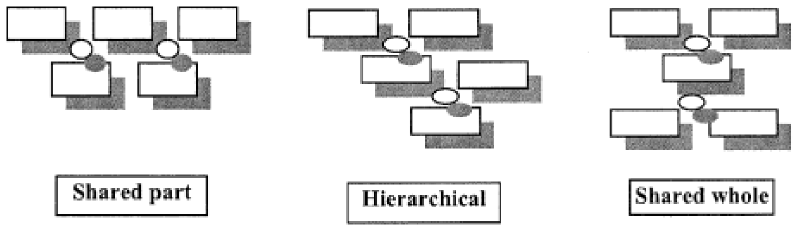


Figura 2.14: Tipos de esquemas en problemas de dos etapas (Hershkovitz y Nesher, 2003, p.11)

Estos esquemas generales pueden sufrir modificaciones dependiendo de la cantidad de nodos que compartan y si estos nodos son ya cantidades conocidas en el enunciado o cantidades intermedias que van apareciendo (Frías y Castro, 2007). En su investigación, estos autores observan diferencias significativas de dificultad entre problemas de dos etapas con un solo nodo de unión respecto a los que tienen dos nodos compartidos y apuntan que el número de nodos es una variable a tener en cuenta a la hora de la resolución de un problema multietapa pues incrementa su dificultad (Castro y Frías, 2013).

No obstante, como apuntan Puig y Cerdán (1988), una clasificación de los problemas multietapa en función de los esquemas que constituyen su estructura matemática, no sería viable por la cantidad de combinaciones diferentes que se pueden conseguir. Además, los mismos autores afirman que un problema multietapa no puede considerarse como una suma de problemas de una etapa. Esto es así porque cuando un estudiante resuelve problemas multietapa se enfrenta a situaciones que no aparecen en los problemas de una etapa. Principalmente, este elemento diferenciador lo encontramos en la presencia de cantidades desconocidas intermedias que hay que ir calculando para llegar hasta la incógnita del problema. Como consecuencia, y dejando de lado las dificultades de los estudiantes a la hora de resolver operaciones aritméticas, cuando se resuelven problemas multietapa, el estudiante debe ser capaz de identificar relaciones entre cantidades y ordenarlas en una secuencia adecuada que le lleve hasta la solución. En un problema de una etapa el resolutor tiene un criterio para determinar si el único esquema conceptual sobre el que articulará la determinación de la relación es válido. El criterio será que todas las cantidades que participen en él, excepto una, sean cantidades conocidas en la situación descrita en el enunciado. Una vez evocado el esquema necesario, estas cantidades y el esquema conceptual correspondiente se materializan en una operación matemática entre cantidades conocidas. Sin embargo, en la resolución de los problemas multietapa, el resolutor debe utilizar esquemas conceptuales sin que se cumpla el criterio de contener una única cantidad desconocida.

La argumentación anterior soporta la idea de que un problema multietapa no puede verse como una colección de problemas de una etapa enlazados. No obstante, sí que podemos convenir que, en la construcción del modelo de problema, el resolutor deberá transformar el enunciado inicial en nuevos subenunciados en los que se hagan explícitas las cantidades que deben intervenir en cada relación y en los que se apunte de manera implícita la manera en que deben relacionarse esas cantidades para lograr su materialización en una operación aritmética. Es decir, en cada acción, el resolutor intentará aplicar un esquema conceptual.

La resolución de problemas verbales multietapa puede ser descrita mediante lo que Puig (1996) llamaría un método de resolución con contenido heurístico, pues el método pretende proporcionar un plan de resolución general para la resolución aritmética. A este método de resolución se le conoce con el nombre de método de análisis y síntesis (Kalmykova, 1975; Puig y Cerdán, 1988). Los términos análisis y síntesis vienen de la Grecia clásica y significan "aflojar o soltar" y "reunir o juntar" respectivamente (Ritchey, 1991). Estos términos aparecen en numerosas disciplinas científicas y su significado es adaptado a cada una de ellas. En general, el análisis es definido como el procedimiento por el que "rompemos" un todo en partes o diferentes componentes, mientras que la síntesis es definida como el proceso opuesto en el que combinamos elementos separados o componentes para formar un todo coherente y con sentido.

Son los estudios soviéticos de la década de los años 40 y 50 los que apuestan por el uso de los métodos de análisis y síntesis como métodos de instrucción en la resolución aritmética de problemas verbales. Kalmykova (1975) realiza un profundo repaso a distintas investigaciones que abogan por el uso de los métodos de análisis o síntesis para la rotura del problema en diferentes partes, así como el uso del método de análisis-síntesis para la resolución aritmética de problemas multietapa. Esta autora apunta que el análisis y la síntesis componen el núcleo fundamental de la base psicológica de la actividad mental. El análisis empieza con la descomposición del enunciado del problema en nuevos enunciados partiendo de la incógnita o incógnitas del problema. Este proceso se mantiene hasta que ya no existen cantidades desconocidas desde las que desencadenar nuevos análisis. El resultado final es una estructura de relaciones entre cantidades desde la que se organizará la síntesis que nos llevará desde los datos conocidos hasta la incógnita del problema. Es decir, comparando los dos procesos, los podemos considerar como contrarios, pues el análisis empezaría preguntándose por la cantidad desconocida y finalizaría cuando se llegara a que todas las cantidades desconocidas dependen directa o indirectamente de conocidas, mientras que en la síntesis partiríamos de las cantidades conocidas y llegaríamos a la incógnita del problema.

En Kalmykova (1975) se realiza también una revisión bibliográfica en las investigaciones soviéticas sobre las ventajas y desventajas en la aplicación de estos dos métodos cuando los alumnos "rompen" el enunciado de problemas verbales multietapa resueltos aritméticamente (Tabla 2.11).

Tabla 2.11.

Ventajas y desventajas de la aplicación de los métodos de análisis y síntesis (Kalmykova, 1975).

ANÁLISIS		**SÍNTESIS**	
VENTAJAS	***DESVENTAJAS***	***VENTAJAS***	***DESVENTAJAS***
- Desarrolla el pensamiento lógico y es útil. - Se distingue por su rigor. - Es un método secuencial que se mueve hacia un objetivo definido. - Prepara para la vida práctica.	- Es difícil e incomprensible para muchos alumnos. - Es demasiado abstracto, fatigoso y artificial. - Una gran cadena de conclusiones es necesaria, lo que obstaculiza a los alumnos a pensar independientemente.	- Se puede aplicar tanto si conoces como si no conoces la solución del problema. - Es más fácil que el análisis. - Se puede introducir en alumnos muy jóvenes.	- No desarrolla el pensamiento lógico. - Actúa aisladamente interfiriendo en el proceso de pensamiento.

En Puig y Cerdán (1988) se definen los procesos de análisis y síntesis de la siguiente forma:

> El camino que lleva desde la incógnita a los datos, estableciendo progresivamente sus relaciones mutuas, fue llamado por los griegos *Análisis*, y proporciona el plan de solución del problema.
>
> El camino contrario, que va desde los datos hasta la incógnita, fue llamado *Síntesis*. Por tanto, cuando el análisis ha proporcionado el plan de solución de un problema, la síntesis ejecuta el plan, obteniendo la solución del problema. (Puig y Cerdán, 1988, pp. 142-143)

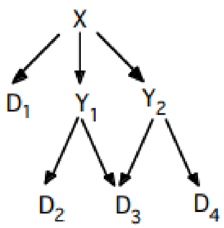
Y a partir de lo anterior, proponen un método de resolución con contenido heurístico al que llaman método de análisis-síntesis:

> Si x es la incógnita del problema, supóngala conocida.
>
> Indague e investigue cuáles son aquellos antecedentes de los cuales x resulta y que permiten determinar x.
>
> Considere cada uno de estos antecedentes como una nueva incógnita (auxiliar).
>
> Indague e investigue de nuevo, iterando el proceso, hasta que
>
> 1) o bien todos los antecedentes sean datos del problema,
>
> 2) o bien alguno de los antecedentes entre en contradicción con los datos del problema.
>
> En el caso 1), volviendo sobre sus pasos y trabajando hacia atrás, esto es, desde los datos hasta la incógnita, podrá determinar esta última.

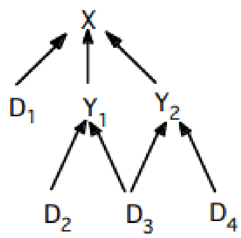
En el caso 2), abandone el problema: su solución es imposible.

(Puig y Cerdán, 1988, p. 142)

A modo de ejemplo, el funcionamiento de esta regla al resolverse un problema multietapa puede verse expresadas en la Figura 2.15, donde *x* representa a la incógnita del problema, D_1, D_2, D_3 y D_4 son los datos conocidos del problema e Y_1, Y_2 son incógnitas intermedias que van apareciendo en el curso del análisis (Puig y Cerdán, 1988, p. 146).



Análisis



Síntesis

Figura 2.15: Ilustración del proceso de análisis y síntesis para un problema verbal hipotético

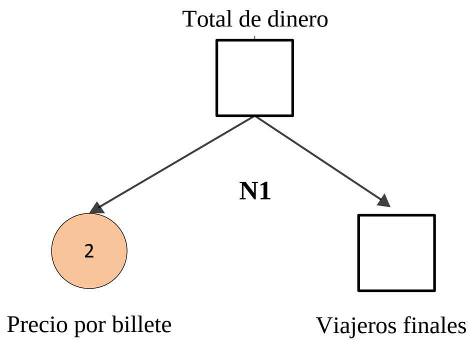
El algoritmo propuesto en Puig y Cerdán (1988) supondría realizar un análisis completo previo a la síntesis. No obstante, autores como Bogolyubov (1972a) sostienen que la utilización del método de análisis-síntesis completo plantea muchas dificultades a los estudiantes de primaria. Como consecuencia, aboga por un método en el que se lleven a cabo procesos parciales analítico-sintéticos. .

El proceso analítico-síntetico que un resolutor realiza cuando resuelve un problema lo podemos representar gráficamente en los que llamaremos diagramas de análisis y síntesis (Puig y Cerdán, 1988). En el diagrama de análisis indicaremos las diferentes relaciones entre cantidades y el orden o momento en que deberían aparecer, como máximo, en el proceso de análisis. A cada uno de estos momentos los hemos denominado niveles del proceso de análisis y los hemos denotado con un número que indica el nivel de profundidad en el que aparece la relación con respecto a la relación que determina la incógnita del problema (el nivel 1, N1).

Veamos un ejemplo de aplicación del método de análisis-síntesis a un problema verbal multietapa resuelto aritméticamente:

En un autobús viajan 20 personas. Tras apearse 7 personas en una parada el autobús sufre una avería. Al no poder continuar, el conductor debe devolver el coste del billete a cada pasajero. Si el precio de cada billete son 2 euros, ¿cuánto dinero debe devolver?

En el primer nivel del proceso de análisis (N1) nos preguntaríamos como podríamos averiguar la cantidad total de dinero que tiene que devolver el conductor (la cantidad por la que se preguntaba en el enunciado). La respuesta sería que esa cantidad se puede calcular a partir del dinero que vale cada billete, una cantidad conocida, y los viajeros que todavía están en el autobús, una cantidad desconocida (Figura 2.16)



1. La incógnita del problema podría calcularse a partir de:

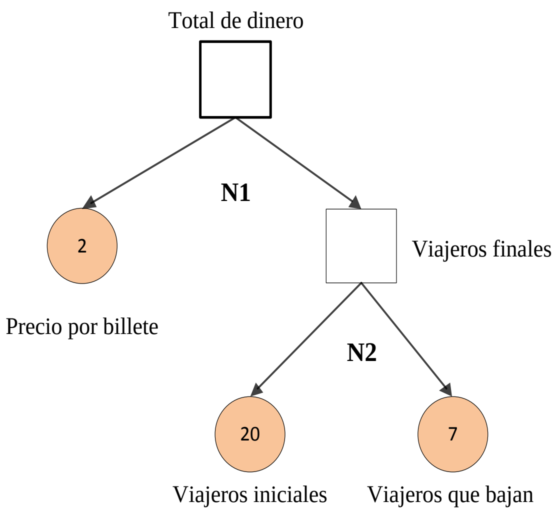
   a) Precio por billete.
   b) Viajeros finales.

2. Pero viajeros finales es desconocida.

3. El análisis continúa

Figura 2.16: Nivel 1 en el proceso de ANÁLISIS

Como consecuencia, el proceso de análisis debe continuar en un segundo nivel de análisis (N2). En este segundo nivel, nuestro objetivo sería averiguar el número de viajeros presentes en el autobús cuando se avería. Esta cantidad desconocida había aparecido al llevar a cabo el análisis en N1. Para hallarla necesitaremos conocer la cantidad de viajeros iniciales que había en el autobús y los viajeros que han bajado en la parada (Figura 2.17). Como ya no existen cantidades desconocidas desde las que desencadenar razonamientos como los anteriores, se da por finalizado el proceso de análisis.



1. Los viajeros finales podrían calcularse a partir de:

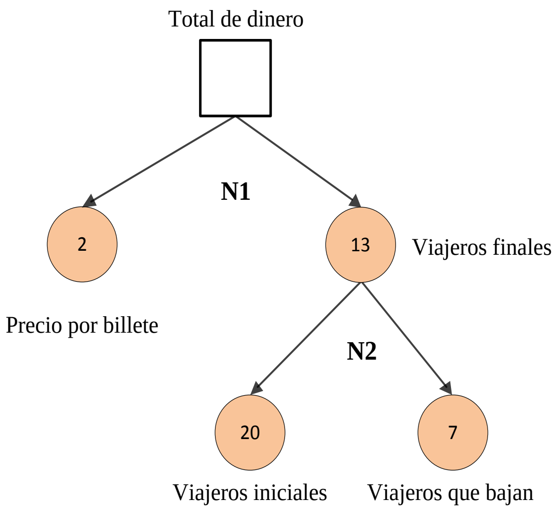
   a) Viajeros iniciales.
   b) Viajeros que bajan.

2. Ambas conocidas.

3. El análisis finaliza.

Figura 2.17: Nivel 2 en el proceso de ANÁLISIS

El proceso de síntesis consistirá en materializar mediante operaciones aritméticas las relaciones obtenidas en el proceso de análisis. El orden de las operaciones será el contrario al producido en el proceso de análisis, por lo que la primera cantidad que se determinará será el número de viajeros presentes en el autobús cuando se produce la avería (Figura 2.18).

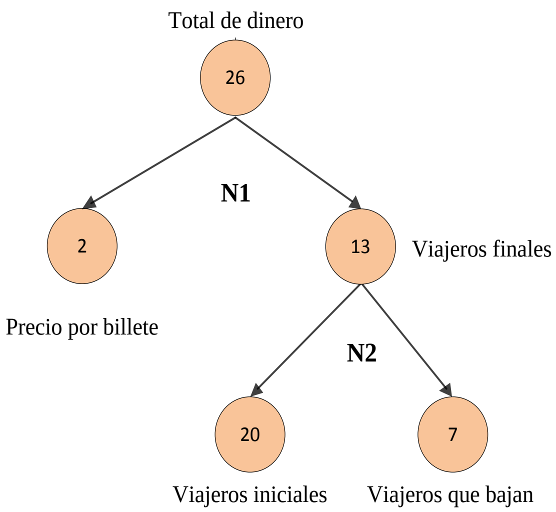


Deshacemos el camino recorrido en el análisis.

1. 20 – 7 = 13

Figura 2.18: Etapa 1 en la tarea de SÍNTESIS

A continuación, se razonará en N1 para determinar el dinero total que se debe abonar (Figura 2.19) y finalizar el proceso de síntesis y la resolución del problema.



Deshacemos el camino recorrido en el análisis.

1. 20 – 7 = 13
2. 2·13 = 26

Figura 2.19: Etapa 2 en la tarea de SÍNTESIS

En cualquier caso, podemos convenir que los procesos de análisis usados al resolver un problema multietapa, se apoyan sobre los mismos esquemas conceptuales que los que se emplean en los problemas de una etapa. De esta manera, partiremos de la hipótesis de que los esquemas conceptuales a los que debe recurrir el alumno son una condición necesaria para los procesos de análisis de cada una de las etapas. Siguiendo con el ejemplo anterior, en el N2 del proceso de análisis, la relación entre las cantidades “viajeros iniciales”, “viajeros que bajan” y “viajeros finales” sería el resultado de aplicar un esquema de cambio 2 en el que la cantidad inicial de viajeros del autobús (cantidad conocida) decrece (cantidad conocida) para obtener la cantidad final de viajeros que quedan en el autobús (cantidad desconocida). En el N1 del proceso de análisis, la relación entre las cantidades “total de dinero” (cantidad desconocida), “dinero por billete” (cantidad conocida) y “viajeros finales” (cantidad conocida) sería el resultado de aplicar un esquema de isomorfismo de medidas 1 en el que, multiplicando los viajeros finales por el dinero por billete, obtendríamos el total de dinero que tendría que devolver el conductor del autobús.

En resumen, el proceso de análisis completo del problema ha exigido al resolutor aplicar de manera combinada los esquemas de cambio 2 e isomorfismo de medida 1. Así, podríamos decir que, en una clasificación atendiendo a su estructura semántica, este problema verbal podríamos categorizarlo como isomorfismo-cambio y en la organización de la estructura matemática lo clasificaríamos como jerárquico.

2.6. DIFERENTES ENTRAMADOS DE RELACIONES ENTRE CANTIDADES PARA UN MISMO PROBLEMA VERBAL MULTIETAPA.

A diferencia de los problemas de una etapa, los problemas multietapa pueden asociarse a distinto entramados de relaciones entre cantidades. Estos diferentes entramados de relaciones exigirán diferentes secuencias de operaciones y/o el recurso a diferentes esquemas conceptuales para desencadenar los procesos analíticos. Veamos un ejemplo de un problema verbal multietapa con dos posibles líneas de resolución:

En un prado hay 3 vacas y 2 caballos, ¿Cuántas patas tenemos en total?

En cualquier línea de resolución, el procedimiento de análisis se iniciaría preguntándonos cómo averiguar el número de total de patas. Sin embargo, para responder a esta cuestión podríamos recurrir a dos relaciones basadas en esquemas conceptuales distintos. En una se sumarían el total de patas de las vacas y el total de patas de los caballos (línea de resolución 1), mientras que en la otra se multiplicaría el número de patas de un cuadrúpedo por el número de cuadrúpedos (línea de resolución 2). En la línea de resolución 1, en el N2, deberíamos hallar las patas totales que tienen las vacas del prado, sabiendo que hay 3 vacas (cantidad conocida explícita) y cada vaca tiene 4 patas (cantidad conocida implícita). De la misma manera, para hallar las patas totales que tienen los caballos del prado, usaríamos que hay 2 caballos (cantidad conocida explícita) y que cada caballo tiene 4 patas (cantidad conocida implícita). Esto implicaría poner en juego un esquema de combinación 1 en N1 y dos de isomorfismo de medidas en N2. En la línea de resolución 2, en el N2, deberíamos hallar el número de cuadrúpedos apoyándonos en que tanto caballos (cantidad conocida explícita) como vacas (cantidad conocida explícita) están incluidos dentro de esta categoría. Esto implicaría poner en juego un esquema de isomorfismo de medidas 1 en N1 y un esquema de combinación 1 en N2.

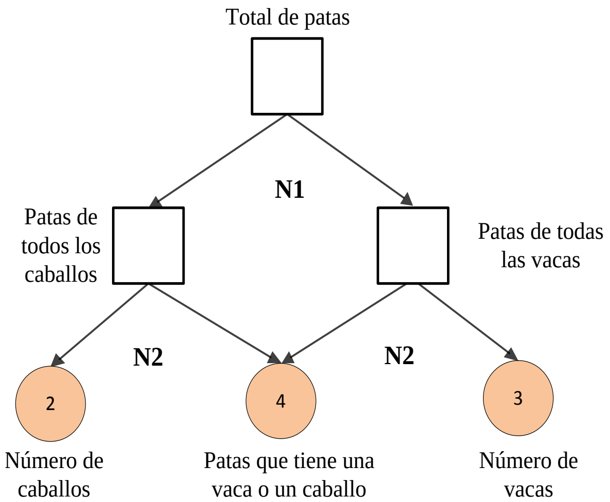


Figura 2.20: Lectura 1 del problema *Las Patas*

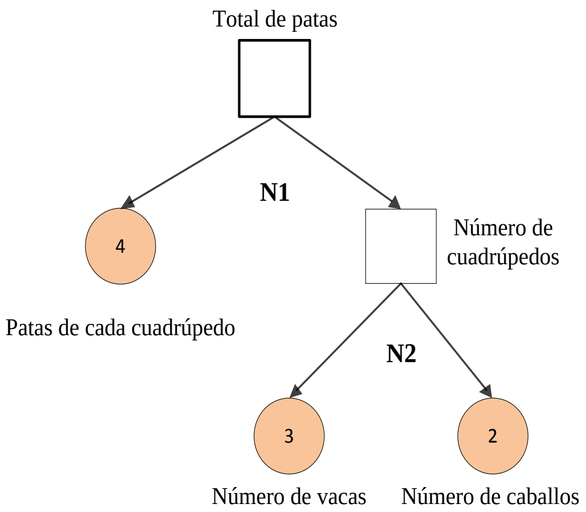
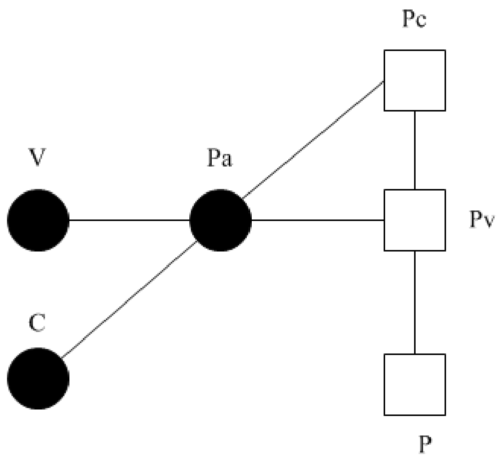


Figura 2.21: Lectura 2 del problema *Las Patas*

En este caso, las dos líneas de resolución no coincidirían en el número de etapas, pero sí en el nivel de profundidad. Es por esto, que a un mismo problema multietapa no podemos asociarle necesariamente un único entramado de relaciones entre cantidades, sino que tendremos que contemplar todos los entramados de relaciones correctos que permiten resolver aritméticamente un problema verbal multietapa. A cada uno de estos diferentes entramados de relaciones correctos, los llamaremos lecturas analíticas del problema y los denotaremos como L1, L2... Para describir cada una de estas lecturas analíticas, hemos recurrido a unos diagramas con forma de hipergrafo que hemos incorporado de las investigaciones realizadas por Fridman (1990) y Cerdán (2008). En el hipergrafo, las cantidades se representan mediante los vértices y las hiperaristas[6] representan a cada una de las relaciones entre cantidades que pertenece al entramado. Para diferenciar las cantidades conocidas de las desconocidas asociaremos vértices circulares oscuros para las cantidades conocidas y vértices cuadrangulares claros para las cantidades desconocidas. Además, las aristas podrán tener un número cualquiera de vértices, pero en la resolución aritmética de los problemas multietapa que se proponen a los estudiantes en esta investigación, lo más habitual será encontrar aristas de tres vértices (para las relaciones ternarias aditivas y multiplicativas entre cantidades) y aristas de cuatro vértices (para las relaciones de proporcionalidad).

Vamos a representar los dos grafos correspondientes a las dos lecturas analíticas del problema de las vacas y caballos analizado anteriormente.



V = Número de vacas.

C = Número de caballos.

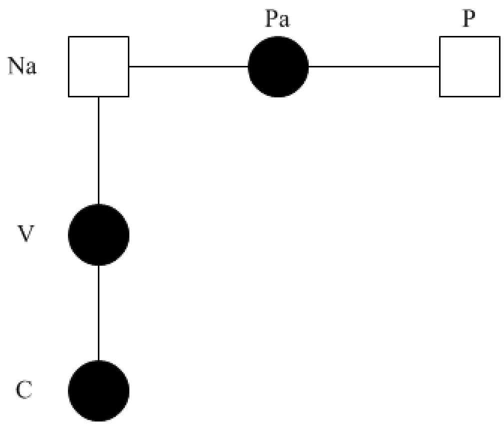
Pa = Patas de cada animal.

Pc = Patas de todos los caballos.

Pv = Patas de todas las vacas.

P = Patas totales.

Figura 2.22: Grafo correspondiente a la Lectura 1 del problema *Las Patas.*



V = Número de vacas.

C = Número de caballos.

Na = Número de animales.

Pa = Patas de cada animal.

P = Patas totales.

Figura 2.23: Grafo correspondiente a la Lectura 2 del problema *Las Patas.*

2.7. LOS SISTEMAS TUTORIALES INTELIGENTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES ARITMÉTICOS.

[6] En este documento utilizaremos el término arista para referirnos a las hiperaristas del grafo.

El propósito de utilizar herramientas informáticas surge en la década de los 50 allanando el camino para las verdaderas máquinas inteligentes (Shute y Psotka, 1994). Básicamente estos ordenadores consistían en un procesador numérico central cuyo mecanismo era electrónico basado en un sistema binario. Además, se caracterizaban por tener la capacidad incorporada de tomar decisiones lógicas y un dispositivo para facilitar el almacenamiento y la manipulación de datos. En aquella época, Alan Turing describió un sistema de computación capaz, no solo del cálculo de números, sino de manipulación simbólica y desarrollo conocido como el "Test de Turing" y que tiene particular relevancia con los ITS (Shute and Psotka, 1994).

Los sistemas de enseñanza desarrollados antes de la aparición de los primeros ITS´s se conocen con el nombre de Computer Assisted Instruction (CAI). Según Urretavizcaya (2001) sus principales características eran: a) cursos muy extensos; b) la comunicación entre tutor y alumno no era muy refinada; c) los sistemas de enseñanza reaccionan según modelos establecidos; d) el diseño e implementación de los sistemas están hechos a medida: y e) el conocimiento que incluye no se ve modificado en el tiempo. La Figura 2.24 nos muestra el flujo de acciones en un CAI.

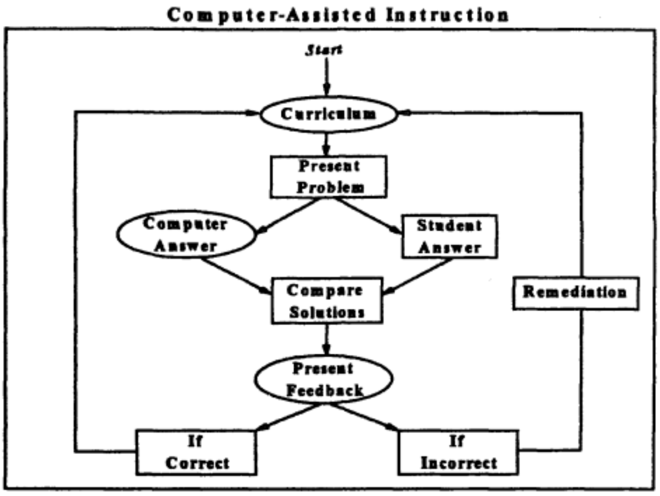


Figura 2.24: Flujo de acciones en un CAI (Shute and Psotka, 1994, p. 4)

El CAI presentaba material que tenía que ser aprendido junto a una colección de problemas predefinidos. La respuesta del estudiante era comparada con la respuesta correcta prealmacenada. Si esta era correcta, pasaba a otra problema. Si era incorrecta, el programa rescataba algún problema clasificado como más fácil dentro de la base de material original que se tenía. Una evolución de los CAI´s fueron los ICAI´s (Intelligent Computer-Assisted Instruction). En el diseño de los ICAI's se pretendía incluir rutinas en las que se utilizara un conocimiento específico del dominio y se abandonaba el diseño "libre de conocimiento" de los CAI's (Shute y Psotka, 1994). De esta manera, se conseguía que pudiesen responder de manera específica a las estrategias que utilizaban los estudiantes en la resolución de problemas (Anderson, Boyle y Reiser, 1985). Según Urretavizcaya (2001), los ITS's que surgen con la evolución de los ICAI´s, presentan las siguientes características: " a) el conocimiento del dominio está acotado; b) poseen conocimiento del estudiante que les permite dirigir y adaptar la enseñanza; c) la secuencia de enseñanza no está predeterminada por el diseñador, d) los diagnósticos más adaptados al estudiante y e) la comunicación tutor-alumno mejora" (p. 7). Por tanto, los ITS´s se caracterizan por separar la materia que se enseña (modelo del dominio) y las estrategias para enseñar esa materia (modelo pedagógico) caracterizando a cada estudiante individualmente según sus características propias (modelo del estudiante). Efectivamente, proporcionar un correcto progreso es señalado como uno de los factores que diferencia la tutorización humana de los ITS´s (VanLehn, 2011).

En Nwana (1990), se define un ITS como los programas informáticos que son diseñados para incorporar técnicas del campo de la inteligencia artificial y que saben lo que enseñan, a quién lo enseñan y como lo enseñan, es decir, son intentos de producir en un ordenador comportamientos comparables con el del ser humano. Para Freedman, Ali y Mc Roy (2000) se refiere a algún programa informático que puede ser usado en la enseñanza y que posee inteligencia. Para estos autores, el modelo tradicional de ITS tiene cuatro componentes: a) el modelo de dominio (qué enseñar), b) el modelo de estudiante (a quien enseñar), c) el modelo de enseñanza (como enseñar) y d) la interfaz del usuario. El modelo de dominio representa el conocimiento del contenido que el alumno está adquiriendo, siendo la base para la interpretación de las acciones de los estudiantes. Este modelo adquiere la forma de sistema experto que puede generar soluciones para los mismos problemas que el estudiante está resolviendo. El modelo de estudiante es un registro del conocimiento del estudiante. Se distinguen dos componentes en el modelo de estudiante: el primero es el dominio de lo que sería un estudiante experto que servirá como referencia para estimar cuánto ha aprendido el estudiante y segundo a la presencia de un catálogo de errores que incorporan indicaciones de si el estudiante ha adquirido el concepto erróneo. El modelo de enseñanza es el responsable de estructurar las intervenciones de la instrucción, bien mostrando una secuencia correcta en la resolución de un problema, bien dirigiendo paso a paso las distintas actuaciones de los estudiantes o interviniendo cuando el estudiante comete errores o se encuentra estancado en el proceso. La interfaz del usuario es el componente que permite interactuar al tutor con el usuario y que en su diseño en el entorno de resolución de problemas debería cumplir dos principios básicos: a) debería aproximarse al entorno de la resolución de problemas en contextos reales y b) debería facilitar el proceso de aprendizaje en los estudiantes.

2.7.1 UNA REVISIÓN DE ENTORNOS INFORMÁTICOS PARA LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DE PROBLEMAS VERBALES

Ha habido algunos intentos para la construcción de entornos informáticos que pretendían facilitar el aprendizaje de la resolución artimética de problemas verbales. Algunos ejemplos son HERON (Reusser, 1993), Story Problem Solver (Marshall, 1995), WORDMATH (Looi y Tan, 1996), MathCAL (Chang et al, 2006) y AnimalWatch (Beal et al, 2010).

El programa HERON (Reusser, 1993) fue un entorno informático diseñado para apoyar a los estudiantes en el aprendizaje de la resolución aritmética de problemas matemáticos verbales complejos. El autor parte de que la matematización de un problema requiere transformar paso a paso el enunciado del problema en una estructura matemática. Para ello recurre a representaciones auxiliares con la intención de que medien en este proceso de transformación. HERON usa un formato gráfico llamado planificación en árbol que sería comparable a los diagramas de análisis-síntesis (Kalmykova, 1975; Puig y Cerdán, 1988). Cada bloque del árbol es una caja que contiene tres campos de información: un campo para el valor numérico el cual puede ser desconocido, un campo para la unidad de medida y un campo para anotar alguna información o nombre sobre la cantidad. Para resolver el problema, el estudiante crea uno de estos bloques e introduce las unidades de medida de una cantidad y un nombre, que puede ser elegido de una lista desplegable. Después de crear una representación para aquellas cantidades conocidas que considere oportuno, el estudiante puede conectarlas para crear un diagrama en árbol. Una vez se han conectado dos cantidades conocidas correctamente el sistema le preguntará con qué operación aritmética se van a relacionar y creará otro bloque vacío donde el estudiante podrá introducir la información y la unidad de medida de la nueva cantidad hallada.

El sistema tiene dos versiones: una para principiantes y otra para estudiantes ya iniciados. Las versiones se diferencian en los distintos tipos de instrucción proporcionadas en cada caso. Los estudiantes principiantes reciben notificaciones de error si seleccionan alguna cantidad que no es relevante o se olvidan de seleccionar alguna relevante. Sin embargo, en el modo experto, los estudiantes tienen libertad para construir la estructura de árbol que consideran como solución. Además, cuando los estudiantes se encuentran con algún obstáculo, pueden pedir ayuda al sistema en cualquier momento, obteniendo información según la etapa en la que se encuentre de resolución. En la primera etapa, las ayudas se basan principalmente en la explicación del significado de algunas palabras que aparecen en el enunciado o sobre la relación que deben tener ciertas partes del enunciado que tienen que ser consideradas conjuntamente. Si la ayuda tiene que ver con la construcción de la estructura de árbol, el tutor proporciona ayuda sobre el funcionamiento de la herramienta. Puede proporcionar indicaciones sobre la acción que debemos realizar a continuación o finalmente, poder indicar cuál es la operación que hay que realizar para contestar correctamente al problema. Todo esto es posible ya que el tutor conoce perfectamente las relaciones que hay entre las cantidades, sus unidades de medida y la descripción correcta para cada cantidad. Todo esto permite al sistema ir exponiendo todo el proceso de resolución ofreciendo cuatro tipos de errores que se pueden cometer: a) elección errónea de la operación que conecta dos cantidades relacionadas; b) asignación de nombre incorrecto a una determinada cantidad; c) elección errónea de unidad de medida para una cantidad; e d) inclusión errónea u omisión de relaciones en la estructura de árbol.

Otro sistema tutorial diseñado para la enseñanza de la resolución aritmética de los problemas es Story Problem Solver (SPS) (Marshall, 1995). El primer objetivo del SPS era conseguir que los estudiantes asociaran unos esquemas de acción a cinco categorías semánticas: cambio, agrupación, comparación, reiteración y variación o transformación.

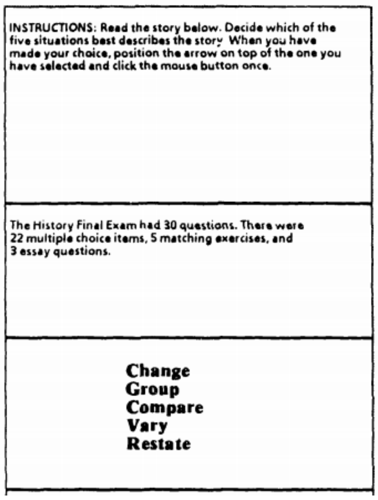


Figura 2.25: Tarea inicial en la que los estudiantes son preguntados por su estructura semántica (Marshall, 1988, p. 20).

Con el objetivo de mejorar el SPS, Derry (2001) diseñó el sistema tutorial TiPS (Tutorial in Problem Solving). Siguiendo el modelo de SPS, TiPS tiene asociado una serie de lecciones con el objetivo de que los estudiantes aprendan las cinco estructuras semánticas citadas anteriormente, analizándolas y resolviendo problemas asociados a ellas. El sistema proporciona lecciones básicas y lecciones avanzadas. En las primeras hay una unidad de instrucción para cada estructura semántica excepto para la de modificación que tiene cuatro, mientras que las avanzadas están formadas por dos lecciones. En la primera, se presenta una mezcla de problemas de una etapa en las que aparecen las cinco estructuras semánticas y en el que los alumnos tienen que discriminar los distintos tipos de problemas. En la segunda, se incluyen problemas multietapa mucho más complejos y que mezclan las estructuras. Dentro de estas lecciones, se incluyen una serie de tutoriales en video donde los estudiantes pueden escuchar y seguir diferentes ejemplos resueltos y explicados por el tutor. En cada lección, al estudiante se le proporcionan sugerencias y ayudas procedentes de la componente de evaluación local de TiPS, entendiendo como local, el diagnóstico preciso y las posibles sugerencias y ayudas que el tutor puede aportar en un determinado tipo de problema y también, un componente de evaluación global, donde se va creando un modelo de comportamiento del estudiante a medida que va resolviendo problemas a través de las diferentes lecciones. El núcleo de este tipo de evaluación es un modelo bayesiano o de creencias que permite adaptar la tutorización a cada estudiante. Es decir, dada una serie de actuaciones, el sistema determina la probabilidad de que el estudiante necesite ayuda. Atkinson (2003) realizó una evaluación cualitativa y cuantitativa de estas dos componentes de evaluación intentando comprobar la efectividad del modelo bayesiano de TiPS. Cualitativamente señala un funcionamiento correcto del sistema ya que para alumnos que tienen un alto nivel de competencia en la resolución de los problemas, el número propuesto de problemas disminuye y el sistema es capaz de discriminar problemas que considera no necesarios para un nivel de competencia alto. Mientras, para los alumnos que demuestran un bajo o nulo nivel de competencia en la resolución de problemas, el número de problemas propuestos se acerca más al total de problemas que puede proporcionar el sistema. Los estudiantes que sí que obtuvieron la solución correcta, pero sus respuestas difirieron de la solución en TiPS, fueron reconocidos como alumnos expertos reduciendo el número de problemas proporcionados, pero fueron a veces penalizados en la puntuación. Los alumnos que resolvieron los problemas correctamente, pero habían hecho uso de un excesivo número de ayudas fueron erróneamente catalogados como alumnos con competencia alta y no se vio reflejado en el modelo bayesiano.

WORDMATH (Looi y Tan, 1996) es un entorno informático para el aprendizaje de la resolución de problemas verbales utilizando el modelo llamado de construcción. Este modelo se basa en dibujar bloques para representar las relaciones parte-todo que vienen en el enunciado de los problemas y mediante los que es posible desencadenar un análisis de la situación descrita. La ventaja de utilizar estos modelos de representación es que se pueden trabajar problemas relacionados con fracciones, proporciones y porcentajes. Este tutor difiere de otros tutores como TiPS ya que va destinado a que lo usen estudiantes de edades menores. El modelo de construcción utilizado por WORDMATH, es considerado más fácil y primitivo que el modelo de resolución aritmética de problemas verbales basado en la aplicación de esquemas semánticos utilizados, por ejemplo, por TiPS.

MathCAL (Chang et al, 2006) es un sistema que base su potencial en el recurso a las cuatro fases de Polya (1945): (1) entender el problema; (2) trazar un plan; (3) ejecutar el plan y; (4) revisar la solución. El sistema, además, articula la resolución mediante un diagrama de árbol de manera similar a como se emplea en HERON. Para proporcionar ayuda en la primera fase, entender el problema, el sistema permite subrayar aquello que se considera importante del enunciado. Para la segunda fase, trazar un plan, el sistema proporciona al estudiante una serie de preguntas que le conducen a decidir en qué orden quiere averiguar las cantidades desconocidas. Una vez el estudiante haya seleccionado el orden de los pasos y pulsado el botón “Finish”, el sistema comparará la solución del estudiante con la que tiene almacenada en la base de datos. En el caso de no coincidencia, proporciona alguna sugerencia en el espacio reservado para mensajes del sistema. Cuando los pasos elegidos son correctos, el sistema, dentro del tercer paso, permitirá ejecutar el plan, proporcionando una red de árbol ternaria para cada uno de los pasos que se ha decidido en el etapa anterior. Cuando el resolutor ha introducido todas las relaciones en cada una de las ternas que ha considerado, el STI combina todos esos esquemas en árbol y, es entonces, cuando el estudiante introducirá todas las cantidades conocidas del problema para calcular todas las desconocidas mientras recorre todo el esquema de relaciones ternarias creadas. En la última fase, revisar la solución, el resolutor introduce dentro de la pantalla de evaluación todas las cantidades y operaciones que ha utilizado y el sistema comprueba si todas las cantidades se han calculado correctamente. Para el estudio sobre el potencial de MathCAL como herramienta para la enseñanza se seleccionaron 49 estudiantes con nivel bajo en resolución de problemas. De estos, 25 fueron colocados en el grupo de control y 24 en el grupo experimental usando el STI. Como conclusión se observó que había una diferencia estadísticamente significativa en la mejora de la competencia del grupo experimental respecto al grupo de control.

AnimalWatch (Beal et al, 2010) es un ITS diseñado para tutorizar la resolución de problemas verbales que incluyen números enteros y fraccionarios y va dirigido a estudiantes de 9 a 12 años. En los problemas que se proponen, se plantean situaciones de la vida de especies de animales en peligro de extinción. Con esto se pretende presentar las matemáticas un contexto real donde se puede mostrar la importancia y utilidad que tiene su aprendizaje (Beal y Arroyo, 2002). Cada enunciado viene acompañado por una imagen y por otra información necesaria para resolver el problema en forma de, por ejemplo, tabla o gráfico. En la resolución de los problemas, esta información debe ser lo más precisa posible. Una de las habilidades del sistema es evaluar y adaptar su instrucción a cada estudiante , lo que supone una aceleración en el proceso de aprendizaje (Beal y Arroyo, 2002). La selección de los problemas está determinada principalmente por la información recogida en el modelo de estudiante y por su comparación con el modelo del dominio, lo que permite estimar qué es lo que conoce el estudiante de ese dominio matemático concreto. Esta información se va actualizando a la vez que el estudiante resuelve nuevos problemas. Si el estudiante comete un error en un determinado tipo de problema, el sistema podrá optar por distintas decisiones, en función de la información de que dispone. Así, puede proponer otro problema de una dificultad parecida o puede ofrecer uno más sencillo para comprobar si tiene asimilados los conocimientos previos o bien para incrementar su autoestima. Si, por el contrario, el estudiante resuelve un par de problemas correctamente, el sistema entenderá que está preparado para resolver problemas con otras operaciones matemáticas o problemas con un nivel de dificultad más elevado. De todas maneras, es necesario advertir que el tutor para determinar el nivel de competencia de un estudiante se basa solamente en el tiempo que tarda [7] y en los errores que comete. Cuando los estudiantes cometen errores, el AnimalWatch les proporciona ayudas en forma de sugerencias textuales para intentar llevar al estudiante por el buen camino. Estas sugerencias textuales están graduadas por nivel hasta el punto de que, si un estudiante no ha conseguido resolver el problema con las ayudas anteriores, en el último nivel de ayuda, el tutor le presenta la respuesta al problema. Es decir, el estudiante puede resolver correctamente siempre los problemas, solo varía la cantidad de ayudas que ha necesitado para resolverlo. Además, el estudiante puede comunicar al tutor que el problema que están resolviendo es demasiado difícil, lo que supone una herramienta muy útil para el modelo de instrucción (Beal, 2013). Los distintos niveles de ayuda del tutor, ofrecen la posibilidad de adaptar la instrucción a cada estudiante. En

[7] Respecto a este tema, los autores apuntan que este fenómeno puede darse también por las diferencias existentes entre la competencia en el manejo del teclado de unos alumnos a otros y no al solo hecho de tener menos competencia matemática en dar una respuesta u otra o el mero hecho de cometer un pequeño error informático que demore la introducción de una respuesta correcta.

muchas ocasiones, el primer nivel de ayuda es suficiente para corregir un error con frases como "Inténtalo otra vez" o "¿Estás seguro que estás intentando sumar?". Las ayudas más detalladas deben dejarse para cuando los estudiantes ya han cometido varios errores y tiene la intención de evitar que descienda su autoestima.

Este STI ha sido evaluado en un gran número de estudios empíricos (Beal, 2013). En unos primeros estudios en los que se evaluaba el tutor, los estudiantes mostraron mayor conocimiento de los contenidos matemáticos después de haber utilizado el sistema. El problema reside en que estos estudios no incluían pre y post-test en los que se pudieran comparar distintas habilidades matemáticas o comparar grupos donde se pudiese evaluar las distintas actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos. Beal et al (2010) realizaron tres estudios piloto para evaluar el STI. En el primer estudio trabajaron con estudiantes de sexto grado (N=25), elegidos por sus profesores siguiendo el criterio de la motivación e interés que tenían en la rama de ciencias. Para el estudio de las matemáticas fueron agrupados en pequeños grupos de cuatro a seis estudiantes. Estos trabajaban con un profesor todo el tiempo o repartían el tiempo para trabajar con un profesor y con el tutor AnimalWatch. En la primera semana los estudiantes realizaron el pretest. Posteriormente recibieron la instrucción diferenciada y en la última semana realizaron un posttest con problemas similares al pretest. Los resultados obtenidos fueron que ambos grupos mejoraron sus resultados, aunque los que utilizaron el STI mejoraron más que los otros. En el segundo estudio, se incrementó la muestra (N=149) y todos trabajaron al menos una sesión con el STI. Las conclusiones fueron que los alumnos que habían trabajado más sesiones con el tutor mejoraban más que los que habían trabajado menos sesiones, aunque todos mejoraban. En un tercer estudio, se realizó una comparación con tres grupos de alumnos de sexto grado. Dos de estos grupos trabajaron con el STI (N=37) y un tercer grupo sirvió como grupo de comparación (N=23). Siguiendo el mismo diseño experimental de pre y posttest, se observó que los estudiantes que no utilizaron el STI no mejoraron sus resultados y de los que utilizaron el tutor solo mejoraron aquellos alumnos con un nivel bajo de competencia matemática en el pretest. Se apunta en el estudio que eso puede ser debido a los distintos niveles de ayudas integradas en el STI.

Resumiendo, todas estas investigaciones apuntan a que el aprendizaje basado en entornos tecnológicos, puede beneficiar a los estudiantes que tienen problemas en las aulas ordinarias siguiendo un método tradicional y mejorar su competencia en la resolución de problemas, permitiendo la conexión entre su aprendizaje y sus actuaciones usando estrategias válidas y distintos niveles de ayuda cuando tienen dificultades. El uso de ayudas, tanto a demanda como automáticas, y la determinación de la cantidad de información que deben proporcionar, es uno de los factores clave en el diseño de sistemas dirigidos a la enseñanza. El dilema de la ayuda, tal y como lo plantean (Koedinger y Aleven, 2007), puede enunciarse de la siguiente manera: ¿cómo determinar la información que se debe dar o retener para conseguir un aprendizaje óptimo?. En un punto en el que el estudiante experimenta dificultad cuando se enfrenta a un problema, el hecho que el profesor no ofrezca una ayuda con información completa que permita al estudiante superar el paso, puede animarle a adoptar un papel más activo y contribuir a que desarrolle habilidades para la resolución de problemas. Sin embargo, la acción del profesor también puede tener un efecto negativo si el estudiante no se siente capaz de resolver el problema y decide abandonarlo.

No obstante, la inacción ante los errores de los estudiantes en situaciones de resolución de problemas, pueden llegar a confundirlos y desmoralizarlos. De hecho, muchos estudiantes no son capaces de identificar y corregir sus propios errores y, por tanto, no aprender de ellos (Nathan, 1990). Como apuntan Shute y Psotka (1994) “un estudiante que no ha conseguido la respuesta correcta al primer intento, puede ser que no lo consiga después, incluso, si recibe la misma instrucción o se le proponen problemas similares” (p. 5). Las ayudas permitirán desbloquear al estudiante y evitarán que no entre en un bucle en el que empiece a repetir los mismos errores (VanLehn, 1987). En el caso de la resolución algebraica de problemas verbales, en González-Calero (2014) y González-Calero et al. (2015), se presentan los resultados de un estudio con estudiantes de secundaria donde se compara el efecto del uso de ayudas a demanda progresivas e intensivas, que podrían proporcionar de manera explícita el paso a seguir, frente al uso de ayudas automáticas que, únicamente, indican la validez o no de la acción. Los resultados muestran que las ayudas intensivas produce mejores resultados en el aprendizaje. A partir de lo anterior González-Calero (2014) plantea la hipótesis de que el uso de ayudas intensivas puede ser especialmente útil cuando los estudiantes se enfrentan a tareas ante las que presentan muchas dificultades, pero que, posiblemente, este efecto no sería tan potente en el caso que los resolutores ya tuvieran una cierta experiencia.

Corbett, Koedinger y Anderson (1997) proponen una serie de condiciones para deben contener las ayudas tanto automáticas como a demanda: (1) el feedback debe ser proporcionado cuando la información que se va a proporcionar puede ser comunicada al estudiante; (2) el feedback no debería cambiar el propósito de la tarea; (3) el feedback no debería cambiar la actuación frente a la tarea y; (4) el feedback debería ser presentado tan pronto como sea posible. Como consecuencia, podemos identificar cuatro variables típicamente estudiadas por lo que respecta al dilema de la ayuda en los ITS orientados a la resolución de problemas: (1) la cantidad de información contenida en las ayudas, donde en un extremo se situaría la mera información de la validez de una acción y en el otro la explicitación del paso siguiente; (2) el tipo de información contenida en las ayudas, donde en un extremo estaría un mensaje genérico y en el otro un mensaje con contenido de la tarea; (3) la adecuación de las ayudas a las decisiones adoptadas por el resolutor; y (4) el momento en que se ofrece la ayuda, donde en un extremo se situaría la ayuda inmediata y en el otro la ayuda ofrecida al finalizar la tarea.

3. Material y métodos

3.1. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

Como ya se ha comentado en el capítulo 1, en la primera parte de la investigación se administró un primer test (cuestionario Pre) a los dos grupos. Este cuestionario estaba formado por 10 problemas verbales que los estudiantes de los dos grupos debían resolver de manera aritmética con lápiz y papel. El objetivo de este primer cuestionario era poder evaluar la competencia de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales de manera aritmética y verificar la distribución aleatoria de los estudiantes en ambos grupos, permitiendo que estos fueran comparables en la resolución aritmética de problemas verbales tras el desarrollo de la intervención. Una vez finalizado el cuestionario Pre, se analizaron las producciones escritas de los estudiantes de ambos grupos, codificando mediante una variable dicotómica, cada una de las etapas de las que constaba el problema. Esta codificación indicaba si la etapa en cuestión había sido resuelta correcta o incorrectamente. Las etapas no abordadas, se codificaron como incorrectas.

Para evitar errores de cálculo los alumnos disponían de una calculadora para resolver las operaciones aritméticas. Tras haber analizado el cuestionario Pre, se llevó a cabo una secuencia de enseñanza para cada uno de los grupos, formada por tres sesiones en la que los estudiantes resolvían aritméticamente 10 problemas verbales en cada sesión con la versión del tutor que le había sido asignada a su grupo. Como ya se ha comentado anteriormente, uno de los grupos utilizó la versión con ayudas en la resolución (Grupo CH) mientras que otro grupo utilizó la versión sin ayudas del ITS (Grupo SH). La duración de cada una de estas sesiones fue de 50 minutos. Una vez finalizadas las tres sesiones de la secuencia de enseñanza, los estudiantes de los dos grupos realizaron un cuestionario Post, también en lápiz y papel, compuesto por 10 problemas isomorfos a los del cuestionario Pre. Este cuestionario Post, que fue analizado siguiendo el mismo criterio que hemos descrito para el Pre, nos permitiría comparar los resultados de los alumnos tras la secuencia de enseñanza y conformar las parejas que posteriormente utilizaríamos en el estudio de casos. En este estudio de casos participaron 6 parejas (3 de cada grupo) en las que el criterio de emparejamiento principal estribó en la identificación de patrones de actuación similares en los problemas del cuestionario Post. En particular, se seleccionaron parejas que hubieran resuelto erróneamente los mismos problemas en el cuestionario Post y, en la medida de lo posible, que hubieran cometido los mismos errores. Por otro lado, se intentó buscar parejas que hubieran demostrado diferente nivel de competencia (baja, media, alta) en la resolución aritmética de problemas verbales. Si en algún caso no fue posible encontrar alguna pareja que cumpliera estos criterios, se intentó formar la pareja con estudiantes que hubieran tenido dificultades similares en la realización de los problemas del cuestionario Post o estudiantes que hubiesen tenido actuaciones de interés durante las etapas previas al estudio de casos.

Este capítulo se centra en explicar la planificación que se llevó a cabo dentro de las tres sesiones de la secuencia de enseñanza. La descripción de los criterios para el diseño de los cuestionarios Pre y Post se llevará a cabo en el capítulo 4, pues son la base sobre que se realizará el estudio de grupo. En esta sección, presentaremos también los recursos que utilizó el investigador en la secuencia de enseñanza, centrando la atención especialmente en el análisis de los problemas de cada una de las sesiones, en las distintas configuraciones de HINTS y en la forma en que se introdujo a los estudiantes en su funcionamiento.

Aunque es cierto que se utilizaron los mismos problemas para los dos grupos, hay que tener en cuenta que, al presentarse en versiones diferentes de un entorno de resolución, estas diferencias necesariamente condicionaron la organización de la secuencia de enseñanza y las actuaciones de los estudiantes.

3.2. LA POBLACIÓN

La población de esta investigación está formada por un grupo de 52 alumnos de quinto curso de Educación Primaria de un centro concertado de la Comunidad Valenciana. La población estaba integrada por 25 chicas y 27 chicos y todos los participantes tenían una edad comprendida entre 10 y 11 años. Estos alumnos se distribuían en dos grupos naturales, que se usaron para la distribución de los alumnos en dos grupos a efectos de esta investigación. El primero estaba formado por 26 estudiantes (11 chicas y 15 chicos) y el segundo por 26 estudiantes (14 chicas y 12 chicos).

La elección del curso respondió a nuestro propósito de trabajar con estudiantes previamente instruidos en la resolución aritmética de problemas verbales pero que aún no hubiesen alcanzado plena competencia en el campo de la resolución de problemas multietapa. La elección del grupo concreto no respondió a ningún motivo en particular más allá de que el perfil de la población se ajustaba a las necesidades de la investigación y que contábamos con la plena colaboración del centro y los tutores de los alumnos para proporcionarnos tanto el tiempo como los espacios necesarios para el correcto desarrollo del trabajo. El momento en el que se desarrolló la investigación fue en el tercer trimestre del curso académico, donde los alumnos ya habían recibido instrucción en la resolución de problemas aritméticos verbales de varias etapas.

El primero de los grupos, formado por 26 estudiantes (11 chicas y 15 chicos), realizó la instrucción con la versión de HINTS donde las ayudas a demanda estaban inactivas (Grupo SH), mientras que el otro grupo, formado también por 26 alumnos (14 chicas y 12 chicos), realizó la instrucción con una versión de HINTS con todas sus funcionalidades operativas (Grupo CH). A lo largo del capítulo mostraremos en detalle las diferencias entre las dos versiones de HINTS, que se distinguen por el nivel de ayudas a disposición del estudiante durante la resolución de los diferentes problemas. Como ya hemos señalado, la secuencia de enseñanza constó de tres sesiones de 50 minutos en las que los estudiantes resolvieron 10 problemas en cada sesión. Durante la primera sesión recibieron una pequeña explicación acerca del uso de HINTS. En cada grupo, se presentó la versión del sistema tutorial que los alumnos emplearían durante la secuencia de enseñanza. En esta introducción se emplearon a modo de ejemplo dos problemas. Con el objeto de no generar ningún sesgo, en ambos grupos se emplearon los mismos problemas.

3.3. LAS SECUENCIAS DE ENSEÑANZA

La secuencia de enseñanza constó de tres sesiones de 50 minutos para cada una en los dos grupos. El hecho de tener que buscar horario libre en el aula de informática del centro y un horario concertado con los tutores para desarrollarlas, llevó a que la secuencia de enseñanza tuviera una extensión de dos semanas. El diseño experimental de nuestra investigación exigía intentar minimizar las diferencias entre los modelos de enseñanza de cada grupo, de tal manera que las diferencias existentes únicamente se debieran a las características específicas de cada entorno de resolución. Con este propósito, organizamos dos secuencias de enseñanza de tres sesiones cada una, en las que se trabajasen los mismos problemas y en los que el profesor-investigador asumiese el mismo rol, y que solo se diferenciaran en las especificidades de cada entorno. La Figura 3.1 representa un esquema de la organización y propósito de las tres sesiones de cada grupo para las dos secuencias de enseñanza (grupo SH y grupo CH).

Como tanto el grupo SH como el CH iba a trabajar con HINTS, ambos realizaron la secuencia de enseñanza en el aula de informática del centro. Esta aula disponía de 30 ordenadores personales con sistema operativo Windows XP, y con potencia suficiente para soportar los requerimientos técnicos requeridos para el correcto funcionamiento de HINTS. Dado que se pretendía que los alumnos resolvieran los problemas individualmente, y como el número de ordenadores era suficiente, el investigador comprobó durante los días previos que en todos los ordenadores podía funcionar HINTS. Todas las incidencias que se encontraron fueron resueltas por el personal de informática del centro. En resumen, cada alumno del grupo SH o CH dispuso de un ordenador fijo a lo largo de toda la secuencia de enseñanza. Además, a pesar de que los equipos estaban suficientemente separados para que los estudiantes trabajaran de manera individual, se contó también con la presencia de los tutores de cada grupo para controlar, más si cabe, que no acometieran las resoluciones por parejas y sí de manera individual.

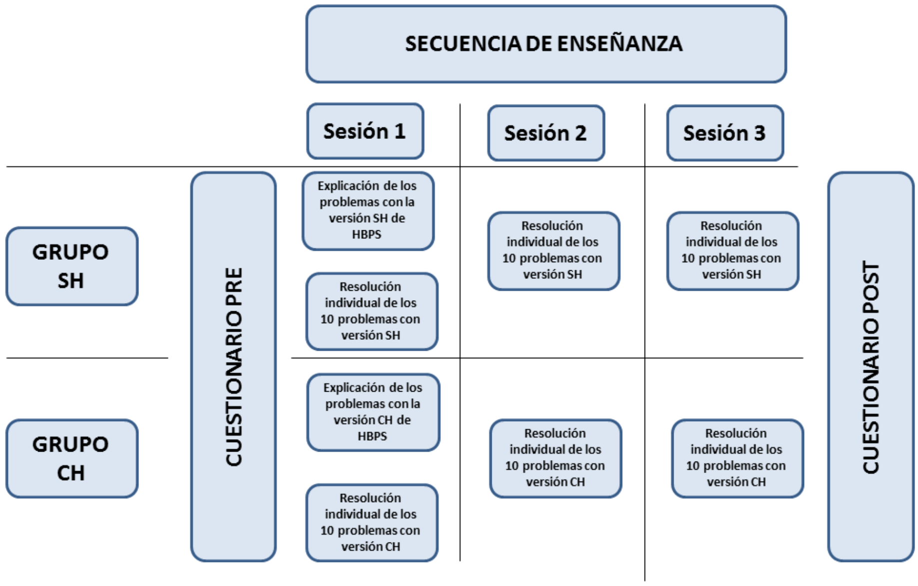


Figura 3.1. Etapas de la fase experimental.

Cada alumno siempre resolvió la colección de 10 problemas de cada una de las tres sesiones de la secuencia de enseñanza usando HINTS, en el ordenador que se le había asignado. A pesar de que este STI ha sido diseñado para tener un funcionamiento intuitivo para los usuarios, era pertinente mostrar a los estudiantes la manera en que se resuelven aritméticamente los problemas en dicho entorno. Con este fin, el profesor-investigador resolvió dos problemas, a manera de ejemplo, al inicio de la primera sesión de cada grupo con la versión de HINTS que usarían los alumnos posteriormente. Más allá de esta intervención, durante la secuencia de enseñanza el profesor-investigador se limitó a solventar las dificultades técnicas que los estudiantes tuvieran en relación con el funcionamiento del programa, pero en ningún caso atendió dudas ligadas a la resolución de los problemas. Por ejemplo, fue habitual que los estudiantes no recordaran como cargar un problema, tanto al principio de cada sesión como una vez habían finalizado correctamente una resolución. A cada alumno se le asignó un *pendrive* con la versión del HINTS que le había correspondido a su grupo. La información contenida en este prendrive se actualizaba en cada sesión para que el estudiante tuviera disponibles sólo los problemas correspondientes a dicha sesión. En ese mismo *pendrive* quedaba almacenado un registro con información de las acciones realizadas por el alumno al intentar resolver cada uno de los problemas. En concreto, se recogieron las operaciones introducidas, la respuesta de HINTS a las acciones del usuario, el tiempo dedicado a cada acción, las ayudas solicitadas por cada estudiante y el mensaje proporcionado por el sistema.

A continuación, presentamos los problemas usados como ejemplo en la primera sesión. También presentamos el guion utilizado durante la explicación que dio el profesor-investigador. El recurso a este guion pretendía evitar que la información proporcionada a cada grupo fuera distinta. No obstante, en el grupo CH se les explicó la posibilidad de solicitar ayuda al sistema y los tres niveles de ayuda que HINTS ofrecía.

3.3.1. LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS EJEMPLO

Para que todo el grupo pudiera seguir la explicación, el ordenador usado por el profesor-investigador se conectó a un proyector multimedia. Al inicio de la primera sesión, en los grupos SH y CH, el profesor-investigador resolvió los problemas *Los Tres* y *El Camión* utilizando HINTS. A ambos grupos se les hizo notar la posibilidad de seguir diferentes líneas de resolución cuando se resolvía un problema. A continuación, se muestra el análisis de los problemas y las diferentes líneas de resolución que se podían seguir.

Los Tres

Pablo tiene en su cartera 537 euros y Ana 256 euros en la hucha. Si su hermano Manolo tiene 125 euros menos que Ana. ¿Cuánto dinero tienen entre los tres?

En este primer problema consideramos cuatro lecturas diferentes del problema que cargamos en las dos versiones del HINTS.

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Dinero que tiene Pablo = P = 537
Dinero que tiene Ana = A = 256
Dinero que tiene menos Manolo que Ana = Dm = 125
Dinero que tiene Manolo = M
Dinero que tienen entre los tres = Dt

Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*
$A=Dm+M$	Comparación 4
$Dt=P+A+M$	Combinación 1

En esta primera lectura, se propone resolver el problema mediante dos etapas. En la primera etapa, se calcula la diferencia entre el dinero que tiene Ana y Manolo mientras que en la segunda etapa calculamos el dinero que tienen entre los tres.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Dinero que tiene Pablo = P = 537
Dinero que tiene Ana = A = 256
Dinero que tiene menos Manolo que Ana = Dm = 125
Dinero que tiene Manolo = M
Dinero que tienen entre los tres = Dt
Dinero que tienen Pablo y Ana = Dpa

Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*
Dpa=P+A	Combinación 1
A=Dm+M	Comparación 4
Dt=Dpa+M	Combinación 1

En la segunda lectura, se propone resolver el problema mediante tres etapas. En una etapa, se calcula el dinero que Ana y Pablo tienen entre los dos. Posteriormente, en otra etapa se calcula el dinero que tiene Manolo mientras que en la tercera etapa calculamos el dinero que tienen entre los tres.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Dinero que tiene Pablo = *P* = 537
Dinero que tiene Ana = *A* = 256
Dinero que tiene menos Manolo que Ana = *Dm* = 125
Dinero que tiene Manolo = *M*
Dinero que tienen entre los tres = *Dt*
Dinero que tienen Pablo y Manolo = *Dpm*

Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*
A=Dm+M	Comparación 4
Dpm=P+M	Combinación 1
Dt=Dpm+A	Combinación 1

En la tercera lectura, se propone resolver el problema mediante tres etapas. En la primera etapa, se calcula el dinero que tiene Manolo. Posteriormente, en la segunda etapa, se calcula el dinero que Manolo y Pablo tienen entre los dos. En la tercera y última etapa, calculamos el dinero que tienen entre los tres.

Lectura 4

Análisis de las cantidades

Dinero que tiene Pablo = *P* = 537
Dinero que tiene Ana = *A* = 256
Dinero que tiene menos Manolo que Ana = *Dm* = 125
Dinero que tiene Manolo = *M*
Dinero que tienen entre los tres = *Dt*
Dinero que tienen Ana y Manolo = *Dam*

Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*
$A=Dm+M$	Comparación 4
$Dam=A+M$	Combinación 1
$Dt=Dam+P$	Combinación 1

En la cuarta y última lectura, se propone resolver el problema mediante tres etapas. En la primera etapa, se calcula el dinero que tiene Manolo. Posteriormente, en la segunda etapa se calcula el dinero que Ana y Manolo tienen entre los dos. En la tercera y última etapa, calculamos el dinero que tienen entre los tres.

El Camión

Un camión ha cargado dos paquetes de 2000 kilos cada uno y 15 paquetes de 500 kilos cada uno. ¿Cuánto pesa la carga en total?

En la explicación del problema *El camión* solo se consideró una lectura posible:

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de paquetes de 2000 kilos = Pd = 2
Peso del paquete de 2000 kilos = Kd = 2000
Número de paquetes de 500 kilos = Pq = 15
Peso del paquete de 500 kilos = Kq = 500
Kilos que pesan todos los paquetes de 2000 kilos = Tkd
Kilos que pesan todos los paquetes de 500 kilos = Tkq
Peso de toda la carga = P

Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*
$Tkd=Kd \cdot Pd$	Isomorfismo de medidas 1
$Tkq=Kq \cdot Pq$	Isomorfismo de medidas 1
$T=Tkd+Tkq$	Combinación 1

En la única lectura de este problema, se propone resolver el problema mediante tres etapas. En una etapa, se calculan los kilos que pesan todos los paquetes de dos mil kilos. Posteriormente, en otra etapa se calculan los kilos que pesan todos los paquetes de quinientos kilos mientras que en la última etapa se calcula el peso de toda la carga.

Explicación del profesor-investigador

A continuación, vamos a relatar las indicaciones que dio el profesor-investigador a los estudiantes del grupo CH en la primera sesión de la secuencia de enseñanza. La explicación pretende recrear con fidelidad la manera en que se hizo y, por tanto, se plantea como una presentación del profesor a los estudiantes que escuchan. En el caso de que queramos incluir alguna aclaración sobre lo que el profesor verbaliza, la incluiremos entre corchetes con el objeto de diferenciar la información que fue dada a los estudiantes de la que no. Las explicaciones para el grupo SH, el que utilizó la versión sin ayudas, solo se diferenciaron en que se omitieron las referencias a las ayudas.

> Para iniciar el sistema tutorial inteligente, primero tenemos que entrar en el número de sesión correspondiente. Ya sabéis que hoy es la primera sesión y, por tanto, entraremos en la carpeta con nombre *sesión 1*. Los próximos días entraremos en las carpetas *sesión 2* y *sesión 3*. Ahora que todo el mundo se encuentra en la carpeta *sesión 1*, deberemos entrar en el programa que vamos a utilizar en todas las sesiones. Vosotros entraréis en la carpeta *s1ch* [instrucción para el grupo que podía utilizar la versión con ayudas] o *s1sh* [instrucción para el grupo que no tenía disponible la versión con ayudas]. Ahora veréis un archivo de nombre *HINTS*. Al hacer doble clic sobre él, se cargará el STI [véase Figura 3.2]. Como podéis apreciar, el programa cuenta con dos pestañas: *Resolutor y Tutor*. La pestaña *Resolutor* nos permitiría cargar un problema para que HINTS lo resolviera directamente. Pero esta opción no está disponible en vuestra versión ya que sois vosotros los que tenéis que resolver el problema. En vuestro caso entraréis directamente en la pestaña *Tutor* lo cual os permitirá resolver los problemas con la ayuda del ITS.

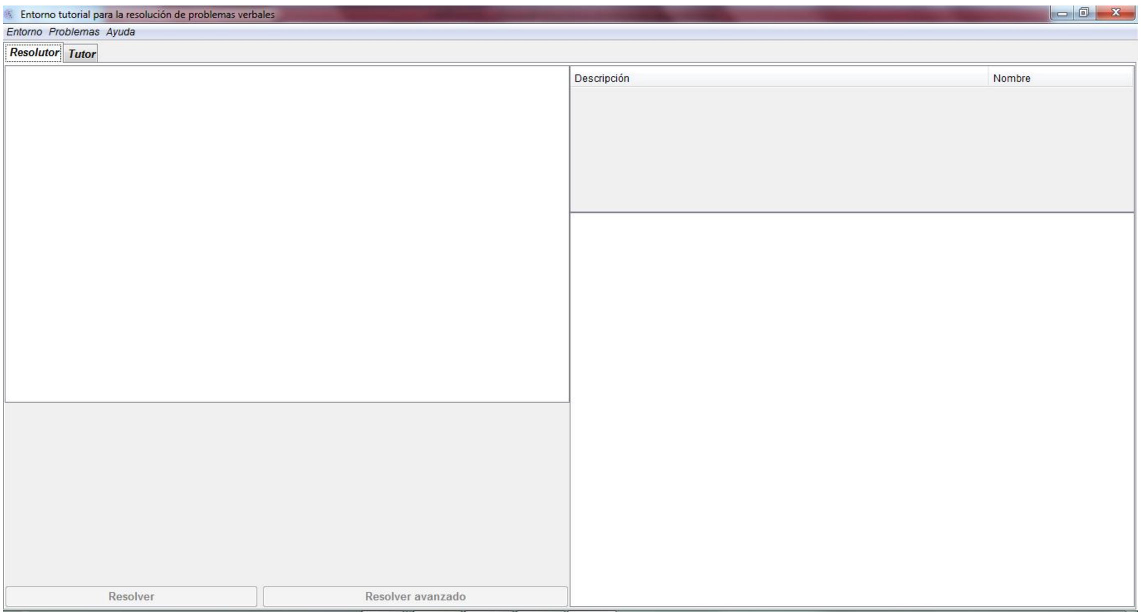


Figura 3.2. Apariencia de HINTS al ejecutarse.

Una vez arrancado el programa, es necesario cargar el problema que vais a resolver. Para ello observaréis en la parte superior izquierda, en la barra de menú, una etiqueta con el nombre *Problemas*. Al hacer clic, se desplegará un listado con los problemas de la sesión [Figura 3.3].

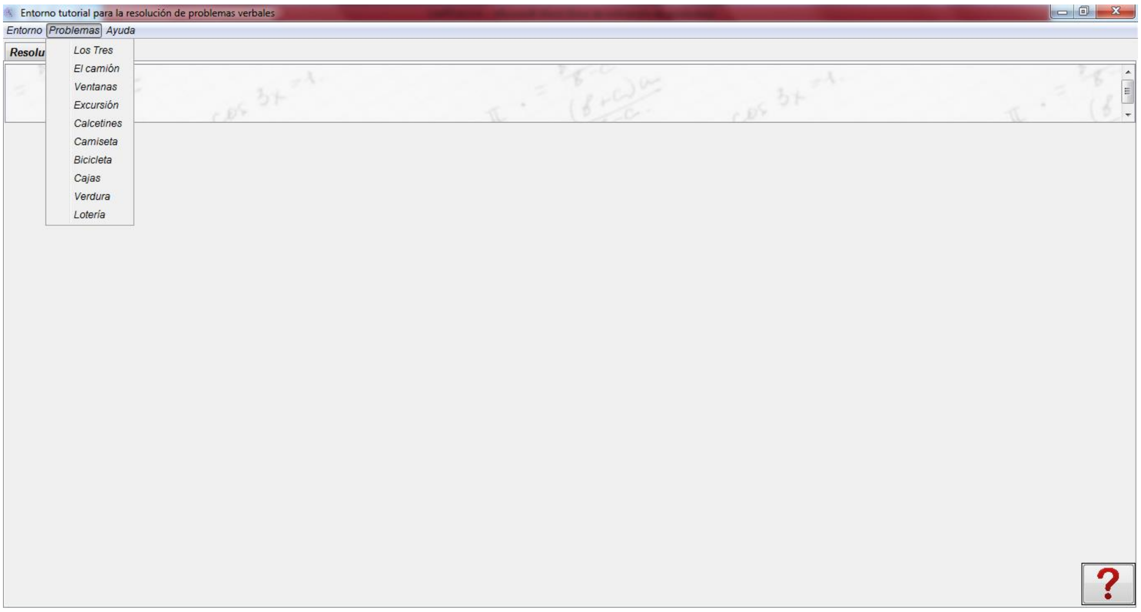


Figura 3.3. Selección de los problemas en HINTS.

Ahora solamente tendréis que seleccionar el problema que queráis. Recordad que es conveniente ir en orden para saber qué problemas hemos resuelto y cuáles no. Una vez lo hayáis seleccionado, el problema se cargará en el tutor, apareciendo el enunciado y habilitándose el entorno para comenzar su resolución. En este caso, y como ejemplo, voy a resolver los problemas *Los Tres* y *El Camión*. Primero voy a cargar el problema *Los Tres*. Cuando cargamos un problema, el enunciado aparece en la parte superior de HINTS. Debajo del enunciado aparece un cuadro denominado *Cantidades definidas* donde irán apareciendo el valor numérico y un nombre asignado por HINTS de todas las cantidades conocidas desde el principio de la resolución o que vamos a ir calculando en el transcurso de la resolución del problema. Debajo de este cuadro aparecen dos filas de botones. La primera fila nos proporciona los botones correspondientes a las cuatro operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación y división. En la fila de debajo aparecen los botones con las cantidades conocidas que nos proporciona el enunciado de este problema. Como podéis ver, en este caso, son 537, 256 y 125. Algunas de estas cantidades serán necesarias para empezar a resolver el problema, pero es posible que no las necesitéis todas.

En el último cuadro, en la parte inferior, aparecerá la operación a medida que se va escribiendo cuando usamos los botones superiores. Para que HINTS pueda determinar si la operación planteada es válida, tendréis que hacer clic el botón *Aceptar* [Figura 3.4].

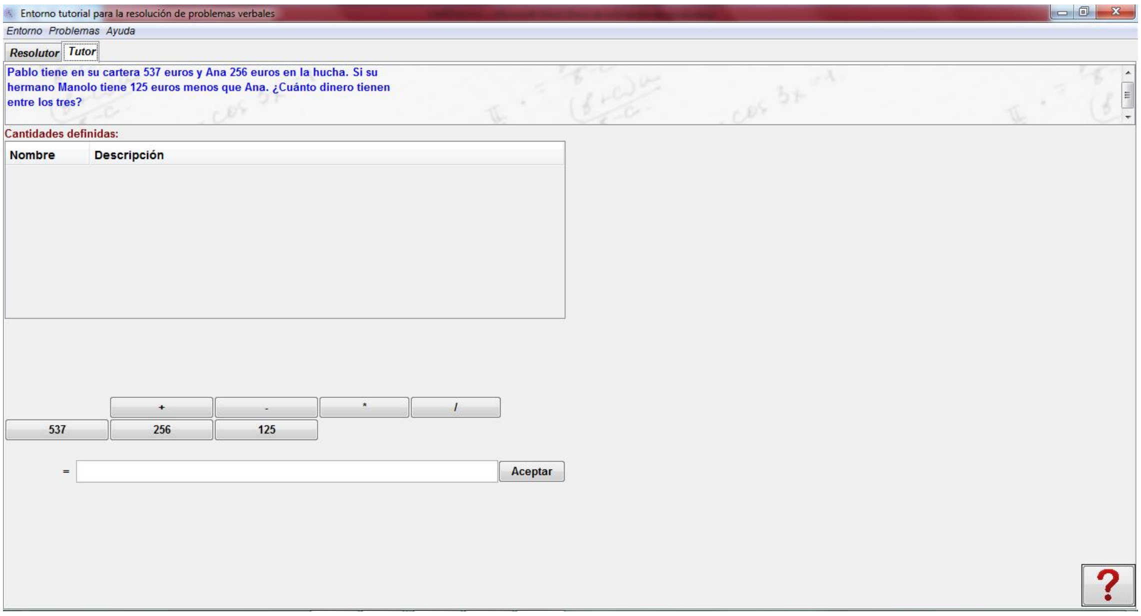


Figura 3.4. HINTS tras la carga del problema *Los Tres*.

Por último, en la parte inferior derecha hay un botón con un símbolo de interrogación []. [Aquí la explicación varía del grupo SH al grupo CH]. [Grupo SH] El botón con el interrogante estará deshabilitado ya que no vais a tener ningún tipo de ayuda para resolver los problemas. Por tanto, si lo apretáis el sistema os proporcionará un mensaje diciéndoos que no os puede proporcionar ninguna ayuda [Figura 3.5]

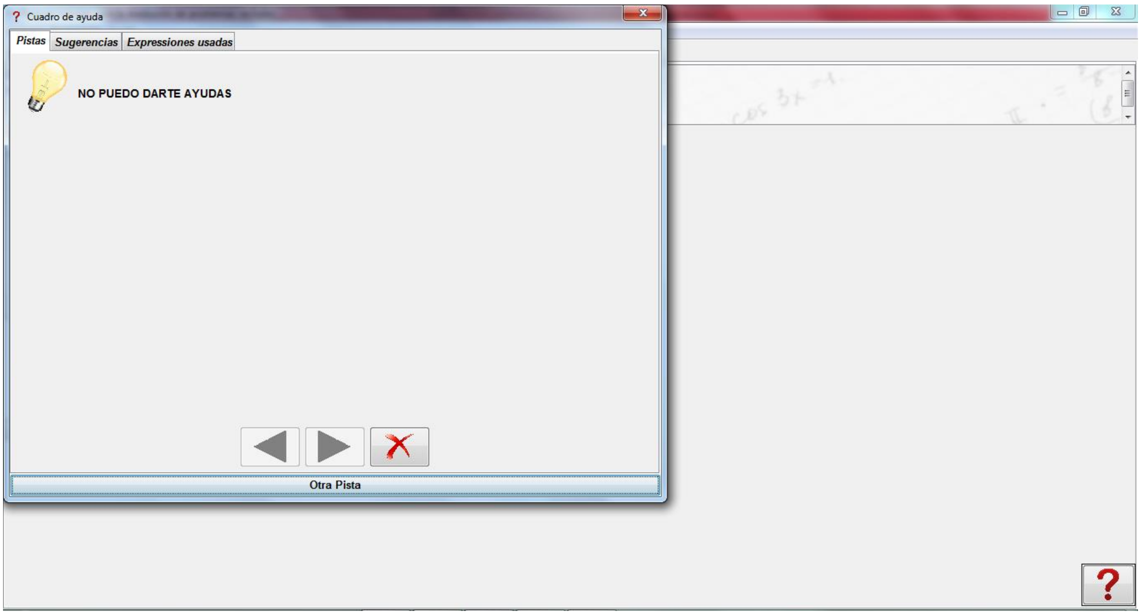


Figura 3.5. Mensaje que proporciona el HINTS cuando el grupo SH pide ayuda al sistema.

[Grupo CH] Para vosotros el botón de ayuda os dará información que puede ser útil para resolver el problema. En cada paso podéis pedir un máximo de tres ayudas. Esto lo explicaremos en detalle posteriormente cuando estemos resolviendo el problema.

El primer paso será leer el enunciado detenidamente. Es importante identificar qué cantidad se nos pide calcular. Una vez leído el enunciado e identificado el objetivo, comenzaremos a introducir operaciones. En este primer caso vamos a introducir 256 menos 125 y pulsaremos el botón *Aceptar* [Figura 3.6].

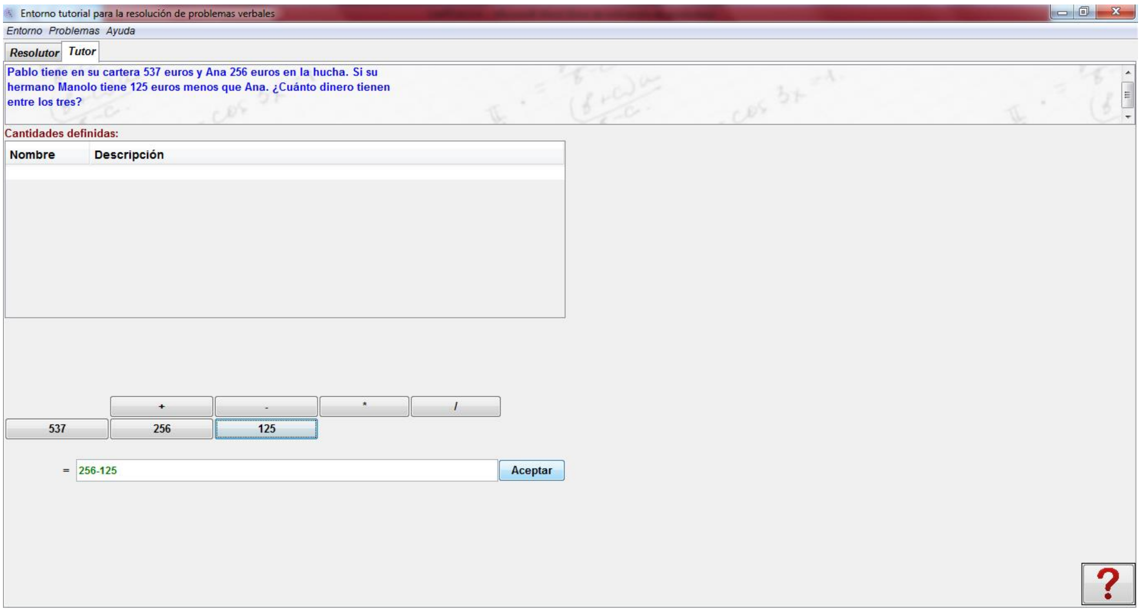


Figura 3.6. Escritura de la relación propuesta en HINTS.

Como la operación es correcta, podéis ver que aparece en el cuadro de *Cantidades conocidas* el valor la cantidad hallada (131) y un nombre que la identifica (*Dinero que tiene Manolo*). Además, podéis observar que se ha creado un nuevo botón donde aparece el valor 131 por si consideráis oportuno utilizarla en otra operación [Figura 3.7].

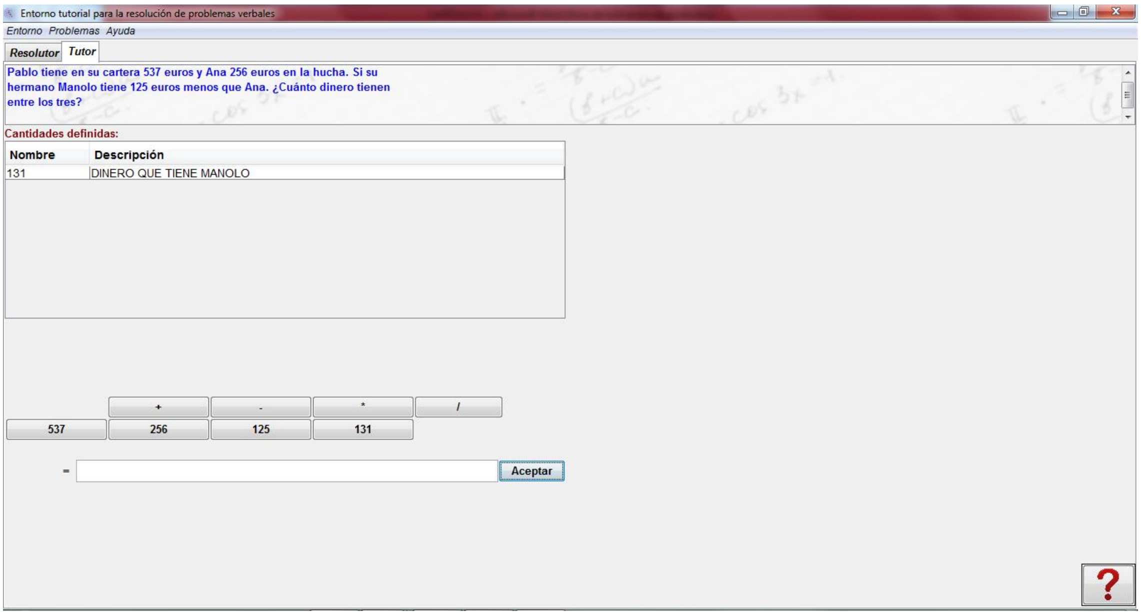


Figura 3.7. Relación correcta introducida en el problema *Los Tres* y propuesta de la nueva cantidad.

Si a continuación, introdujéramos la última operación necesaria para resolver el problema, el sistema proporcionaría información sobre la resolución en el panel de la derecha [Figura 3.8].

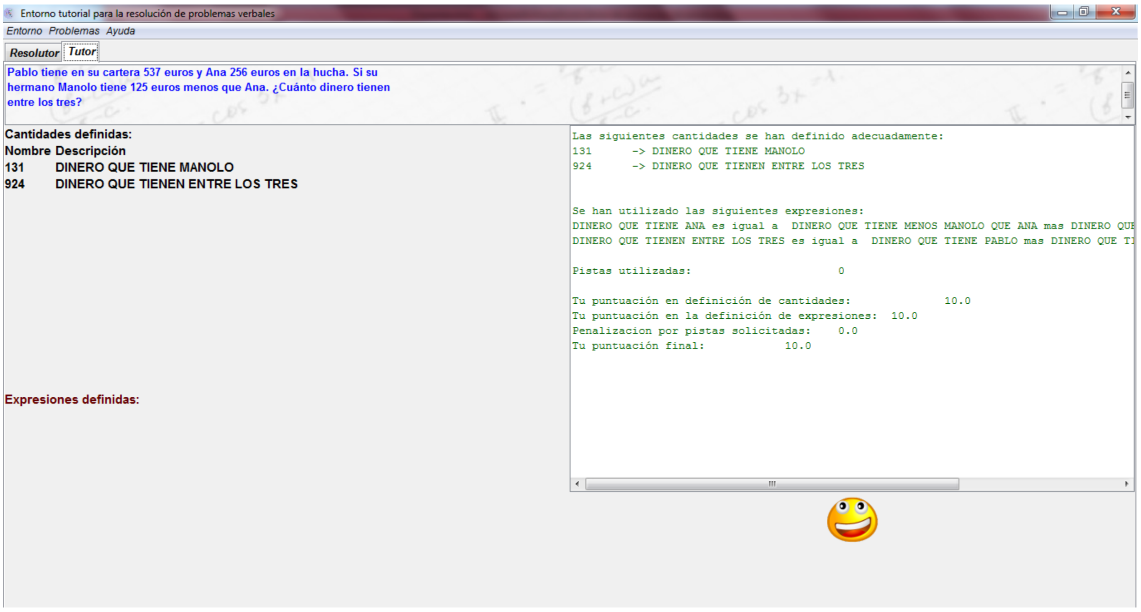


Figura 3.8. Mensaje informativo tras la resolución correcta del problema.

No obstante, podríamos haber resuelto el problema de otras maneras. Imaginemos que alguno de vosotros quiere saber primero cuánto dinero tienen Pablo y Ana, entre los dos. Por tanto, plantearía sumar 537 más 256 y pulsaría el botón de *Aceptar*. El sistema daría por correcta la operación, añadiría la nueva cantidad a la tabla de cantidades y crearía el botón correspondiente para la nueva cantidad [Figura 3.9].

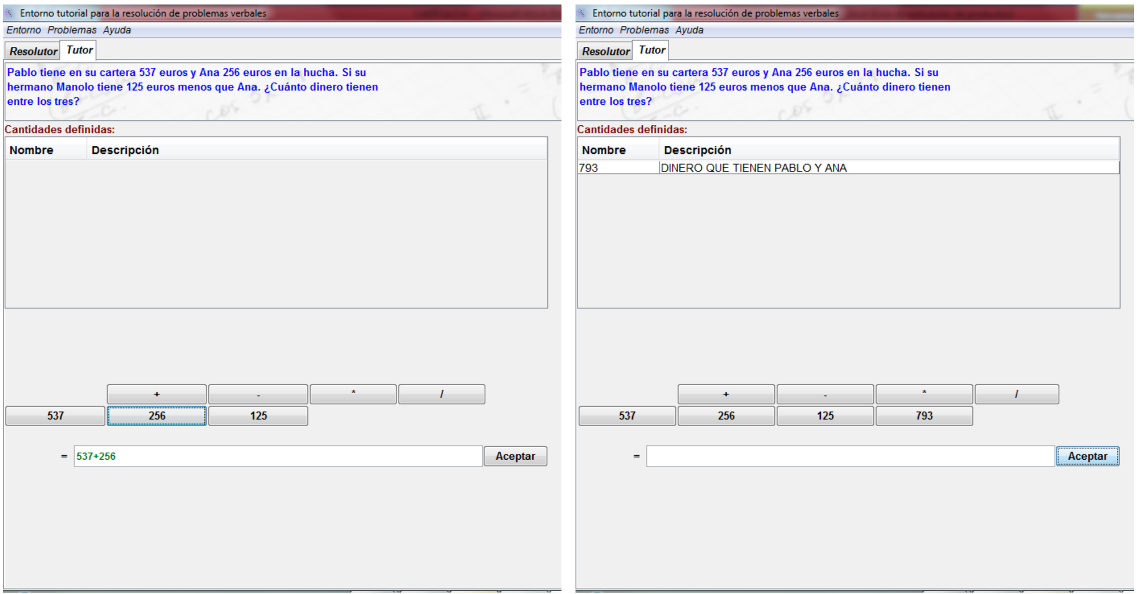


Figura 3.9. Primera relación en la segunda resolución correcta del problema *Los Tres*.

Ahora deberíamos averiguar cuánto dinero tiene Antonio restando 256 menos 125. Obtendríamos 131, que es el dinero que tiene Antonio y, por último, sumaríamos 793 más 131 para averiguar cuánto dinero tienen entre los tres [se les muestra todo el proceso con el HINTS]. Es decir, resolváis como resolváis los problemas, HINTS os indicará si las operaciones son o no válidas.

¿Qué pasaría si introdujéramos alguna operación incorrecta? Vamos a ver que depende el error que cometamos, tenemos distintos mensajes de error. Para verlo, vamos a cargar el siguiente problema, *El Camión*, y vamos a introducir una operación que no es válida en este problema, pero que combina valores que están relacionados por otra operación. Por ejemplo, vamos a dividir 2000 entre 2 y pulsaremos el botón *Aceptar*. Como la operación es incorrecta, ya que en vez de dividir 2000 entre 2, tendríamos que haber multiplicado 2000 por 2, el sistema nos proporciona el siguiente mensaje de error [parte izquierda de la Figura 3.10]. Si en lugar de proponer una multiplicación, hubiésemos propuesto una operación incorrecta como una resta, el sistema nos proporcionaría el siguiente mensaje de error [parte derecha de la Figura 3.10].

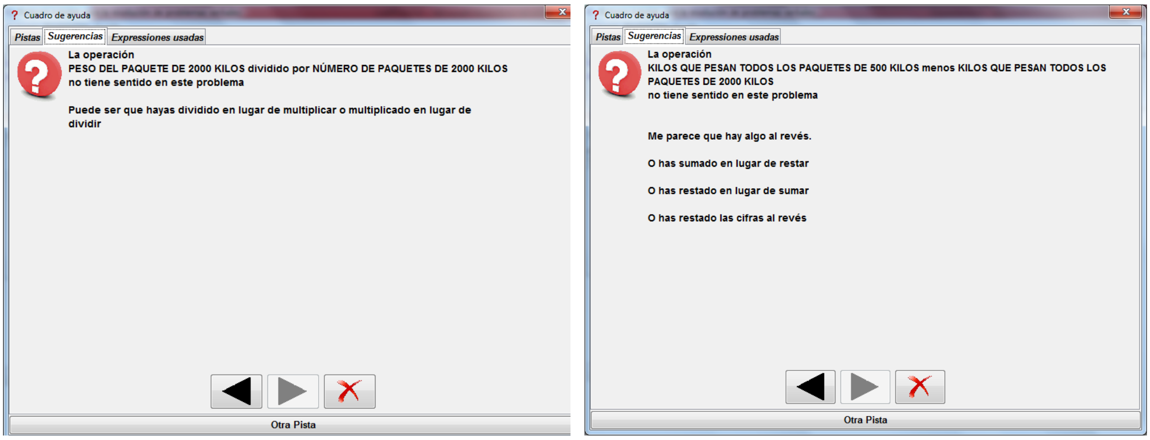


Figura 3.10. Mensaje de error cuando se utilizan bien las cantidades pero la operación inversa u opuesta.

Es decir, nos dice que la operación que hemos introducido no tiene sentido en este problema e intenta darnos un motivo del error cometido. Aquí las cantidades están conectadas, pero la operación introducida es la inversa o la opuesta respecto a la deberíamos haber introducido. Por tanto, será muy importante que leáis los mensajes de error que os proporcione el sistema cuando introduzcáis alguna operación incorrecta. Si, por el contrario, los valores no están relacionados de ninguna manera, simplemente nos dirá que no tiene sentido la operación. Es lo que ocurriría si introdujéramos 2000 por 15 y pulsáramos el botón *Aceptar* [Figura 3.11].

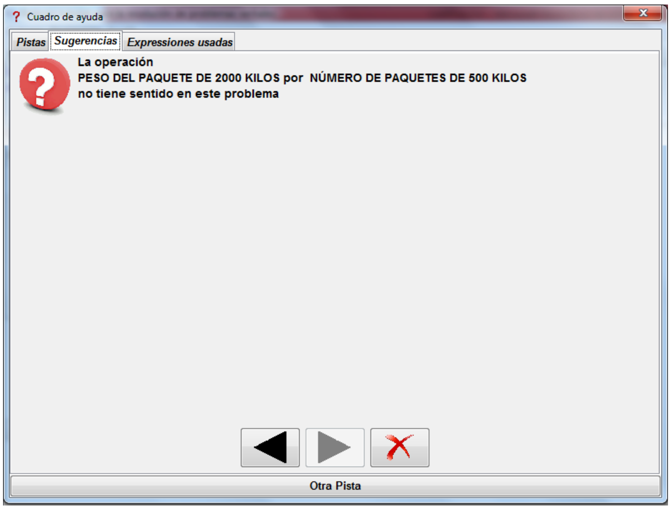


Figura 3.11. Mensaje de error cuando se utilizan erróneamente las cantidades en una relación.

[A continuación el investigador explica cómo funcionan las ayudas en HINTS. Esta explicación se dio exclusivamente a los alumnos del grupo CH]

Para acabar, vamos a ver cómo funcionan las ayudas que podéis pedir al sistema. El botón *Ayudas* [] está ideado para daros alguna pista en aquellos momentos en los que no sabéis avanzar en la resolución del problema. Os recomendamos que no abuséis de su uso y que solicitéis ayuda después de haber pensado suficientemente el problema. Vamos a cargar de nuevo el problema *El camión* para mostrar cómo funcionan las ayudas. Imaginemos que nada más empezar el problema hemos probado con alguna operación y el sistema nos ha proporcionado un mensaje de error. Como no sabemos qué hacer, decidimos pulsar el botón de *Ayuda*. Al ser la primera vez que pedimos ayuda en este primer paso, el sistema nos proporcionará una ayuda que llamamos de nivel 1 [ver Figura 3.12]. Este mensaje nos da el nombre de una cantidad que podemos calcular.

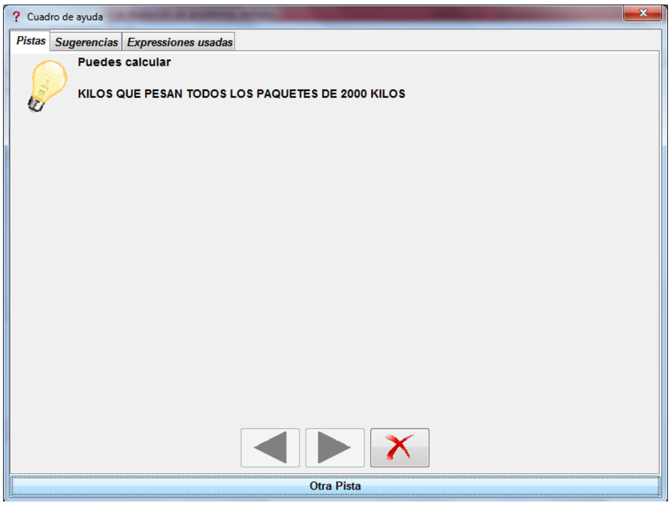


Figura 3.12. Primer mensaje de ayuda mostrado cuando se solicita en una relación.

Si a pesar de la ayuda, no somos capaces de saber qué tenemos que hacer, podemos solicitar una segunda ayuda. Como aún estamos en el primer paso, el sistema porporciona una ayuda de nivel 2. Esta segunda ayuda nos recordará qué cantidad desconocida podemos hallar y nos porporcionará el nombre de las cantidades con las que deberíamos operar para conseguirlo [Figura 3.13].

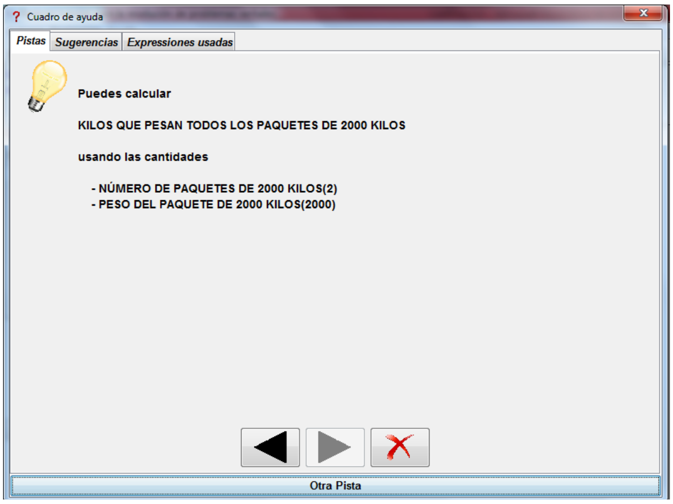


Figura 3.13. Segundo mensaje de ayuda mostrado cuando se solicita en una relación.

Si a pesar de esta segunda ayuda no somos capaces de ver la operación que tenemos que introducir, podréis solicitar una tercera y última ayuda (nivel 3). Este último nivel os proporcionará cuáles son las cantidades que tenéis que utilizar y la operación que las relaciona [Figura 3.14].

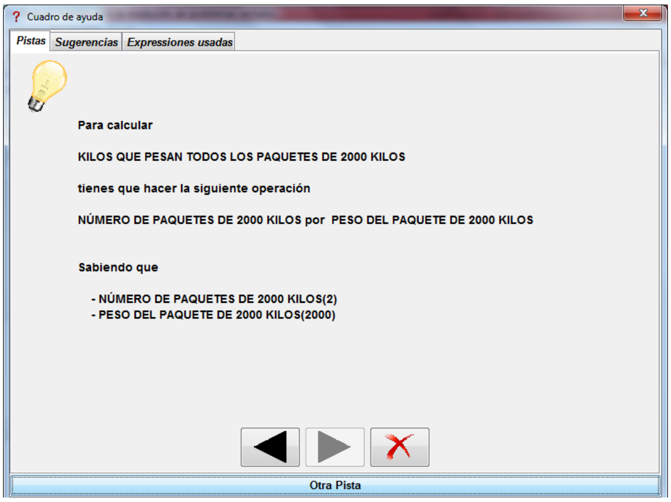


Figura 3.14. Tercer mensaje de ayuda mostrado cuando se solicita en una relación.

Si a pesar de la última ayuda volvemos a apretar el botón, el sistema nos dirá que no puede proporcionarnos más ayuda y que tengamos en cuenta la última sugerencia proporcionada [Figura 3.15].

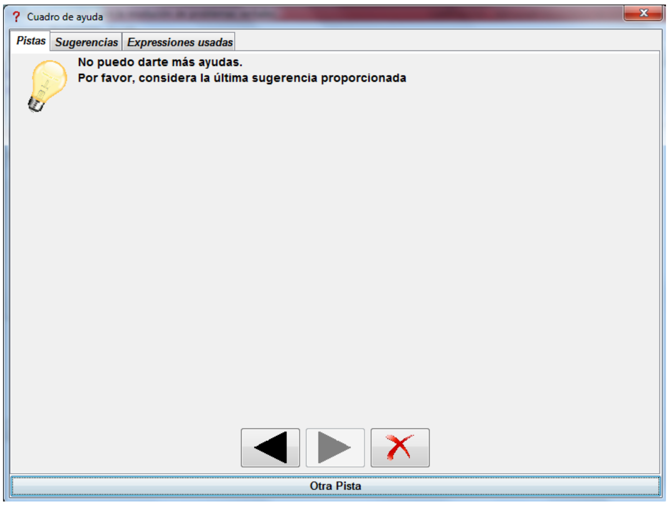


Figura 3.15. Mensaje mostrado por el HINTS si solicitas otra ayuda después de mostrar los tres niveles de ayuda.

3.3.2. LA COLECCIÓN DE PROBLEMAS EN LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

Una vez finalizada la explicación de los problemas usados como ejemplo por parte del profesor-investigador, se les indicó a los alumnos que entraran dentro de la carpeta de nombre *sesión1* y que eligieran la carpeta *s1ch* o *s1sh* según si el grupo tenía la posibilidad de pedir o no pedir ayudas, respectivamente. Para las sesiones 2 y 3 se siguió el mismo procedimiento, pero utilizando la carpeta correspondiente a cada sesión. En cada una de las sesiones el sistema HINTS estaba cargado con 10 problemas que tenían que resolver individualmente con la versión del tutor que les había sido asignada. Conviene recordar que los 30 problemas fueron los mismos para los dos grupos, pero el grupo SH no disponía de ayudas habilitadas en su versión del HINTS, mientras que el grupo CH sí disponía de los tres niveles de ayudas en su versión.

Estos 30 problemas tenían las características de ser problemas que se podían resolver de manera aritmética. En su selección se persiguió que hubiese problemas con variedad en cuanto al número y tipo de etapas, con diferentes estructuras semánticas y, a su vez, que los problemas pudieran tener diferentes lecturas. Además, se incluyeron algunos problemas que tuviesen estructuras matemáticas similares a los usados en los cuestionarios Pre y Post. Esta exigencia fue atendida considerando la estructura del problema a partir del grafo de una lectura analítica realizada por el investigador. A continuación, ofrecemos tanto el enunciado de los problemas como las lecturas de los mismos realizadas por el investigador.

En todas las sesiones se presenta en primer lugar el enunciado de los diez problemas que se propusieron para cada sesión. El orden en que se muestran, coincide con el orden en que aparecían en la sesión. Cada problema se acompaña con las diferentes lecturas analíticas realizadas por el investigador y el grafo asociado. Todas las lecturas que presentamos son las que se almacenaron en las dos versiones del HINTS. Respecto a las estructuras semánticas presentes en las distintas lecturas de los problemas de cada sesión, presentamos un análisis cuantitativo en una tabla.

3.3.2.1. LA COLECCIÓN DE PROBLEMAS DE LA SESIÓN 1 EN LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA.

La Tabla 3.1 resume para los problemas de la sesión 1, el análisis de las etapas atendiendo a su categoría semántica. En resumen, se observa una representación importante de problemas con estructuras semánticas de isomorfismo de medidas 1 y problemas en los que se trabajan estructuras de cambio y combinación 1. En esta sesión incluimos, en un par de problemas, la estructura aditiva de comparación 1 que se encuentra ausente en las dos sesiones posteriores.

Tabla 3.1.

Distribución de las distintas estructuras semánticas presentes en los problemas de la sesión 1.

Problema	Lectura	Cambio 2	Cambio 4	Combinación 1	Combinación 2	Comparación 1	Isomorfismo 1	Isomorfismo 2 (DP)	Isomorfismo 3 (DC)
El transporte	L1	1	-	-	-	-	-	-	1
	L2	1	-	-	-	-	-	-	2
La tienda de deportes	L1	-	-	1	-	-	2	-	-
La imprenta	L1	-	1	1	-	-	1	-	-
	L2	1	1	-	-	-	1	-	-
	L3	1	1	-	-	-	1	-	-
Los pantalones	L1	2	-	1	-	-	3	-	-
	L2	3	-	1	-	-	2	-	-
El coche	L1	-	-	-	1	-	1	-	-
El zoo	L1	-	1	-	-	-	-	1	1
Naranjas y kiwis	L1	-	1	-	-	-	1	1	-
Calcetines	L1	-	-	2	-	1	-	-	-
	L2	-	-	1	-	2	-	-	-
	L3	-	-	-	-	3	-	-	-
Cajas	L1	-	-	-	-	-	1	1	-
Cromos	L1	-	-	-	-	1	2	-	-
	L2	-	-	-	-	3	2	-	-

El Transporte

Un tendero compra 276 huevos en una granja, pero durante el transporte se le rompen 24. Decide vender los que han quedado en envases de 6 huevos. ¿Cuántos envases necesitará?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Huevos comprados = *Hc* = 276
Huevos rotos = *Hr* = 24
Huevos que caben en un envase = *He* = 6
Huevos que quedan sin romper = *Hq*
Número de envases = *Ne*

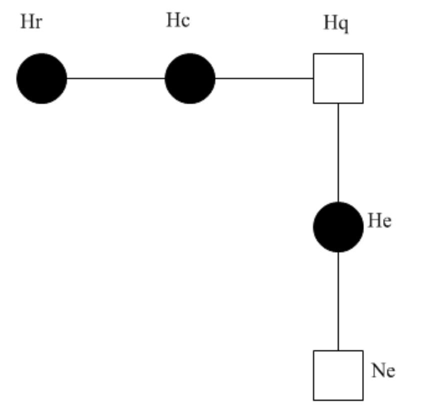
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$Hc=Hq+Hr$ $Hq=Ne\cdot He$	Cambio 2 Isomorfismo de medidas 3	

Figura 3.16: Lectura 1 del problema *El Transporte*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Huevos comprados = *Hc* = 276
Huevos rotos = *Hr* = 24
Huevos que caben en un envase = *He* = 6
Número de envases = *Ne*
Número de envases si no se hubiesen roto huevos = *Net*
Número de envases no necesarios al romperse los huevos = *Ner*

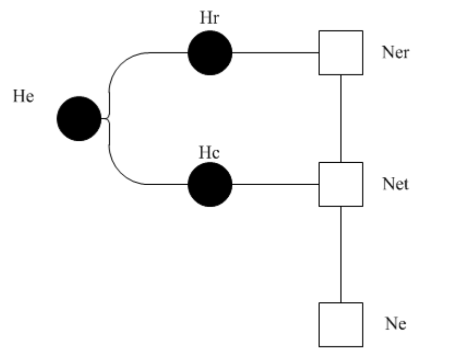
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$Hc=Net\cdot He$ $Hr=Ner\cdot He$ $Net=Ne+Ner$	Isomorfismo de medidas 3 Isomorfismo de medidas 3 Cambio 2	

Figura 3.17: Lectura 2 del problema *El Transporte*.

<u>*La Tienda de deportes*</u>

Una tienda de deportes ha hecho un pedido de 15 bicicletas de montaña a 125 euros cada una y 9 bicicletas de carretera a 370 euros cada una. ¿Cuánto ha costado el pedido?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de bicicletas de montaña = *Nm* = 15
Precio de una bicicleta de montaña = *Pum* = 125
Número de bicicletas de carretera = *Nc* = 9
Precio de una bicicleta de carretera = *Puc* = 370
Precio de todas las bicicletas de montaña = *Pm*
Precio de todas las bicicletas de carretera = *Pc*
Precio del pedido = *P*

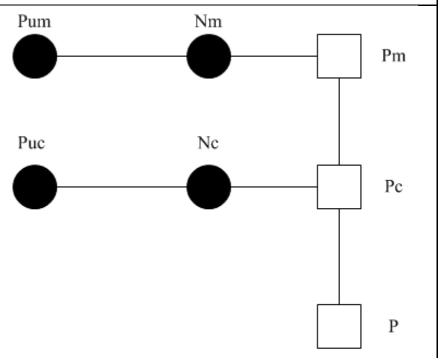
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pm=Nm·Pum	Isomorfismo de medidas 1	
Pc=Nc·Puc	Isomorfismo de medidas 1	
P=Pm+Pc	Combinación 1	

Figura 3.18: Lectura 1 del problema *La Tienda de deportes.*

<u>*La Imprenta*</u>

Una imprenta necesita comprar tinta por un valor de 2120 euros y 40 cajas de papel a 35 euros cada una. Si se dispone de 3500 euros, ¿cuánto dinero les faltará?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Precio de la tinta= *Pt* = 2120
Número de cajas de papel = *Nc* = 40
Precio de una caja de papel = *Puc* = 35
Dinero disponible =*Dd*= 3500
Precio de todas las cajas de papel = *Pc*
Precio total = *P*
Dinero que falta = *Df*

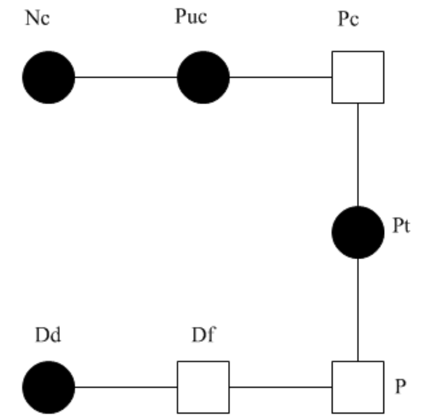
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pc=Nc·Puc *P=Pt+Pc* *P=Dd+Df*	Isomorfismo de medidas 1 Combinación 1 Cambio 4	

Figura 3.19: Lectura 1 del problema *La Imprenta*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Precio de la tinta= *Pt* = 2120
Número de cajas de papel = *Nc* = 40
Precio de una caja de papel = *Puc* = 35
Dinero disponible = *Dd* = 3500
Lo que queda después de comprar la tinta = *Tmt*
Precio de todas las cajas de papel = *Pc*
Dinero que falta = *Df*

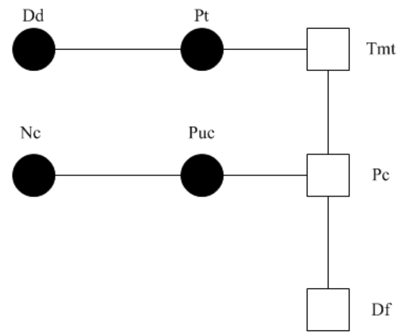
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Dd=Tmt+Pt *Pc=Nc·Puc* *Pc=Tmt+Df*	Cambio 2 Isomorfismo de medidas 1 Cambio 4	

Figura 3.20: Lectura 2 del problema *La Imprenta*.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Precio de la tinta= *Pt* = 2120
Número de cajas de papel = *Nc* = 40
Precio de una caja de papel = *Puc* = 35
Dinero disponible = *Dd* = 3500
Precio de todas las cajas de papel = *Pc*
Lo que queda después de comprar el papel = *Tmp*
Dinero que falta = *Df*

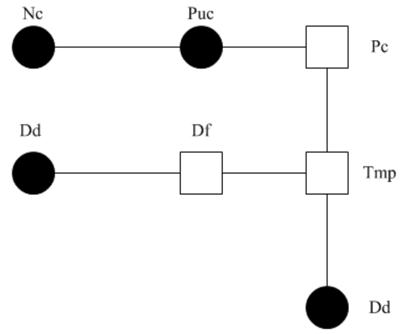
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pc=Nc·Puc *Dd=Tmp+Pc* *Pt=Tmp+Df*	Isomorfismo de medidas 1 Cambio 2 Cambio 4	

Figura 3.21: Lectura 3 del problema *La Imprenta*.

<u>*Los Pantalones*</u>

Unos grandes almacenes compraron 45 pantalones de una conocida marca a 37 euros cada uno. Vendieron 17 pantalones a 95 euros cada uno y decidieron rebajar los que quedaban a 70 euros cada uno. Si al final consiguieron venderlos todos, ¿qué beneficio obtuvieron?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de pantalones comprados = *Nc* = 45
Precio de compra de un pantalón = *Puc* = 37
Pantalones vendidos antes de la rebaja = *Ni* = 17
Precio de venta de un pantalón antes de la rebaja = *Pui* = 95
Precio de venta de un pantalón después de la rebaja = *Puf* = 70
Precio de la compra de todos los pantalones = *Pc*
Dinero obtenido antes de la rebaja = *Pi*
Número de pantalones vendidos después de la rebaja = *Nf*
Dinero obtenido después de la rebaja = *Pf*
Dinero obtenido de la venta de todos los pantalones = *Pv*
Beneficio = *B*

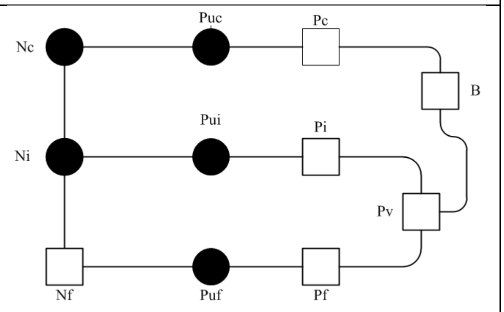
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pc=Nc·Puc	Isomorfismo de medidas 1	
Pi=Ni·Pui	Isomorfismo de medidas 1	
Nc=Nf+Ni	Cambio 2	
Pf=Nf·Puf	Isomorfismo de medidas 1	
Pv=Pi+Pf	Combinación 1	
Pv=Pc+B	Cambio 2	

Figura 3.22: Lectura 1 del problema *Los Pantalones*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de pantalones comprados = *Nc* = 45
Precio de compra de un pantalón = *Puc* = 37
Pantalones vendidos antes de la rebaja = *Ni* = 17
Precio de venta de un pantalón antes de la rebaja = *Pui* = 95
Precio de venta de un pantalón después de la rebaja = *Puf* = 70
Beneficio por pantalón antes de la rebaja = *Bpa*
Beneficio por pantalón después de la rebaja = *Bpd*
Número de pantalones vendidos después de la rebaja = *Nf*
Beneficio de los pantalones no rebajados = *Ba*
Beneficio de los pantalones rebajados = *Bd*
Beneficio = *B*

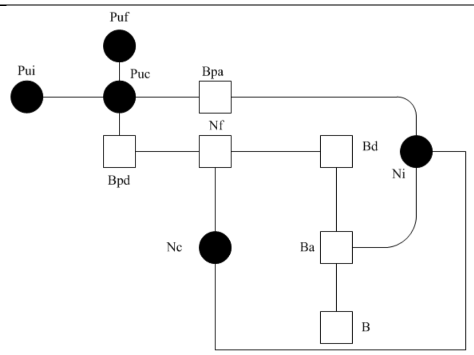
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pui=Bpa+Puc	Cambio 2	
Puf=Bpd+Puc	Cambio 2	
Nc=Nf+Ni	Cambio 2	
Ba=Bpa·Ni	Isomorfismo de medidas 1	
Bd=Bpd·Nf	Isomorfismo de medidas 1	
B=Ba+Bd	Combinación 1	

Figura 3.23: Lectura 2 del problema *Los Pantalones*.

<u>*El Coche*</u>

Hemos comprado un coche y hemos pagado 12 recibos de 400 euros cada uno. Si el coche cuesta 12500 euros, ¿cuánto dinero falta por pagar?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de recibos pagados = *Nr* = 12
Valor de un recibo = *Pr* = 400
Precio del coche = *Pt* = 12500
Dinero que ya se ha pagado = *Dp*
Dinero que falta por pagar = *Dq*

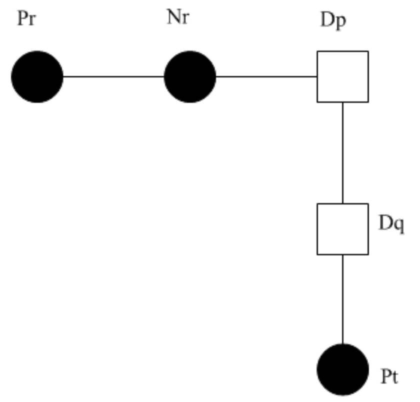
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Dp=Pr·Nr *Pt=Dq+Dp*	Isomorfismo de medidas 1 Combinación 2	

Figura 3.24: Lectura 1 del problema *El Coche.*

<u>*El Zoo*</u>

Los estudiantes de cuarto de primaria hicieron una excursión al zoo por la que se pagó un total de 352 euros. Al día siguiente hicieron la misma excursión los alumnos de sexto de primaria. Sabiendo que la excursión de los alumnos de sexto de primaria costó 520 euros y que en la excursión de sexto fueron 21 estudiantes más que en la de cuarto, ¿cuántos estudiantes de cuarto de primaria asistieron?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Precio total de la excursión de cuarto = *Pc* = 352
Precio total de la excursión de sexto = *Ps* = 520
Estudiantes de más que hay en sexto = *Nsc* = 21
Lo que pagarían 21 estudiantes = *Psc*
Dinero que paga un estudiante = *Pu*
Número de estudiantes de cuarto = *Nc*

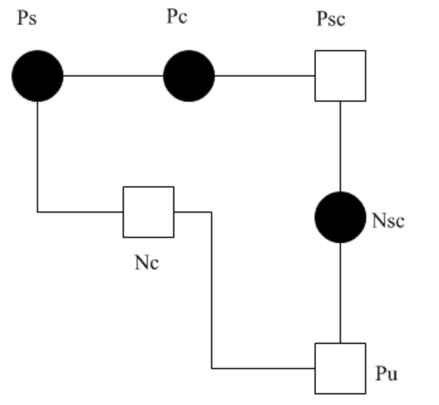
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Ps=Pc+Psc *Psc=Nsc·Pu* *Pc=Nc·Pu*	Cambio 4 Isomorfismo de medidas 2 Isomorfismo de medidas 3	

Figura 3.25: Lectura 1 del problema *El Zoo*.

<u>*Naranjas y kiwis*</u>

Por 30 kg de naranjas y 40 kg de kiwis he pagado 180 euros. Si los kiwis están a 3 euros/kg, ¿cuánto cuesta un kilo de naranjas?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Kilos de naranjas = *Kn* = 30
Kilos de kiwis = *Kk* = 40
Precio total de la fruta = *P* = 180
Precio de un kilo de kiwis = *Puk* = 3
Precio total de los kiwis comprados = *Pk*
Precio total de las naranjas compradas = *Pn*
Precio de un kilo de naranjas = *Pun*

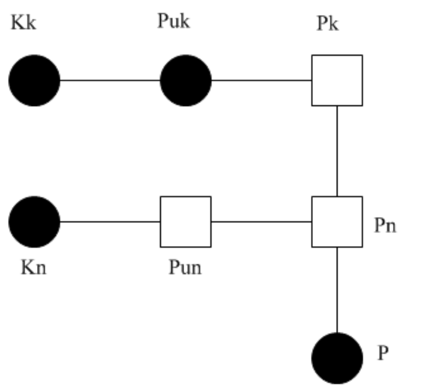
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pk=Kk·Puk *P=Pk+Pn* *Pn=Kn·Pun*	Isomorfismo de medidas 1 Cambio 4 Isomorfismo de medidas 2	

Figura 3.26: Lectura 1 del problema *Naranjas y kiwis*.

Calcetines

Claudia tiene en su mesita 18 calcetines azules y 24 blancos. Ana tiene 12 calcetines azules y 20 blancos. ¿Cuántos calcetines tiene Claudia más que Ana?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Calcetines azules que tiene Claudia = *Cac* = 18
Calcetines blancos que tiene Claudia = *Cbc* = 24
Calcetines azules que tiene Ana = *Caa* = 12
Calcetines blancos que tiene Ana = *Cba* = 20
Calcetines que tiene Claudia = *Cc*
Calcetines que tiene Ana = *Ca*
Calcetines que tiene más Claudia que Ana = *Cm*

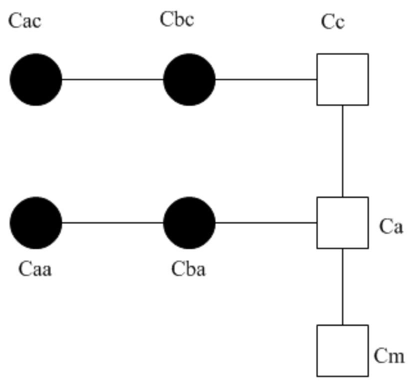
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Cc=Cac+Cbc *Ca=Caa+Cba* *Cc=Ca+Cm*	Combinación 1 Combinación 1 Comparación 1	

Figura 3.27: Lectura 1 del problema *Calcetines*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Calcetines azules que tiene Claudia = *Cac* = 18
Calcetines blancos que tiene Claudia = *Cbc* = 24
Calcetines azules que tiene Ana = *Caa* = 12
Calcetines blancos que tiene Ana = *Cba* = 20
Calcetines azules que tiene más Claudia que Ana = *Cam*
Calcetines blancos que tiene más Claudia que Ana = *Cbm*
Calcetines que tiene más Claudia que Ana = *Cm*

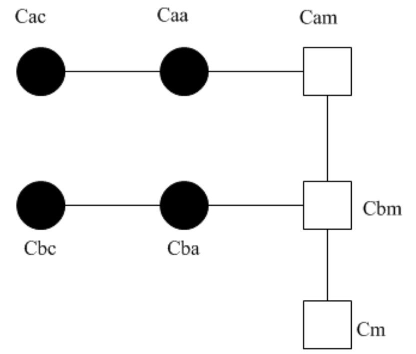
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Cac=Caa+Cam	Comparación 1	
Cbc=Cba+Cbm	Comparación 1	
Cm=Cam+Cbm	Combinación 1	

Figura 3.28: Lectura 2 del problema *Calcetines.*

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Calcetines azules que tiene Claudia = *Cac* = 18
Calcetines blancos que tiene Claudia = *Cbc* = 24
Calcetines azules que tiene Ana = *Caa* = 12
Calcetines blancos que tiene Ana = *Cba* = 20
Calcetines que tiene de más Ana que Claudia parcialmente = *Cmap*
Calcetines que tiene de más Claudia que Ana parcialmente = *Cmcp*
Calcetines que tiene más Claudia que Ana = *Cm*

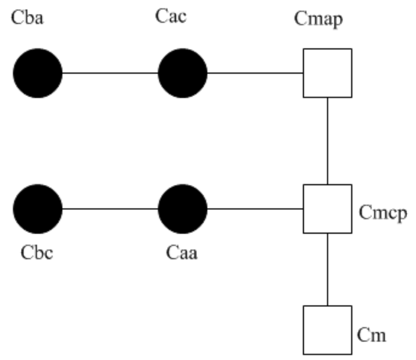
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Cba=Cac+Cmap	Comparación 1	
Cbc=Caa+Cmcp	Comparación 1	
Cmcp=Cm+Cmap	Comparación 1	

Figura 3.29: Lectura 3 del problema *Calcetines.*

<u>*Cajas*</u>

Si en 4 cajas iguales hay 240 galletas, ¿cuántas habrá en 15 cajas?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de cajas = *C* = 4
Número de galletas en las cuatro cajas = *G* = 240
Número de cajas final = *Cf* = 15
Número de galletas por caja = *Gc*
Número de galletas en las 15 cajas = *Gt*

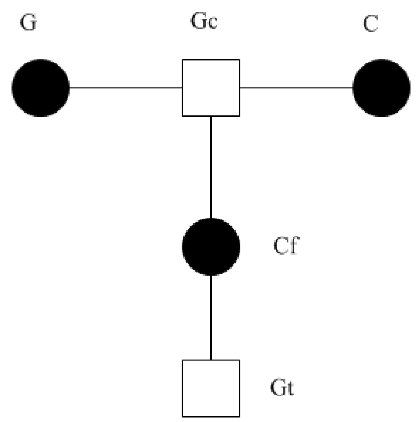
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
G=Gc·C *Gt=Gc·Cf*	Isomorfismo de medidas 2 Isomorfismo de medidas 1	

Figura 3.30: Lectura 1 del problema *Cajas*.

<u>*Cromos*</u>

Una caja contiene 35 paquetes con 5 cromos en cada paquete. Otra caja contiene 43 paquetes con 4 cromos en cada paquete. ¿Cuántos cromos hay más en la primera caja que en la segunda?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de paquetes de cromos que tiene la primera caja = *Pa* = 35
Cantidad de cromos que tiene cada paquete de la primera caja = *Cpa* = 5
Número de paquetes de cromos que tiene la segunda caja = *Pb* = 43
Cantidad de cromos que tiene cada paquete de la segunda caja = *Cpb* = 4
Número de cromos que tiene la primera caja = *Nca*
Número de cromos que tiene la segunda caja = *Ncb*
Número de cromos que tiene la primera caja más que la segunda = *Cm*

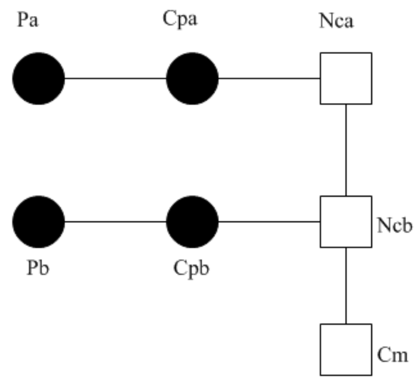
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Nca=Pa·Cpa	Isomorfismo de medidas 1	
Ncb=Pb·Cpb	Isomorfismo de medidas 1	
Nca=Ncb+Cm	Comparación 1	

Figura 3.31: Lectura 1 del problema *Cromos.*

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de paquetes de cromos que tiene la primera caja = *Pa* = 35
Cantidad de cromos que tiene cada paquete de la primera caja = *Cpa* = 5
Número de paquetes de cromos que tiene la segunda caja = *Pb* = 43
Cantidad de cromos que tiene cada paquete de la segunda caja = *Cpb* = 4
Diferencia de cromos entre un paquete de la primera y segunda caja = *Dc*
Cromos de más que tienen los paquetes de la primera caja = *Cma*
Paquetes de más que tiene la segunda caja = *Pmb*
Cromos de más que tienen los paquetes de la segunda caja = *Cmb*
Número de cromos que tiene la primera caja más que la segunda = *Cm*

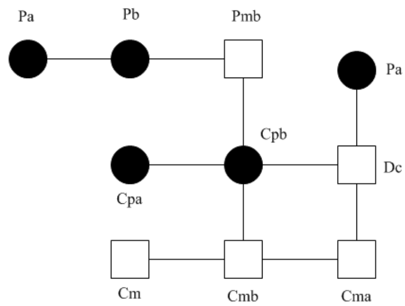
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Cpa=Cpb+Dc	Comparación 1	
Cma=Dc·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Pb=Pa+Pmb	Comparación 1	
Cmb=Pmb·Cpb	Isomorfismo de medidas 1	
Cma=Cmb+Cm	Comparación 1	

Figura 3.32: Lectura 2 del problema *Cromos.*

3.3.2.2. LA COLECCIÓN DE PROBLEMAS DE LA SESIÓN 2 EN LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

Respecto a las estructuras semánticas presentes en las distintas lecturas de los problemas de la sesión 2, el análisis cuantitativo se recoge en la Tabla 3.2. Aunque aquí se sigue trabajando la estructura de isomorfismo de medidas 1, podemos observar un mayor peso de problemas con estructuras semánticas de isomorfismo de medidas 2 y 3. En esta sesión las estructuras de cambio se reducen exclusivamente a la presencia en las dos lecturas de un problema, desapareciendo por completo las estructuras de comparación y manteniéndose un buen número de etapas de combinación 1.

Tabla 3.2.

Distribución de las distintas estructuras semánticas presentes en los problemas de la sesión 2.

Problema	Lectura	Cambio 1	Cambio 2	Combinación 1	Combinación 2	Isomorfismo 1	Isomorfismo 2 (DP)	Isomorfismo 3 (DC)
Los globos	L1	-	-	1	-	-	1	-
La granja	L1	-	-	-	-	1	-	1
La herencia	L1	-	-	1	-	1	1	-
	L2	-	-	1	1	1	1	-
La montaña rusa	L1	-	-	1	-	2	-	1
	L2	-	-	1	-	2	-	2
La jefa de compras	L1	-	-	-	1	1	-	1
El multicine	L1	-	-	-	-	-	2	-
	L2	-	-	-	-	-	2	-
	L3	-	-	-	-	1	1	-
La recaudación del tren	L1	1	1	-	-	1	1	-
	L2	-	1	1	-	2	1	-
Ventanas	L1	-	-	1	-	1	-	-
	L2	-	-	1	-	2	-	-
Excursión	L1	-	-	1	-	1	-	1
Bolígrafos	L1	-	-	1	-	–	-	2

<u>*Los Globos*</u>

En una fiesta se van a repartir 4480 globos. Los globos vienen almacenados en cajas. Si se han gastado 21 cajas de globos y aún quedan 11 por gastar, ¿cuántos globos hay en cada caja?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Globos a repartir = G = 4480
Cajas gastadas = Cg = 21
Cajas que quedan por gastar = Cq = 11
Número de cajas = C
Globos por caja = Gc

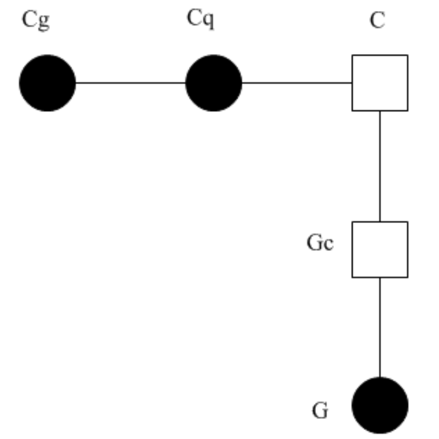
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
C=Cg+Cq *G=Gc·C*	Combinación 1 Isomorfismo de medidas 2	

Figura 3.33: Lectura 1 del problema *Los Globos.*

<u>*La Granja*</u>

Han transportado a una granja un rebaño de ovejas usando 8 camiones con 102 ovejas cada uno. Si las ovejas se van a ubicar en corrales de 48 plazas, ¿cuántos corrales habrá en la granja?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de camiones = *Ncam* = 8
Número de ovejas en cada camión = *Ocam* = 102
Número de ovejas en cada corral = *Ocor* = 48
Número de ovejas del rebaño = *R*
Número de corrales = *Ncor*

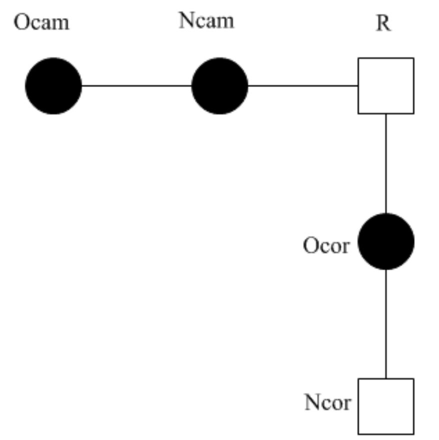
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
R=Ocam·Ncam *R=Ocor·Ncor*	Isomorfismo de medidas 1 Isomorfismo de medidas 3 (División cuotitiva)	

Figura 3.34: Lectura 1 del problema *La Granja*.

<u>*La Herencia*</u>

Juan y Andrés han recibido una herencia de 25795 euros. Si a Juan le tocan dos partes y a Andrés le tocan 5 partes, ¿cuánto dinero le corresponde a Juan?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Dinero de la herencia = *H* = 25795
Número de partes que le tocan a Juan = *Pj* = 2
Número de partes que le tocan a Andrés = *Pa* = 5
Total de partes = *P*
Dinero que toca a una parte = *Hp*
Dinero que le corresponde a Juan = *Hj*

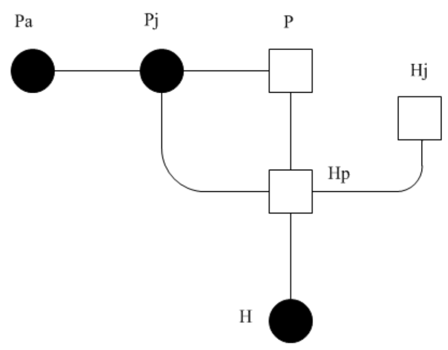
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pa+Pj *H=Hp·P* *Hj=Hp·Pj*	Combinación 1 Isomorfismo de medidas 2 Isomorfismo de medidas 1	

Figura 3.35: Lectura 1 del problema *La Herencia*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Dinero de la herencia = *H* = 25795
Número de partes que le tocan a Juan = *Pj* = 2
Número de partes que le tocan a Andrés = *Pa* = 5
Total de partes = *P*
Dinero que toca a una parte = *Hp*
Dinero que le corresponde a Andrés = *Ha*
Dinero que le corresponde a Juan = *Hj*

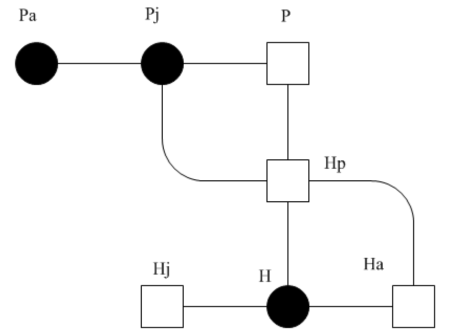
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pa+Pj	Combinación 1	
H=Hp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Ha=Hp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
H=Ha+Hj	Combinación 2	

Figura 3.36: Lectura 2 del problema *La Herencia*.

La Montaña rusa

Para la inauguración de una montaña rusa de un parque de atracciones han llegado 56 autobuses llenos con 45 personas cada uno y 168 automóviles con sus 5 plazas ocupadas. Si en cada viaje de la montaña rusa caben 42 personas, ¿cuántos viajes serán necesarios para que suban todos a la atracción?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de autobuses = *Nbus* = 56
Número de personas en cada autobús = *Pubus* = 45
Número de automóviles = *Ncoc* = 168
Número de personas en cada coche = *Pucoc*= 5
Número de personas que suben en un viaje = *Pv* = 42
Total de personas que van en autobús = *Pbus*
Total de personas que van en coche = *Pcoc*
Total de personas que asisten = *P*
Número de viajes para que todos suban = *Nv*

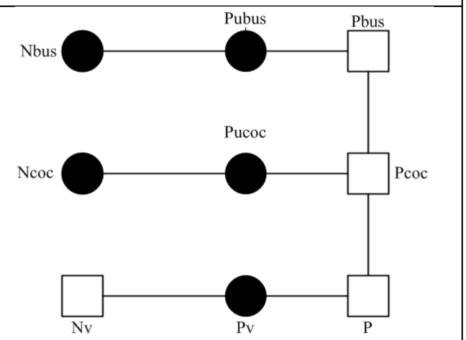
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pbus=Nbus·Pubus	Isomorfismo de medidas 1	
Pcoc=Ncoc·Pucoc	Isomorfismo de medidas 1	
P=Pbus+Pcoc	Combinación 1	
P=Nv·Pv	Isomorfismo de medidas 3	

Figura 3.37: Lectura 1 del problema *La Montaña rusa*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de autobuses = $Nbus$ = 56
Número de personas en cada autobús = $Pubus$ = 45
Número de automóviles = $Ncoc$ = 168
Número de personas en cada coche = $Pucoc$= 5
Número de personas que suben en un viaje = Pv = 42
Total de personas que van en autobús = $Pbus$
Total de personas que van en coche = $Pcoc$
Número de viajes para que suban los que van en autobús = Nvb
Número de viajes para que suban los que van en coche = Nvc
Número de viajes para que todos suban = Nv

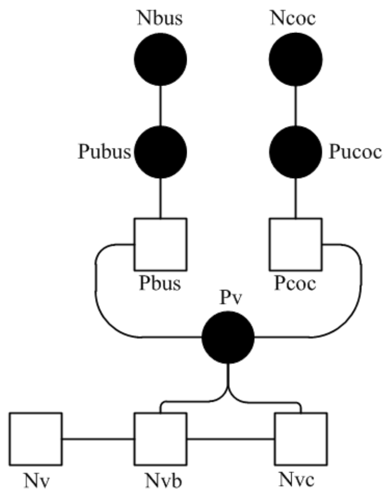
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$Pbus=Nbus \cdot Pubus$	Isomorfismo de medidas 1	
$Pcoc=Ncoc \cdot Pucoc$	Isomorfismo de medidas 1	
$Pbus=Pv \cdot Nvb$	Isomorfismo de medidas 3	
$Pcoc=Pv \cdot Nvc$	Isomorfismo de medidas 3	
$Nv=Nvb+Nvc$	Combinación 1	

Figura 3.38: Lectura 2 del problema *La Montaña rusa*.

<u>*La Jefa de compras*</u>

La jefa de compras de una empresa ha gastado 13052 euros en comprar 13 ordenadores a 900 euros cada uno y varias impresoras a 169 euros cada una. ¿Cuántas impresoras ha comprado?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Total gastado = Dt = 13052
Número de ordenadores = No = 13
Precio de un ordenador = Puo = 900
Precio de una impresora = Piu= 169
Total gastado en ordenadores = Do
Total gastado en impresoras = Di
Número de impresoras = Ni

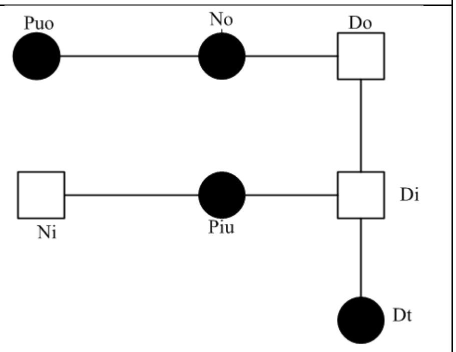
<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Estructura semántica</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>Do=Puo·No</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Dt=Do+Di</td><td>Combinación 2</td></tr>
<tr><td>Di=Piu·Ni</td><td>Isomorfismo de medidas 3</td></tr>
</table>

Figura 3.39: Lectura 1 del problema *La Jefa de compras.*

<u>*El Multicine*</u>

Un multicine dispone de 6 salas iguales. Sabemos que se llenaron las tardes del viernes, sábado y domingo. En total asistieron 720 espectadores. ¿Cuántas personas caben en cada sala?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de salas = *Ns* = 6
Número total de espectadores = *Te* = 720
Número de tardes = *Nt* = 3
Número de espectadores que acudieron cada tarde = *Ted*
Número de espectadores que caben en cada sala = *Tes*

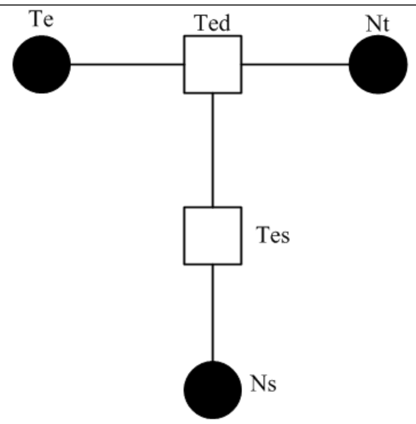
<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Estructura semántica</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>Te=Ted·Nt</td><td>Isomorfismo de medidas 2</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Ted=Tes·Ns</td><td>Isomorfismo de medidas 2</td></tr>
</table>

Figura 3.40: Lectura 1 del problema *El Multicine.*

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de salas = *Ns* = 6
Número total de espectadores = *Te* = 720
Número de tardes = *Nt* = 3
Número de espectadores por sala en las tres tardes = *Nes*
Número de espectadores que caben en cada sala = *Tes*

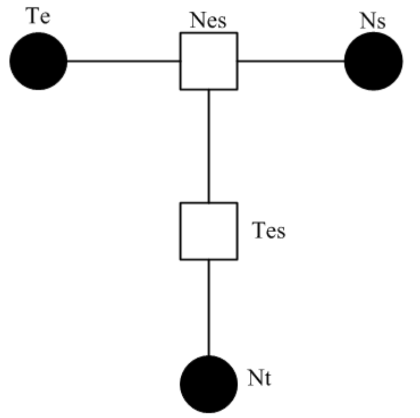
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Te=Nes·Ns *Nes=Tes·Nt*	Isomorfismo de medidas 2 Isomorfismo de medidas 2	

Figura 3.41: Lectura 2 del problema *El Multicine*.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Número de salas = *Ns* = 6
Número total de espectadores = *Te* = 720
Número de tardes = *Nt* = 3
Número total de proyecciones = *Np*
Número de espectadores que caben en cada sala = *Tes*

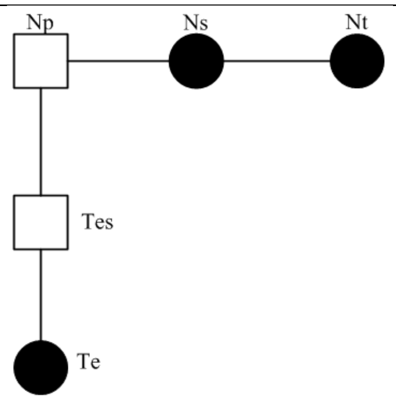
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Np=Ns·Nt *Te=Tes·Np*	Isomorfismo de medidas 1 Isomorfismo de medidas 2	

Figura 3.42: Lectura 3 del problema *El Multicine*.

La Recaudación del tren

La recaudación obtenida un sábado por los billetes de los 275 viajeros de un tren ha sido 8800 euros. Si sabemos que el domingo viajaron 15 personas menos y que un billete cuesta 4 euros más que el sábado, ¿cuánto dinero se recaudó el domingo?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Viajeros el sábado = *Vs* = 275
Recaudación del sábado = *Rs* = 8800
Viajeros de menos el domingo = *Vsd* = 15
Precio de más por billete el domingo = *Psd* = 4
Precio de un billete el sábado = *Ps*
Viajeros el domingo = *Vd*
Precio de un billete el domingo = *Pd*
Recaudación del domingo = *Rd*

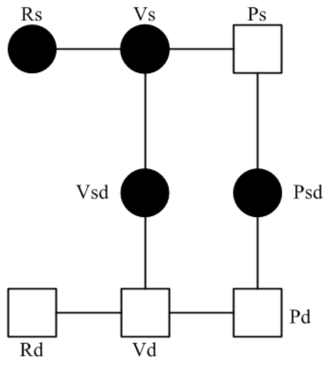
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Rs=Vs·Ps	Isomorfismo de medidas 2	
Vs=Vd+Vsd	Cambio 2	
Pd=Ps+Psd	Cambio 1	
Rd=Vd·Pd	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 3.43: Lectura 1 del problema *La Recaudación del tren*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Viajeros el sábado = *Vs* = 275
Recaudación del sábado = *Rs* = 8800
Viajeros de menos el domingo = *Vsd* = 15
Precio de más por billete el domingo = *Psd* = 4
Precio de un billete el sábado = *Ps*
Viajeros el domingo = *Vd*
Dinero recaudado el sábado por menos pasajeros = *Drms*
Dinero recaudado de más el domingo por mayor precio del billete = *Ir*
Recaudación del domingo = *Rd*

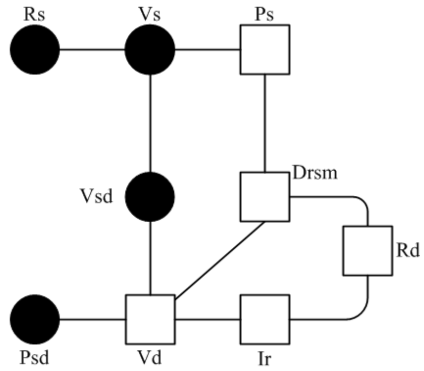
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Rs=Vs·Ps	Isomorfismo de medidas 2	
Vs=Vd+Vsd	Cambio 2	
Drms=Vd·Ps	Isomorfismo de medidas 1	
Ir=Vd·Psd	Isomorfismo de medidas 1	
Rd=Drms+Ir	Combinación 1	

Figura 3.44: Lectura 2 del problema *La Recaudación del tren*.

<u>*Ventanas*</u>

Un edificio tiene 9 pisos y en cada piso hay 18 ventanas grandes y 12 ventanas pequeñas. ¿Cuántas ventanas hay en total en el edificio?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de pisos del edificio = *P* = 9
Número de ventanas grandes en cada piso = *Vg* = 18
Número de ventanas pequeñas en cada piso = *Vp* = 12
Número de ventanas en cada piso = *Vpp*
Número de ventanas = *Vt*

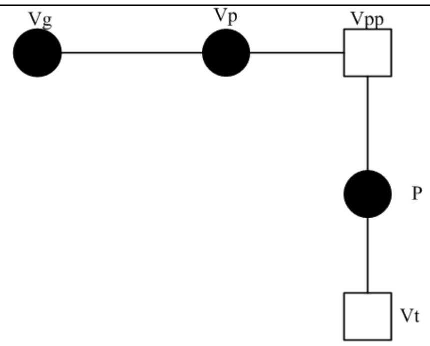
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Vpp=Vg+Vp	Combinación 1	
Vt=Vpp·P	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 3.45: Lectura 1 del problema *Ventanas.*

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de pisos del edificio = *P* = 9
Número de ventanas grandes en cada piso = *Vg* = 18
Número de ventanas pequeñas en cada piso = *Vp* = 12
Número de ventanas grandes = *Vgt*
Número de ventanas pequeñas = *Vpt*
Número de ventanas = *Vt*

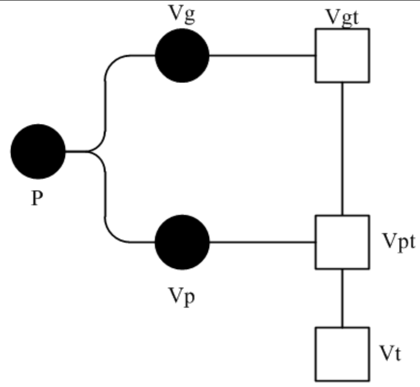
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Vgt=Vg·P *Vpt=Vp·P* *Vt=Vgt+Vpt*	Isomorfismo de medidas 1 Isomorfismo de medidas 1 Combinación 1	

Figura 3.46: Lectura 2 del problema *Ventanas.*

<u>*Excursión*</u>

Hoy han ido de excursión los alumnos de 7 clases de primaria acompañados de 5 profesores. Si en cada clase hay 25 alumnos, ¿cuántos autobuses de 45 plazas habrán contratado?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Clases de primaria que van de excursión = *Cl* = 7
Profesores que van de excursión = *P* = 5
Número de alumnos en cada clase = *Na* = 25
Número de plazas de cada autobús = *Pa*= 45
Número de alumnos que van de excursión = *Nat*
Profesores y alumnos que van de excursión = *Nap*
Número de autobuses que han contratado = *A*

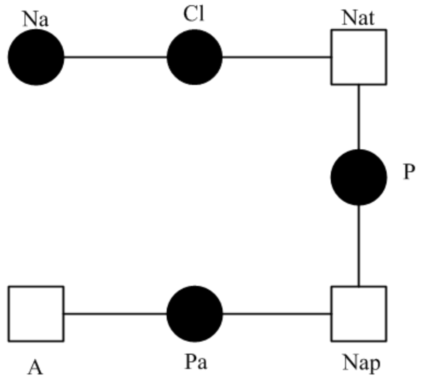
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Nat=Na·Cl *Nap=Nat+P* *Nap=Pa·A*	Isomorfismo de medidas 1 Combinación 1 Isomorfismo de medidas 3	

Figura 3.47: Lectura 1 del problema *Excursión*.

<u>Bolígrafos</u>

Una empresa fabrica 220 bolígrafos azules y 342 rotuladores. Si los bolígrafos azules los tiene que empaquetar en cajas de 4 bolígrafos y los rotuladores en cajas de 3, ¿cuántas cajas se necesitarán en total?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de bolígrafos azules = *Ba* = 220
Número de rotuladores = *Br* = 342
Número de bolígrafos azules en cada caja = *Bac* = 4
Número de rotuladores en cada caja = *Brc*= 3
Cajas de bolígrafos azules = *Nca*
Cajas de rotuladores = *Ncr*
Número total de cajas = *Ct*

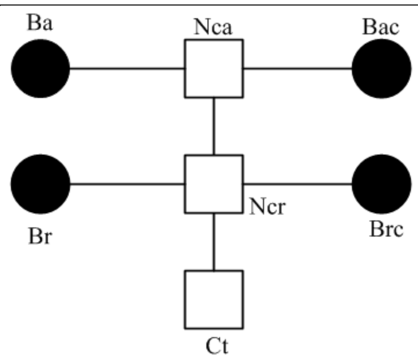
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Ba=Nca·Bac *Br=Ncr·Brc* *Ct=Ncr+Nca*	Isomorfismo de medidas 3 Isomorfismo de medidas 3 Combinación 1	

Figura 3.48: Lectura 1 del problema *Bolígrafos*.

3.3.2.3. LA COLECCIÓN DE PROBLEMAS DE LA SESIÓN 3 EN LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA.

Respecto a las estructuras semánticas presentes en las distintas lecturas de los problemas de la sesión 3, el análisis cuantitativo se recoge en la Tabla 3.3. De nuevo observamos un trabajo importante con problemas con estructuras semánticas de isomorfismo de medidas 1 y de cambio. Por otro lado, un incremento de estructuras aditivas de combinación 2 para que los estudiantes trabajen esta estructura que había aparecido en pocas ocasiones en las dos secuencias de enseñanza anteriores.

Tabla 3.3.

Distribución de las distintas estructuras semánticas presentes en los problemas de la sesión 3.

Problema	Lectura	Cambio 2	Cambio 4	Combinación 1	Combinación 2	Isomorfismo 1	Isomorfismo 2 (DP)	Isomorfismo 3 (DC)
El bodeguero	L1	1	-	-	-	-	-	-
Aceite y cerezas	L1	-	-		1	2	-	-
La lana	L1	-	-	-	-	1	-	-
Aceite Rico	L1	-	-	-	1	1	1	-
	L2	-	-	-	1	1	1	-
Las almendras	L1	-	-	-	-	2	-	-
	L2	-	-	-	-	2	-	-
Los corrales	L1	1	-	-	-	-	1	-
El olvido	L1	1	-	-	-	1	1	-
La carnicería	L1	1	-	1	-	2	-	-
	L2	1	-	2	-	1	-	-
	L3	2	-	1	-	1	-	-
Los planos	L1	-	-	1	-	1	1	-
	L2	1	-	1	-	1	1	-
La granja de animales	L1	-	1	1	-	3	-	-
	L2	-	1	1	-	4	-	-
	L3	-	1	1	-	4	-	-
	L4	-	-	-	1	4	-	-
	L5	-	-	-	1	4	-	-
	L6	-	2	-	-	4	-	-
	L7	-	2	-	-	4	-	-
	L8	-	2	-	-	4	-	-
	L9	-	2	-	-	4	-	-

El Bodeguero

De la cosecha de este año un bodeguero ha embotellado 1577 botellas de vino. Si se han vendido 1089, ¿cuántas le quedan?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Botellas embotelladas = Be = 1577
Botellas vendidas = Bv = 1089
Botellas restantes = Br

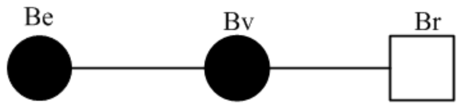
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Be=Bv+Br	Cambio 2	

Figura 3.49: Lectura 1 del problema *El Bodeguero*.

<u>*Aceite y cerezas*</u>

He vendido 750 litros de aceite a un precio de 4 euros el litro. Con el dinero que he ganado, he comprado 120 kilos de cerezas a 2 euros el kilo. ¿Cuánto dinero me queda?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Litros de aceite = *A* = 750
Precio de un litro de aceite = *Pau* = 4
Kilos de cerezas = *C* = 120
Precio de un kilo de cerezas = *Pcu*= 2
Dinero ganado en la venta del aceite = *Da*
Dinero gastado en la compra de las cerezas = *Dc*
Dinero restante = *D*

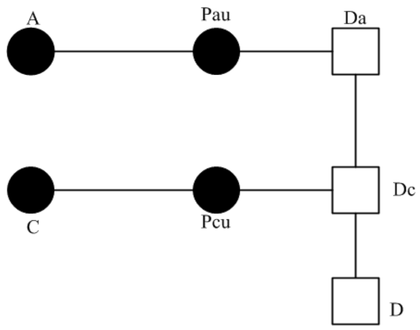
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Da=A·Pau *Dc=C·Pcu* *Da=D+Dc*	Isomorfismo de medidas 1 Isomorfismo de medidas 1 Combinación 2	

Figura 3.50: Lectura 1 del problema *Aceite y cerezas*.

<u>*La Lana*</u>

Si de una oveja se obtienen 3 kilos de lana, ¿cuántos kilos se obtendrán de un rebaño de 1583 ovejas?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Lana obtenida de una oveja = Lu = 3
Número de ovejas = O = 1583
Lana obtenida en total = L

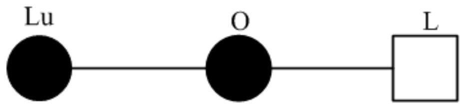
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$L=O \cdot Lu$	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 3.51: Lectura 1 del problema *La Lana*.

<u>*Aceite Rico*</u>

Un supermercado ha pagado 2720 euros por la compra de 680 botellas de aceite a las empresas BuenAceite y RicoRico. Sabiendo que a la empresa RicoRico le compró 230 botellas y que el precio de una botella de BuenAceite es el mismo que el de RicoRico, ¿cuánto dinero recibió la empresa BuenAceite?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Dinero total gastado por el supermercado = D = 2720
Número total de botellas compradas = B = 680
Número de botellas compradas a RicoRico = Br = 230
Precio de una botella de aceite = Pb
Número de botellas compradas a BuenAceite = Bb
Dinero pagado a BuenAceite = Db

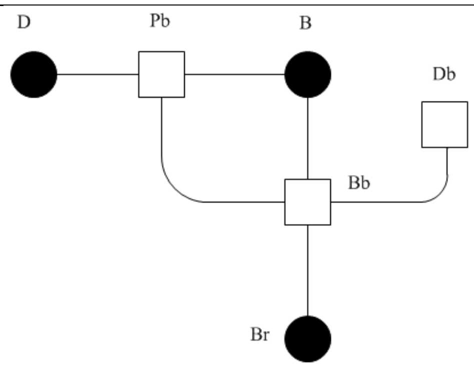
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$D=B \cdot Pb$ $B=Bb+Br$ $Db=Bb \cdot Pb$	Isomorfismo de medidas 2 Combinación 2 Isomorfismo de medidas 1	

Figura 3.52: Lectura 1 del problema *Aceite Rico*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Dinero total gastado por el supermercado = *D* = 2720
Número total de botellas compradas = *B* = 680
Número de botellas compradas a RicoRico = *Br* = 230
Precio de una botella de aceite = *Pb*
Dinero pagado a RicoRico = *Dr*
Dinero pagado a BuenAceite = *Db*

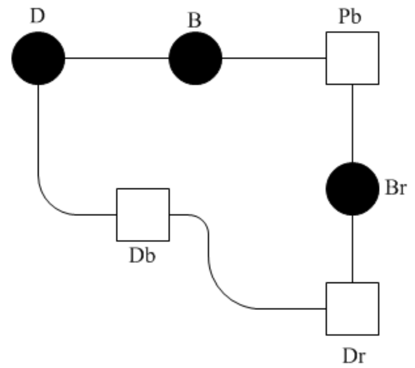
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$D=B \cdot Pb$	Isomorfismo de medidas 2	
$Dr=Br \cdot Pb$	Isomorfismo de medidas 1	
$D=Db+Dr$	Combinación 2	

Figura 3.53: Lectura 2 del problema *Aceite Rico*.

<u>*Las Almendras*</u>

¿Cuál es el precio total de 123 paquetes de almendras de 5 kg cada uno, si el precio de 1 kilo de almendras es de 2 euros?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de paquetes de almendras = *Np* = 123
Número de kilos de almendras en cada paquete = *Kau* = 5
Precio de un kilo de almendras = *Pau* = 2
Número total de kilos de almendras = *K*
Precio total de los paquetes de almendras = *P*

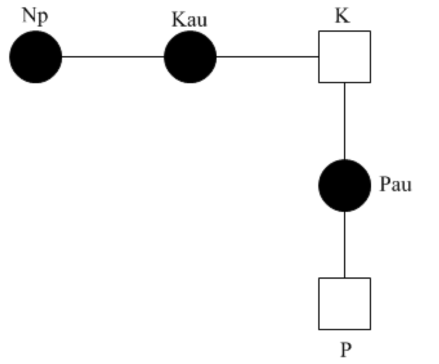
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
K=Np·Kau *P=K·Pau*	Isomorfismo de medidas 1 Isomorfismo de medidas 1	

Figura 3.54: Lectura 1 del problema *Las Almendras.*

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de paquetes de almendras = *Np* = 123
Número de kilos de almendras en cada paquete = *Kau* = 5
Precio de un kilo de almendras = *Pau* = 2
Precio de un paquete = *Pp*
Precio total de los paquetes de almendras = *P*

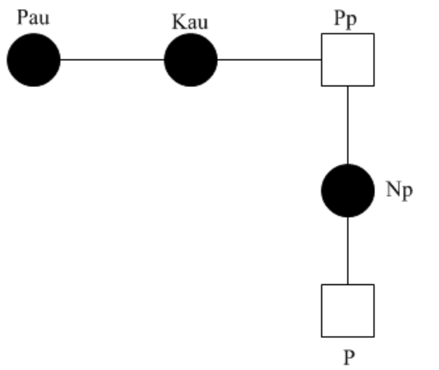
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pp=Pau·Kau *P=Np·Pp*	Isomorfismo de medidas 1 Isomorfismo de medidas 1	

Figura 3.55: Lectura 2 del problema *Las Almendras.*

<u>*Los Corrales*</u>

En una granja hay 180 ovejas en dos corrales de distinto tamaño. Si sabemos que en el corral grande hay 30 ovejas más que en el pequeño, ¿cuántas ovejas hay en el corral pequeño?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de ovejas = *No* = 180
Número de corrales = *Nc* = 2
Ovejas de más en el corral grande = *Om* = 30
Ovejas en los corrales sin las treinta de más = *Od*
Ovejas en el corral pequeño = *Op*

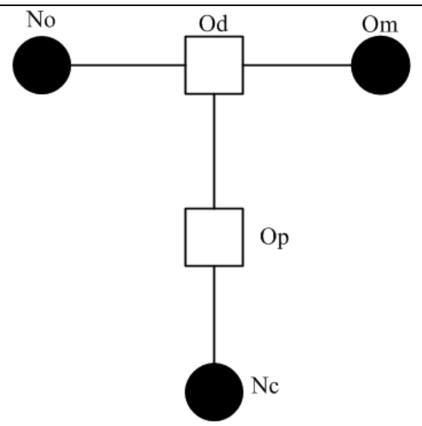
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$No=Od+Om$ $Od=Op \cdot Nc$	Cambio 2 Isomorfismo de medidas 2	

Figura 3.56: Lectura 1 del problema *Los Corrales.*

<u>*El Olvido*</u>

Un grupo de 15 amigos se compraron para merendar una hamburguesa y un refresco, pero a seis de ellos se les olvidó el dinero. Los demás decidieron pagarles la merienda y tuvieron que dar 20 euros cada uno. ¿Cuánto costaba cada merienda?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de amigos = *N* = 15
Amigos a los que se les olvidó el dinero = *No* = 6
Lo que tuvieron que pagar los que tenían dinero = *Puo* = 20
Amigos que sí pagaron = *Np*
Precio de todas las meriendas = *P*
Precio de una merienda = *Pu*

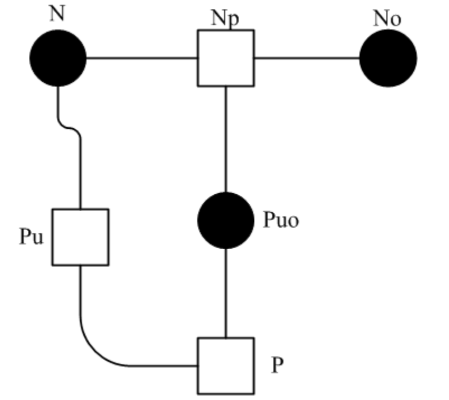
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
N=Np+No *P=Puo·Np* *P=Pu·N*	Cambio 2 Isomorfismo de medidas 1 Isomorfismo de medidas 2	

Figura 3.57: Lectura 1 del problema *El Olvido*.

<u>*La Carnicería*</u>

En la carnicería, hemos comprado 3 kilos de carne de ternera a 13 euros el kilo y carne de cordero por valor de 26 euros. He pagado con dos billetes de 50 euros. ¿Cuánto dinero me han devuelto?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Kilos de ternera = *Kt* = 3
Precio de un kilo de ternera = *Put* = 13
Precio del cordero comprado = *Pc* = 26
Número de billetes = *N* = 2
Valor de un billete = *V* = 50
Precio de la ternera comprada = *Pt*
Precio total de la carne = *P*
Dinero entregado = *E*
Dinero devuelto = *D*

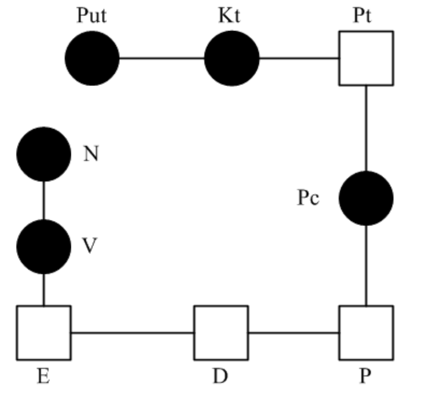
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pt=Put·Kt *P=Pt+Pc* *E=V·N* *E=P+D*	Isomorfismo de medidas 1 Combinación 1 Isomorfismo de medidas 1 Cambio 2	

Figura 3.58: Lectura 1 del problema *La Carnicería*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Kilos de ternera = *Kt* = 3
Precio de un kilo de ternera = *Put* = 13
Precio del cordero comprado = *Pc* = 26
Valor de un billete = *V* = 50
Precio de la ternera comprada = *Pt*
Precio total de la carne = *P*
Dinero entregado = *E*
Dinero devuelto = *D*

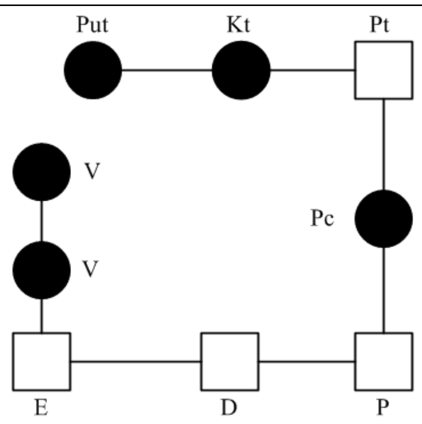
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pt=Put·Kt	Isomorfismo de medidas 1	
P=Pt+Pc	Combinación 1	
E=V+V	Combinación 1	
E=P+D	Cambio 2	

Figura 3.59: Lectura 2 del problema *La Carnicería*.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Kilos de ternera = *Kt* = 3
Precio de un kilo de ternera = *Put* = 13
Precio del cordero comprado = *Pc* = 26
Valor de un billete = *V* = 50
Precio de la ternera comprada = *Pt*
Dinero que sobra al pagar la ternera con un billete = *Dst*
Dinero que sobra al pagar el cordero con un billete = *Dsc*
Dinero devuelto = *D*

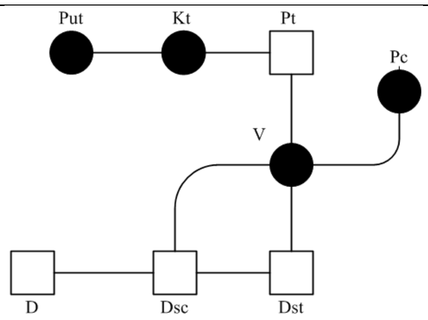
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pt=Put·Kt	Isomorfismo de medidas 1	
V=Pt+Dst	Cambio 2	
V=Pc+Dsc	Cambio 2	
D=Dsc+Dst	Combinación 1	

Figura 3.60: Lectura 3 del problema *La Carnicería*.

<u>*Los Planos*</u>

Ana y Miguel han ganado 36000 euros por hacer los planos de un puente. Como no han trabajado el mismo tiempo se lo deben repartir de forma que a Ana le toquen cinco partes de lo que han ganado y a Miguel, siete partes. ¿Cuánto dinero le corresponde a Miguel?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Total de dinero que se recibe de los planos = *D* = 36000
Número de partes que le tocan a Ana = *Pa* = 5
Número de partes que le tocan a Miguel = *Pm* = 7
Total del número de partes = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Miguel = *Dm*

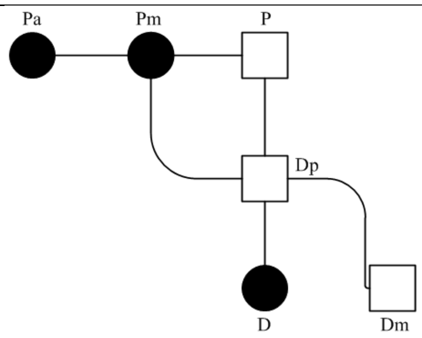
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pm+Pa	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 3.61: Lectura 1 del problema *Los Planos*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Total de dinero que se recibe de los planos = *D* = 36000
Número de partes que le tocan a Ana = *Pa* = 5
Número de partes que le tocan a Miguel = *Pm* = 7
Total del número de partes = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Ana = *Da*
Dinero que le corresponde a Miguel = *Dm*

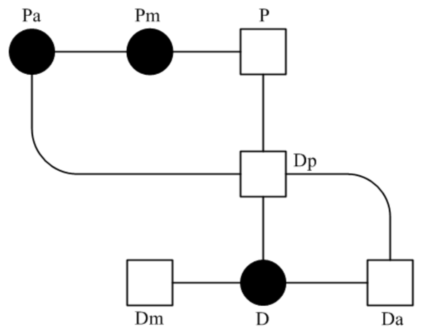
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pm+Pa *D=Dp·P* *Da=Dp·Pa* *D=Dm+Da*	Combinación 1 Isomorfismo de medidas 2 Isomorfismo de medidas 1 Cambio 2	

Figura 3.62: Lectura 2 del problema *Los Planos*.

<u>*La Granja de animales*</u>

En una granja se gastan todos los días 150 kilos de pienso y 20 de heno para alimentar a los animales. El kilo de pienso cuesta 3 euros y el de heno, 4 euros. Si el dinero que pueden gastar en un año es de 200000 euros, ¿cuánto dinero sobrará?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Dinero gastado en pienso al día = *Dpd*
Dinero gastado en heno al día = *Dhd*
Dinero gastado en comida al día = *Dd*
Dinero gastado en comida al año = *Dga*

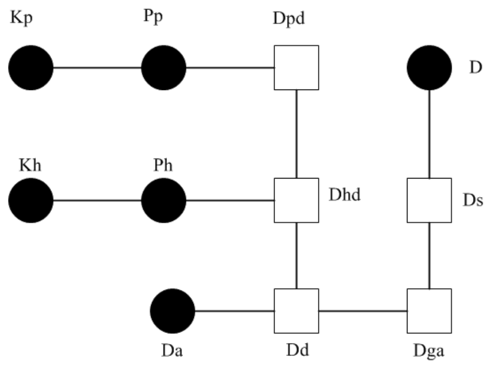
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Dpd=Kp·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dhd=Kh·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
Dd=Dpd+Dhd	Combinación 1	
Dga=Dd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dga+Ds	Cambio 4	

Figura 3.63: Lectura 1 del problema *La Granja de animales*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Kilogramos de pienso que se gastan al año = *Kpa*
Kilogramos de heno que se gastan al año = *Kha*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero gastado en comida al año = *Dga*

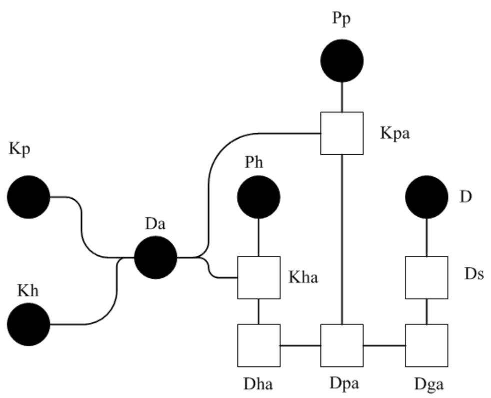
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kpa=Kp·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kha=Kh·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Kpa·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Kha·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
Dga=Dpa+Dha	Combinación 1	
D=Dga+Ds	Cambio 4	

Figura 3.64: Lectura 2 del problema *La Granja de animales*.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = Kp = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = Kh = 20
Precio de cada kilo de pienso = Pp = 3
Precio de cada kilo de heno = Ph = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = D = 200000
Dinero que sobra = Ds
Días de un año = Da = 365
Dinero gastado en pienso al día = Dpd
Dinero gastado en heno al día = Dhd
Dinero gastado en pienso al año = Dpa
Dinero gastado en heno al año = Dha
Dinero gastado en comida al año = Dga

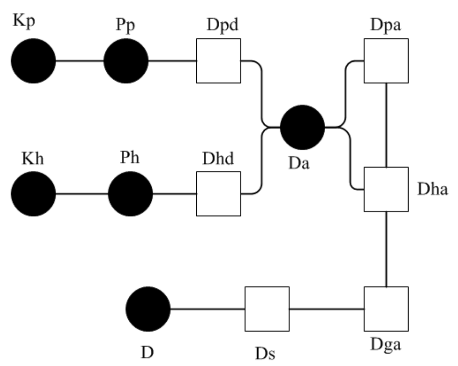
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$Dpd=Kp \cdot Pp$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dhd=Kh \cdot Ph$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dpa=Dpd \cdot Da$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dha=Dhd \cdot Da$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dga=Dpa+Dha$	Combinación 1	
$D=Dga+Ds$	Cambio 4	

Figura 3.65: Lectura 3 del problema *La Granja de animales*.

Lectura 4

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = Kp = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = Kh = 20
Precio de cada kilo de pienso = Pp = 3
Precio de cada kilo de heno = Ph = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = D = 200000
Dinero que sobra = Ds
Días de un año = Da = 365
Dinero gastado en pienso al día = Dpd
Dinero gastado en heno al día = Dhd
Dinero gastado en pienso al año = Dpa
Dinero gastado en heno al año = Dha

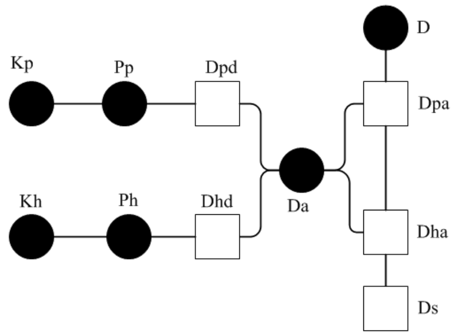
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Dpd=Kp·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dhd=Kh·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Dpd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Dhd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dpa+Dha+Ds	Combinación 2	

Figura 3.66: Lectura 4 del problema *La Granja de animales*.

Lectura 5

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Kilogramos de pienso que se gastan al año = *Kpa*
Kilogramos de heno que se gastan al año = *Kha*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*

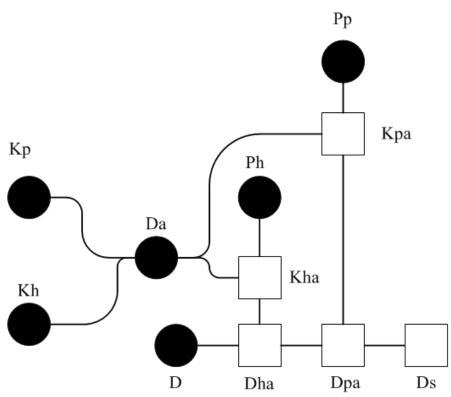
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kpa=Kp·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kha=Kh·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Kpa·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Kha·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dpa+Dha+Ds	Combinación 2	

Figura 3.67: Lectura 5 del problema *La Granja de animales*.

Lectura 6

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Dinero gastado en pienso al día = *Dpd*
Dinero gastado en heno al día = *Dhd*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero que sobra tras el gasto anual en pienso = *Dsp*

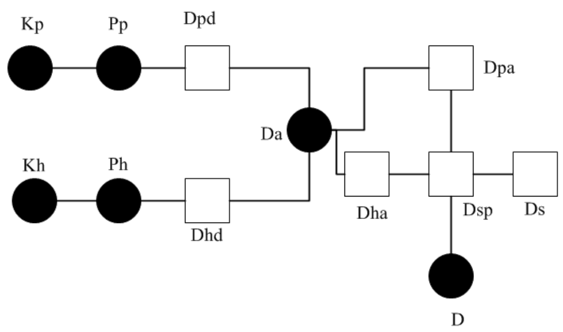
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Dpd=Kp·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dhd=Kh·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Dpd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Dhd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dpa+Dsp	Cambio 4	
Dsp=Dha+Ds	Cambio 4	

Figura 3.68: Lectura 6 del problema *La Granja de animales*.

Lectura 7

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Dinero gastado en pienso al día = *Dpd*
Dinero gastado en heno al día = *Dhd*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero que sobra tras el gasto anual en pienso = *Dsh*

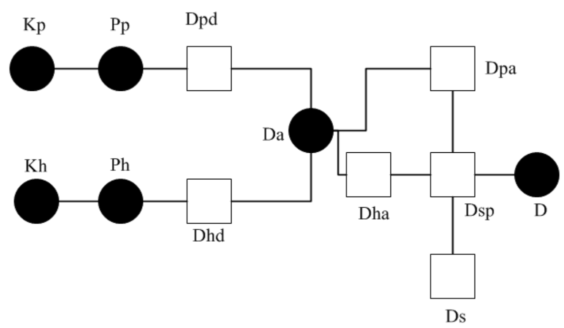
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Dpd=Kp·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dhd=Kh·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Dpd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Dhd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dha+Dsh	Cambio 4	
Dsh=Dpa+Ds	Cambio 4	

Figura 3.69: Lectura 7 del problema *La Granja de animales*.

Lectura 8

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Kilogramos de pienso que se gastan al año = *Kpa*
Kilogramos de heno que se gastan al año = *Kha*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero que sobra tras el gasto anual en pienso = *Dsp*

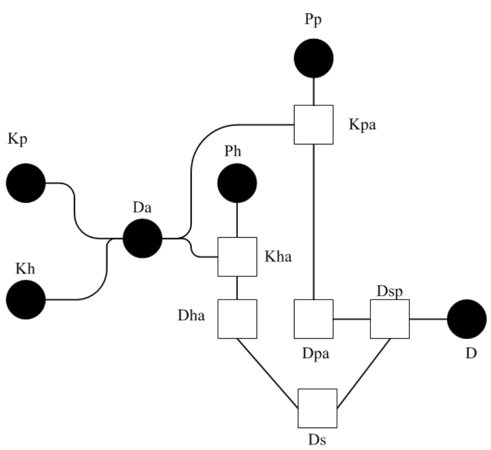
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kpa=Kp·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kha=Kh·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Kpa·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Kha·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dpa+Dsp	Cambio 4	
Dsp=Dha+Ds	Cambio 4	

Figura 3.70: Lectura 8 del problema *La Granja de animales*.

Lectura 9

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Kilogramos de pienso que se gastan al año = *Kpa*
Kilogramos de heno que se gastan al año = *Kha*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero que sobra tras el gasto anual en heno = *Dsh*

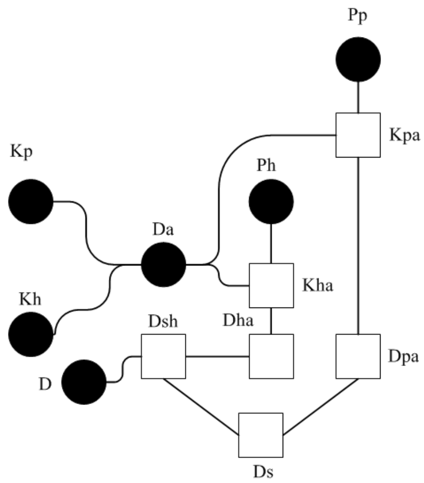
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kpa=Kp·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kha=Kh·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Kpa·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Kha·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dha+Dsh	Cambio 4	
Dsh=Dpa+Ds	Cambio 4	

Figura 3.71: Lectura 9 del problema *La Granja de animales*.

4. Estudio de grupo

4.1. LA FINALIDAD DEL ESTUDIO

El estudio de grupo fue planteado con el propósito de conseguir tres objetivos. En primer lugar, poder contrastar si el sistema tutorial utilizado por los alumnos había provocado en ellos una mejora entre los resultados obtenidos en el cuestionario Pre y Post. En segundo lugar, evaluar la existencia de diferencias en las eventuales ganancias de cada secuencia de enseñanza, es decir, entre los alumnos que habían utilizado el sistema tutorial con ayudas a demanda frente al otro grupo que había carecido de las ayudas. En relación con estos dos objetivos, para poder determinar el efecto de los distintos sistemas tutoriales, se analizaron el número de problemas aritmético verbales que los distintos alumnos eran capaces de resolver correctamente antes de ser instruidos mediante la secuencia de enseñanza correspondiente (cuestionario Pre) e inmediatamente después (cuestionario Post). En tercer y último lugar, el estudio de grupo ofrece una base sobre la que clasificar a los estudiantes pertenecientes a los dos grupos durante la secuencia de enseñanza para poder seleccionar a las parejas que posteriormente participarían en el estudio de casos.

Para intentar lograr estos tres objetivos se diseñaron dos cuestionarios (cuestionario Pre y Post) formados por 10 problemas isomorfos uno a uno. El cuestionario Pre se presentó a los dos grupos de alumnos antes de la secuencia de enseñanza en una única sesión de 60 minutos de duración para cada grupo y en la que participaron todos los estudiantes del grupo. Cada uno de ellos se realizó en la franja horaria en la que el investigador tenía disponibilidad para poder asistir, realizándola en los dos grupos con una diferencia de dos días. Éste fue el cuestionario que sirvió como punto de partida para la fase experimental, aunque hay que resaltar que, en este momento del curso en el que se presentó, los alumnos ya habían trabajado en el área de matemáticas la resolución aritmética de problemas verbales multietapa. Al igual que con el cuestionario Pre, el cuestionario Post se les presentó a todos los alumnos una vez finalizada la secuencia de enseñanza, cuestionario que realizaron también en una única sesión de 60 minutos para cada grupo en la franja horaria donde el investigador tenía disponibilidad. Para intentar evitar que el conocimiento de la prueba pudiera influir en el comportamiento de los estudiantes, los profesores de los alumnos conocieron la prueba el mismo día y a la misma hora en que se les presentó a sus alumnos. Cabe destacar también que, las precauciones que se tomaron para que los estudiantes no intercambiaran información unos con otros, fueron las mismas que se toman en cualquier examen, es decir, estudiantes separados y el investigador y el profesor del área vigilando el examen. Además, ha de señalarse que, como los errores de cálculo no estaban entre los objetivos de esta investigación, el equipo investigador proporcionó a todos los alumnos que participaron en los cuestionarios calculadoras idénticas para que los errores que provienen del propio cálculo interfiriesen lo menos posible en el desarrollo de los distintos problemas y en la investigación. El investigador y el profesor solo estaban autorizados a resolver cuestiones técnicas, referentes a la manera en que tenían que completar los cuestionarios, y no atendieron dudas relacionados con los problemas en sí. A los alumnos se les explicó que debían resolver los problemas presentados mediante una o varias operaciones aritméticas y pasar a otro problema cuando pensasen que ya habían resuelto uno.

Los alumnos fueron informados de que estaban participando en una investigación, sin detallar esta, y los profesores les informaron en ese momento que valorarían en la nota del área el esfuerzo realizado en los cuestionarios y en la secuencia de enseñanza para que así los alumnos de ambos grupos mostrarán mayor implicación e interés.

El cuestionario Pre fue realizado por 52 alumnos de 5º de Educación Primaria distribuidos en dos grupos-clase; 26 alumnos del grupo A y 26 alumnos del grupo B. Esta distribución era la que el centro en el que estudiaban los alumnos tenía predispuesta y fue la que los investigadores adoptaron. El cuestionario Post fue también realizado por 52 alumnos; 26 alumnos del grupo A y 26 del grupo B, es decir, todos los alumnos que realizaron el Pre, realizaron el Post también en la fecha y hora indicada.

4.2. DESCRIPCIÓN DE LOS CUESTIONARIOS

4.2.1 EL CUESTIONARIO PRE

El cuestionario Pre tenía como función evaluar la competencia previa de los estudiantes en la resolución aritmética de problemas verbales. Para ello se intentaron plantear problemas multietapas que contuviesen relaciones entre las cantidades con diferentes estructuras semánticas, es decir, problemas estructuralmente distintos, basándonos en la lectura analítica previa realizada por el investigador y que se detalla posteriormente. Aparte de esto, se seleccionaron problemas que tuvieran distintas lecturas para poder analizar las distintas estrategias utilizadas por los alumnos para la resolución de un mismo problema. Por ejemplo, el problema 2 (*El Colegio*) es un problema con una lectura analítica de tres etapas, dos isomorfismos de medida 1 y una combinación 1. Sin embargo, el problema 5 (*Las Cortinas*) es un problema con dos lecturas analíticas; la primera lectura tendría tres etapas (un cambio 3, un isomorfismo de medidas 2 y un isomorfismo de medidas 3), mientras que la segunda lectura requiere la resolución de cuatro etapas (un cambio 3, un isomorfismo de medidas 2, un isomorfismo de medidas 3 y un cambio 2).

El hecho de considerar problemas con diferentes estructuras semánticas se basa en el hecho de que las diferentes estructuras semánticas ofrecen una amplia gama de interpretaciones de situaciones aditivas y multiplicativas en las que, si el profesor quiere mejorar la habilidad de los estudiantes en aritmética, debe considerar la diversidad y la distribución de las estructuras semánticas cuando presente problemas aritméticos verbales (Schmidt y Weiser, 1995). Además, nos interesaba conocer cómo esa estructura produce un efecto en los procesos y estrategias utilizadas por los estudiantes. Incluso tener en cuenta que, problemas con la misma estructura semántica, se diferencien entre ellos por las relaciones semánticas usadas para describir la situación del problema (Riley et al., 1983). Por tanto, los problemas propuestos son problemas modificados de diferentes libros de texto del nivel educativo de los alumnos con el fin de conseguir las estructuras semánticas que buscábamos o de aumentar el nivel de complejidad de alguno de ellos. A continuación, se presenta el enunciado de los 10 problemas del cuestionario Pre. El orden en que se muestran coincide con el orden en que fueron presentados a los alumnos. La ordenación no obedece a ningún criterio específico más allá de entremezclar problemas más sencillos y más complicados para intentar no interferir en la motivación de los alumnos durante la realización del cuestionario.

Las Patatas

Disponemos de dos contenedores con 396 y 117 kg de patatas, respectivamente. Para su venta, deben envasarse en bolsas que contengan 9 kg. ¿Cuántas bolsas serán necesarias?

El Colegio

Un colegio ha comprado 34 ordenadores a 337 € cada uno y 15 pizarras digitales a 1260€ cada una. ¿Cuánto dinero se ha gastado en la compra?

Los MP3

El encargado de una tienda de informática compró 75 reproductores MP3 a 47 euros cada uno. Vendió los 52 primeros a 65 euros y el resto, a 55. ¿Qué ganancia obtuvo?

El Tren nocturno

El tren nocturno que va de Barcelona a Granada está formado por una locomotora de 11 metros y 17 vagones para pasajeros de 9 metros cada uno. ¿Cuánto mide el tren en total?

Las Cortinas

Se compró una cierta cantidad de metros de tela para cortinas, pagándose 528 €. Si se hubiesen comprado 6 metros más se hubiera pagado 564 €. ¿Cuántos metros de tela se compraron?

Los Refrescos

Vicente compró ayer 21 botellas grandes de refresco y hoy ha comprado 9. Si cada botella cuesta 2 euros, ¿cuánto ha gastado en total?

Los Planos

Ana, Luis y Miguel han ganado 36.000 € de hacer los planos de un puente. Como no han trabajado el mismo tiempo se lo deben repartir de forma que a Ana le toquen dos partes de lo que han ganado; a Luis, tres; y a Miguel, siete partes. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

La Final de copa

Para ir a la final de copa, un equipo de fútbol ha llenado 14 trenes con 450 plazas cada uno y 106 autobuses con 50 plazas cada uno. Si en cada fila del estadio donde se jugará la final caben 80 personas, ¿cuántas filas se ocuparán en total?

Trajes y abrigos

Se disponen de 200 m de tela para hacer 20 trajes que necesitan 3 metros de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer abrigos. Si para hacer cada abrigo se necesitan 4 m de tela, ¿cuántos abrigos pueden hacerse?

La Granja

En una granja se gastan todos los días 150 kilos de pienso y 20 de heno para alimentar a los animales. El kilo de pienso cuesta 3 € y el de heno, 4 €. Si el dinero que pueden gastar en un año es de 200.000 euros, ¿cuánto dinero sobrará?

4.2.2 EL CUESTIONARIO POST

El cuestionario Post se diseñó con el objetivo de intentar observar la competencia de los estudiantes después de haber sido instruidos en la secuencia de enseñanza. Los 10 problemas del cuestionario Post son reelaboraciones de los problemas propuestos en el cuestionario Pre. Estas reelaboraciones consisten en la modificación de objetos, situaciones, valores, personajes, etc. con el objetivo de mantener la estructura semántica del problema y el isomorfismo entre los problemas de los cuestionarios Pre y Post. Los problemas del cuestionario Post fueron administrados en el orden que presentamos a continuación:

Las Pelotas de tenis

En un club de tenis tienen dos carros con 105 y 287 pelotas, respectivamente. Las van a poner en botes de 7 pelotas para utilizarlas en un torneo. ¿Cuántos botes serán necesarios?

La Discoteca

Una discoteca ha comprado 52 altavoces a 423 € cada uno y 25 pantallas de TV a 1840€ cada una. ¿Cuánto dinero se ha gastado en total?

El Mayorista

Un mayorista compra en un matadero 55 corderos a 46 euros cada uno. Vende a un restaurante 33 a 65 euros cada uno y el resto a un supermercado por 58 euros cada uno. ¿Qué beneficio obtuvo?

El Camión

Un camión que hace la ruta Madrid-Valencia ha cargado una caja de 235 kilos y 26 sacos de 14 kilos. ¿Cuánto pesa la carga en total?

El Bautizo

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

Los Billetes

Ayer fui al banco y saqué 13 billetes y hoy he sacado 9. Si todos los billetes eran de 5 euros, ¿cuánto dinero he sacado del banco en total?

La Empresa

Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000€. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

El Granjero

Un granjero se dedica a la venta de los huevos que ponen sus gallinas. En la granja tiene 12 corrales grandes y 28 corrales pequeños. Cada corral grande produce 140 huevos diarios y cada corral pequeño, 45. Si el granjero comercializa los huevos en cajas donde caben 60 huevos, ¿cuántas cajas necesita diariamente?

Los Disfraces

Se disponen de 450 m de tela para hacer 25 disfraces de león que necesitan 6 metros de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer disfraces de elefante. Si para hacer un disfraz de elefante se necesitan 15 m de tela, ¿cuántos disfraces de elefante podrán hacerse?

El Pienso

Un granjero gasta diariamente 15 kilos de pienso para gallinas y 120 kilos de pienso para vacas. El kilo de pienso para gallinas cuesta 2 € y el de pienso para vacas, 5 €. Si en un año sólo puede gastar 250.000 euros. ¿Cuánto dinero le sobra?

4.3 ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS

En este apartado se presenta un análisis de cada uno de los problemas presentados en los cuestionarios Pre y Post. Para cada problema se presenta primero cada una de las lecturas analíticas del problema realizadas por el investigador. Posteriormente, y para cada una de las lecturas analíticas, un análisis de las relaciones entre las cantidades indicando a qué estructura semántica pertenece cada una. Completamos el análisis con el grafo asociado a cada lectura. El orden en que se presentan las diferentes lecturas de un mismo problema no obedece a ningún criterio más que a las consideradas más naturales por parte del investigador al resolver el problema aritmético.

4.3.1 ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO PRE

Antes del análisis de los problemas del cuestionario Pre, hay que señalar que en los problemas *La Final de copa* y *Trajes y abrigos* hemos considerado las lecturas que los estudiantes podrían haber hecho, pero hemos señalado que la lectura 2 de *La Final de copa* y la lectura 3 de *Trajes y abrigos* no han sido consideradas ya que en la estructura semántica de isomorfismo de medidas 3 no existe divisibilidad entre las cantidades conocidas.

Las Patatas

Disponemos de dos contenedores con 396 y 117 kg de patatas, respectivamente. Para su venta, deben envasarse en bolsas que contengan 9 kg. ¿Cuántas bolsas serán necesarias?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Cantidad de patatas del primer contenedor = Pa = 396
Cantidad de patatas del segundo contenedor = Pb = 117
Cantidad de patatas entre los dos contenedores = P
Capacidad de las bolsas = Cb = 9
Total de bolsas necesarias = B

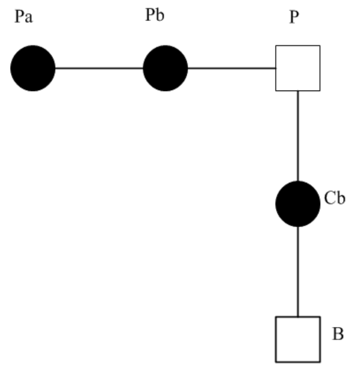
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pa+Pb *P=Cb·B*	Combinación 1 Isomorfismo de medidas 3	

Figura 4.1: Lectura 1 del problema *Las Patatas.*

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Cantidad de patatas del primer contenedor = *Pa* = 396
Cantidad de patatas del segundo contenedor = *Pb* = 117
Bolsas necesarias para envasar las patatas del primer contenedor = *Ba*
Bolsas necesarias para envasar las patatas del segundo contenedor = *Bb*
Capacidad de las bolsas = *Cb* = 9
Total de bolsas necesarias = *B*

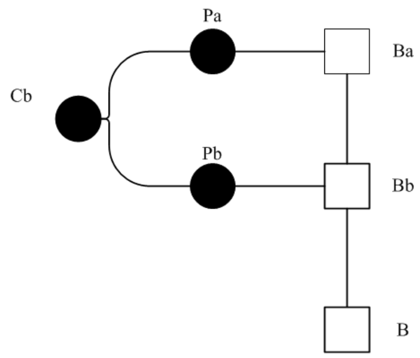
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pa=Ba·Cb *Pb=Bb·Cb* *B=Ba+Bb*	Isomorfismo de medidas 3 Isomorfismo de medidas 3 Combinación 1	

Figura 4.2: Lectura 2 del problema *Las Patatas.*

<u>*El colegio*</u>

Un colegio ha comprado 34 ordenadores a 337 € cada uno y 15 pizarras digitales a 1260€ cada una. ¿Cuánto dinero se ha gastado en la compra?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de ordenadores = *No* = 34
Precio de cada ordenador = *Po* = 337
Dinero gastado en la compra de los ordenadores = *Do*
Número de pizarras digitales = *Np* = 15
Precio de cada pizarra digital = *Pp* = 1260
Dinero gastado en la compra de las pizarras = *Dp*
Dinero gastado en total = *D*

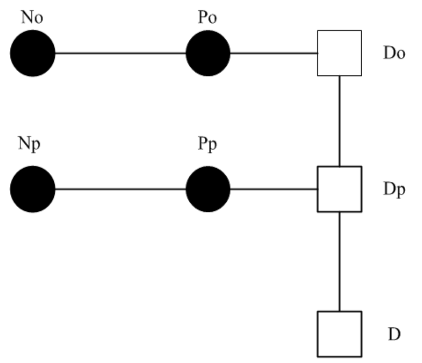
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Do=No·Po	Isomorfismo de medidas 1	
Dp=Np·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
D=Do+Dp	Combinación 1	

Figura 4.3: Lectura 1 del problema *El Colegio.*

<u>*Los MP3*</u>

El encargado de una tienda de informática compró 75 reproductores MP3 a 47 euros cada uno. Vendió los 52 primeros a 65 euros y el resto, a 55. ¿Qué ganancia obtuvo?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de reproductores MP3 comprados = *Nmp* = 75
Precio de cada MP3 comprado = *Pmp* = 47
Precio que se paga por todos los MP3 = *P*
MP3 vendidos primero = *Na* = 52
Precio al que vende los primeros MP3 = *Pa* = 65
Dinero que recibe de la venta de los primeros MP3 = *Da*
MP3 vendidos después = *Nb*
Precio al que vende el resto de MP3 = *Pb* = 55
Dinero que recibe de la venta del resto de MP3 = *Db*
Dinero que gana en total de la venta de los MP3 = *D*
Ganancia obtenida = *G*

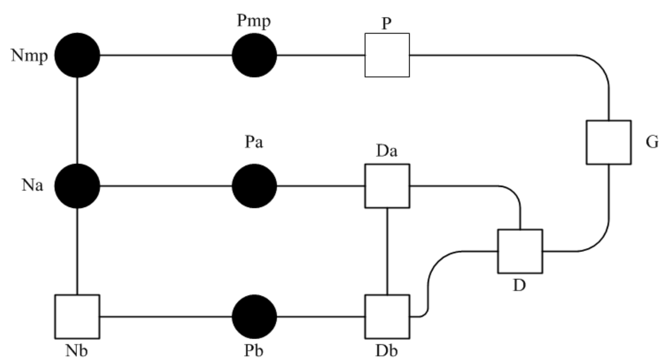
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Nmp·Pmp	Isomorfismo de medidas 1	
Da=Na·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Nmp= Na+Nb	Cambio 2	
Db=Nb·Pb	Isomorfismo de medidas 1	
D=Da+Db	Combinación 1	
D=P+G	Cambio 4	

Figura 4.4: Lectura 1 del problema *Los MP3*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de reproductores MP3 comprados = *Nmp* = 75
Precio de cada MP3 comprado = *Pmp* = 47
Precio que se paga por todos los MP3 = *P*
MP3 vendidos primero = *Na* = 52
Precio al que vende los primeros MP3 = *Pa* = 65
Dinero que recibe de la venta de los primeros MP3 = *Da*
MP3 vendidos después = *Nb*
Precio al que vende el resto de MP3 = *Pb* = 55
Dinero que recibe de la venta del resto de MP3 = *Db*
Dinero que falta por recuperar después de la primera venta = *Df*
Ganancia obtenida = *G*

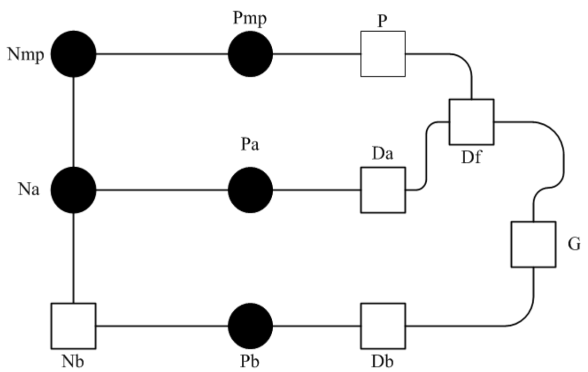
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Nmp·Pmp	Isomorfismo de medidas 1	
Da=Na·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Nmp= Na+Nb	Cambio 2	
Db=Nb·Pb	Isomorfismo de medidas 1	
P=Da+Df	Combinación 2	
Db=G+Df	Cambio 4	

Figura 4.5: Lectura 2 del problema *Los MP3*.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Número de reproductores MP3 comprados = *Nmp* = 75
Precio de cada MP3 comprado = *Pmp* = 47
Precio que se paga por todos los MP3 = *P*
MP3 vendidos primero = *Na* = 52
Precio al que vende los primeros MP3 = *Pa* = 65
Dinero que recibe de la venta de los primeros MP3 = *Da*
MP3 vendidos después = *Nb*
Precio al que vende el resto de MP3 = *Pb* = 55
Dinero que recibe de la venta del resto de MP3 = *Db*
Dinero que falta por recuperar después de la segunda venta = *Dfb*
Ganancia obtenida = *G*

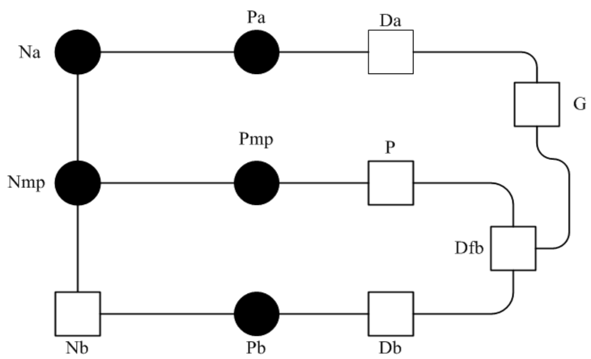
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Nmp·Pmp	Isomorfismo de medidas 1	
Da=Na·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Nmp= Na+Nb	Cambio 2	
Db=Nb·Pb	Isomorfismo de medidas 1	
P=Db+Dfb	Combinación 2	
Da=G+Dfb	Cambio 4	

Figura 4.6: Lectura 3 del problema *Los MP3*.

Lectura 4

Análisis de las cantidades

Número de reproductores MP3 comprados = *Nmp* = 75
Precio de cada MP3 comprado = *Pmp* = 47
MP3 vendidos primero = *Na* = 52
Precio al que vende los primeros MP3 = *Pa* = 65
Dinero que recibe de la venta de los primeros MP3 = *Da*
MP3 vendidos después = *Nb*
Precio al que vende el resto de MP3 = *Pb* = 55
Beneficio por MP3 vendido primero = *Bvp*
Beneficio por MP3 vendido segundo = *Bvs*
Beneficio por todos los MP3 vendidos primero = *Btvp*
Beneficio por todos los MP3 vendidos segundo = *Btvs*
Ganancia obtenida = *G*

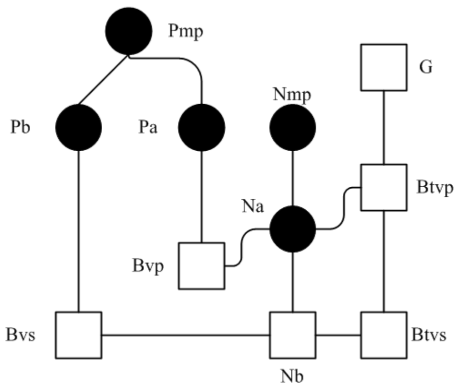
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	Grafo
Pa=Pmp+Bvp	Cambio 4	
Nmp=Na+Nb	Cambio 2	
Pb=Pmp+Bvs	Cambio 4	
Btvp=Bvp·Na	Isomorfismo de medidas 1	
Btvs=Bvs·Nb	Isomorfismo de medidas 1	
G=Btvp+Btvs	Combinación 1	

Figura 4.7: Lectura 4 del problema *Los MP3*.

<u>*El Tren nocturno*</u>

El tren nocturno que va de Barcelona a Granada está formado por una locomotora de 11 metros y 17 vagones para pasajeros de 9 metros cada uno. ¿Cuánto mide el tren en total?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Longitud de la locomotora = *Ll* = 11
Número de vagones = *Nv* = 17
Longitud de cada vagón = *Lv* = 9
Longitud de todos los vagones = *Ltv*
Longitud total del tren = *Lt*

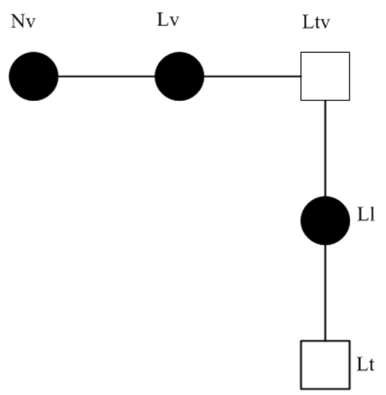
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Ltv=Nv·Lv	Isomorfismo de medidas 1	
Lt=Ltv+Ll	Combinación 1	

Figura 4.8: Lectura 1 del problema *El Tren nocturno*.

<u>*Las Cortinas*</u>

Se compró una cierta cantidad de metros de tela para cortinas, pagándose 528 €. Si se hubiesen comprado 6 metros más se hubiera pagado 564 €. ¿Cuántos metros de tela se compraron?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Precio de la tela comprada en la situación real = *Ctr* = 528
Precio de la tela comprada en la situación hipotética = *Cth* = 564
Metros de tela de más comprada en la situación hipotética = *Mmh* =6
Exceso de precio entre la situación hipotética y la real = *Ehr*
Cantidad de tela en la situación real = *Msr*
Precio de un metro de tela = *Ctu*

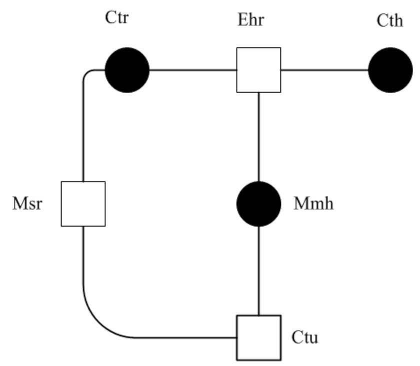
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Cth=Ctr+Ehr *Ehr=Mmh·Ctu* *Ctr=Msr·Ctu*	Cambio 4 Isomorfismo de medidas 2 Isomorfismo de medidas 3	

Figura 4.9: Lectura 1 del problema *Las Cortinas.*

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Precio de la tela comprada en la situación real = *Ctr* = 528
Precio de la tela comprada en la situación hipotética = *Cth* = 564
Metros de tela de más comprada en la situación hipotética = *Mmh* =6
Exceso de precio entre la situación hipotética y la real = *Ehr*
Cantidad de tela en la situación real = *Msr*
Cantidad de tela en la situación hipotética = *Msh*
Precio de un metro de tela = *Ctu*

Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Cth=Ctr+Ehr	Cambio 4	

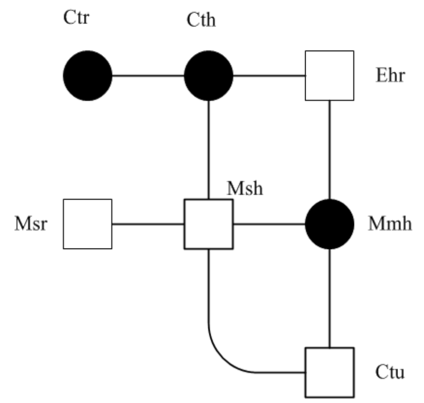
Ehr=Mmh·Ctu	Isomorfismo de medidas 2	
Cth=Msh·Ctu	Isomorfismo de medidas 3	
Msh=Msr+Mmh	Cambio 2	

Figura 4.10: Lectura 2 del problema *Las Cortinas*.

<u>*Los Refrescos*</u>

Vicente compró ayer 21 botellas grandes de refresco y hoy ha comprado 9. Si cada botella cuesta 2 euros, ¿cuánto ha gastado en total?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de botellas grandes de refresco que compró ayer = *Ba* = 21
Número de botellas grandes de refresco que ha comprado hoy = *Bh* = 9
Precio de cada botella = *Pb* = 2
Dinero gastado en las botellas compradas ayer = *Da*
Dinero gastado en las botellas compradas hoy = *Dh*
Dinero gastado en total = *Dt*

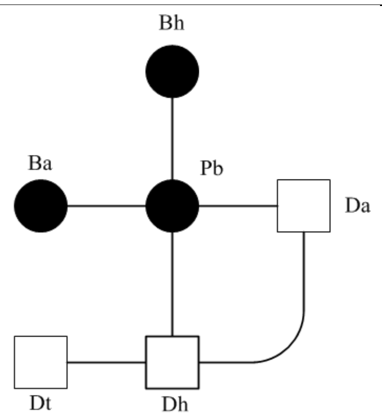
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Da=Ba·Pb	Isomorfismo de medidas 1	
Dh=Bh·Pb	Isomorfismo de medidas 1	
Dt=Da+Dh	Combinación 1	

Figura 4.11: Lectura 1 del problema *Los Refrescos*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de botellas grandes de refresco que compró ayer = *Ba* = 21
Número de botellas grandes de refresco que ha comprado hoy = *Bh* = 9
Precio de cada botella = *Pb* = 2
Número de botellas compradas entre ayer y hoy = B
Dinero gastado en total = *Dt*

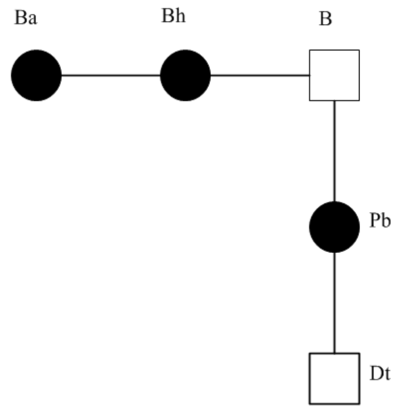
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$B=Ba+Bh$ $Dt=B\cdot Pb$	Combinación 1 Isomorfismo de medidas 1	

Figura 4.12: Lectura 2 del problema *Los Refrescos.*

<u>Los planos</u>

Ana, Luis y Miguel han ganado 36.000€ de hacer los planos de un puente. Como no han trabajado el mismo tiempo se lo deben repartir de forma que a Ana le toquen dos partes de lo que han ganado; a Luis, tres; y a Miguel, siete partes. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

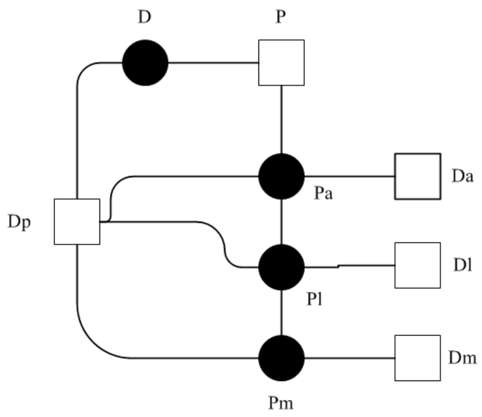
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pa+Pl+Pm	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 4.13: Lectura 1 del problema *Los Planos*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

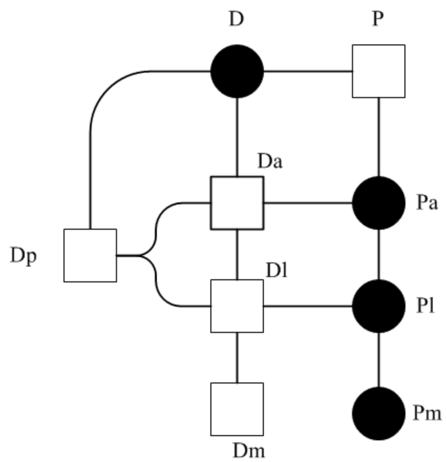
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pa+Pl+Pm	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
D=Da+Dl+Dm	Combinación 2	

Figura 4.14: Lectura 2 del problema *Los Planos*.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

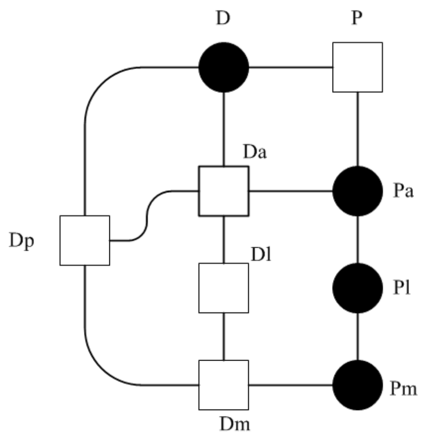
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pa+Pl+Pm	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	
D=Da+Dl+Dm	Combinación 2	

Figura 4.15: Lectura 3 del problema *Los Planos*.

Lectura 4

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

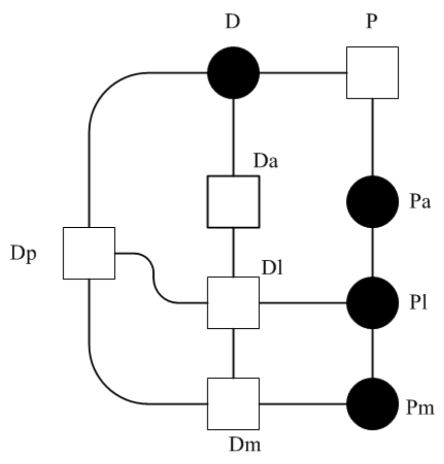
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pa+Pl+Pm	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	
D=Da+Dl+Dm	Combinación 2	

Figura 4.16: Lectura 4 del problema *Los Planos*.

Lectura 5

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Partes de Ana y Luis = *Pal*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

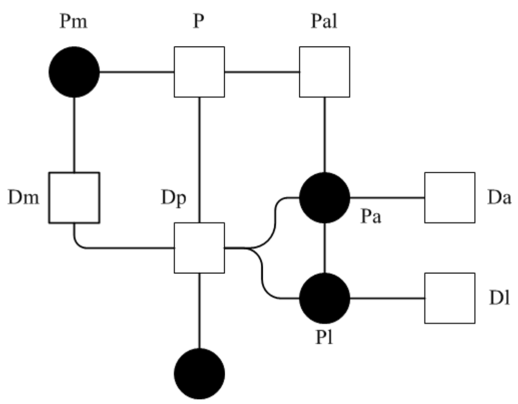
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pal=Pa+Pl	Combinación 1	
P=Pal+Pm	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 4.17: Lectura 5 del problema *Los Planos*.

Lectura 6

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Partes de Ana y Miguel = *Pam*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

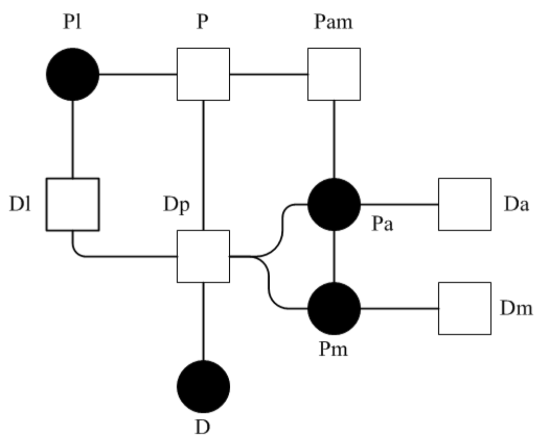
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pam=Pa+Pm	Combinación 1	
P=Pam+Pl	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 4.18: Lectura 6 del problema *Los Planos*.

Lectura 7

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Partes de Luis y Miguel = *Plm*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

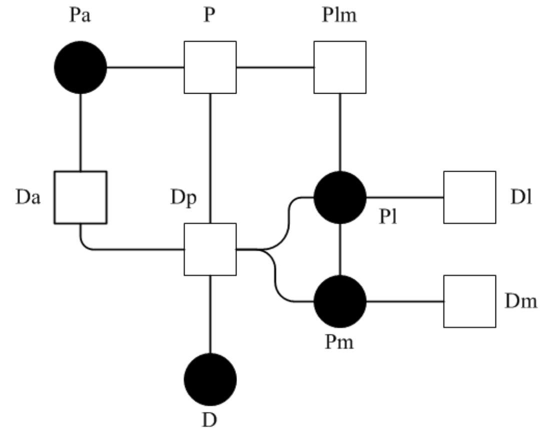
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Plm=Pl+Pm	Combinación 1	
P=Plm+Pa	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 4.19: Lectura 7 del problema *Los Planos*.

Lectura 8

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Ana y Luis = *Dal*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

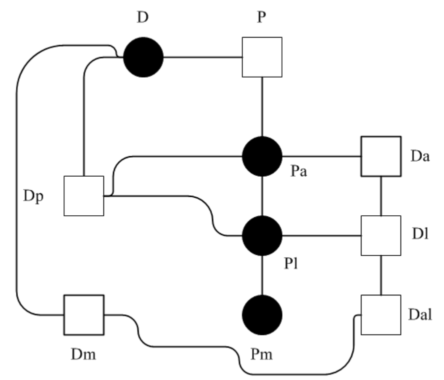
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pa+Pl+Pm	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dal=Da+Dl	Combinación 1	
D=Dal+Dm	Combinación 2	

Figura 4.20: Lectura 8 del problema *Los Planos*.

Lectura 9

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Ana y Miguel = *Dam*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

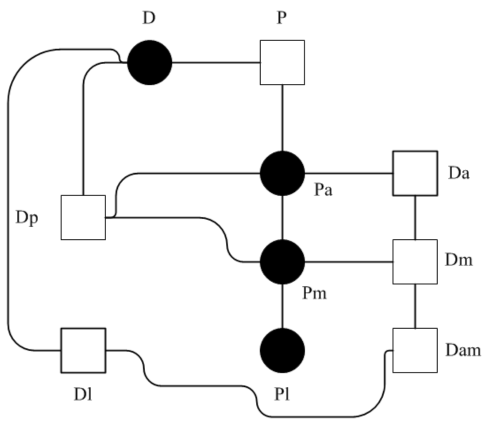
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$P=Pa+Pl+Pm$	Combinación 1	
$D=Dp\cdot P$	Isomorfismo de medidas 2	
$Da=Dp\cdot Pa$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dm=Dp\cdot Pm$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dam=Da+Dm$	Combinación 1	
$D=Dam+Dl$	Combinación 2	

Figura 4.21: Lectura 9 del problema *Los Planos*.

Lectura 10

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Luis y Miguel = *Dlm*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

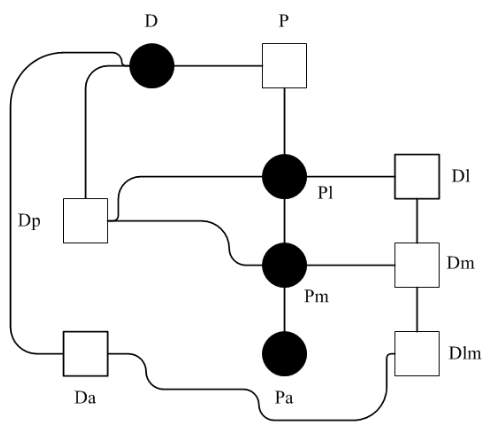
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pa+Pl+Pm	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dlm=Dl+Dm	Combinación 1	
D=Dlm+Da	Combinación 2	

Figura 4.22: Lectura 10 del problema *Los Planos.*

Lectura 11

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Partes que le tocan a Ana y Luis = *Pal*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Ana y Luis = *Dal*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

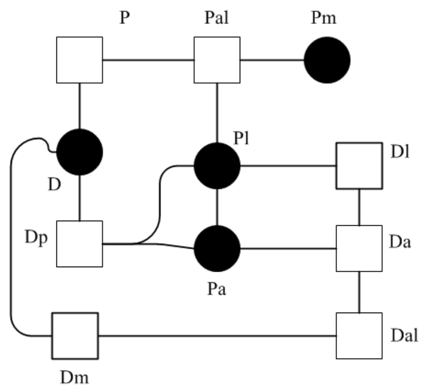
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pal=Pa+Pl	Combinación 1	
P=Pal+Pm	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dal=Da+Dl	Combinación 1	
D=Dal+Dm	Combinación 2	

Figura 4.23: Lectura 11 del problema *Los Planos.*

Lectura 12

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Partes que le tocan a Ana y Luis = *Pal*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Ana y Miguel = *Dam*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

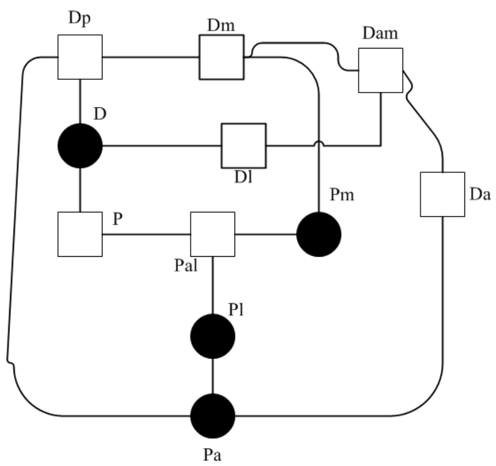
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pal=Pa+Pl	Combinación 1	
P=Pal+Pm	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	
Dam=Da+Dm	Combinación 1	
D=Dam+Dl	Combinación 2	

Figura 4.24: Lectura 12 del problema *Los Planos.*

Lectura 13

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Partes que le tocan a Ana y Luis = *Pal*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*

Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Luis y Miguel = *Dlm*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

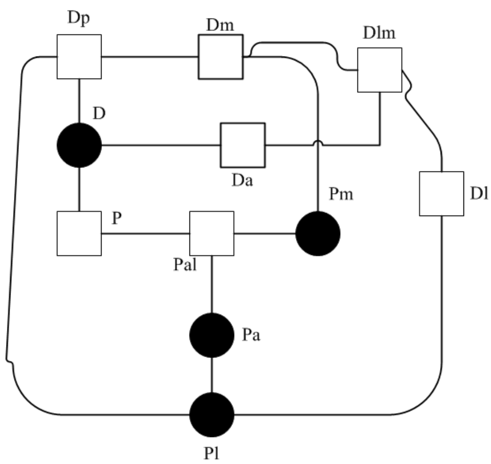
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pal=Pa+Pl	Combinación 1	
P=Pal+Pm	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	
Dlm=Dl+Dm	Combinación 1	
D=Dlm+Da	Combinación 2	

Figura 4.25: Lectura 13 del problema *Los Planos.*

Lectura 14

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Partes que le tocan a Ana y Miguel = *Pam*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Ana y Luis = *Dal*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pam=Pa+Pm	Combinación 1	
P=Pam+Pl	Combinación 1	

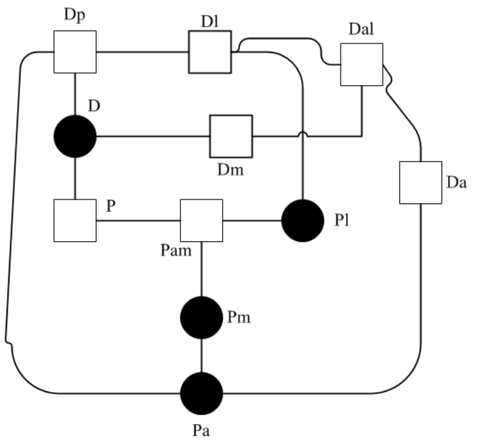
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dal=Da+Dl	Combinación 1	
D=Dal+Dm	Combinación 2	

Figura 4.26: Lectura 14 del problema *Los Planos.*

Lectura 15

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Partes que le tocan a Ana y Miguel = *Pam*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Luis y Miguel = *Dlm*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

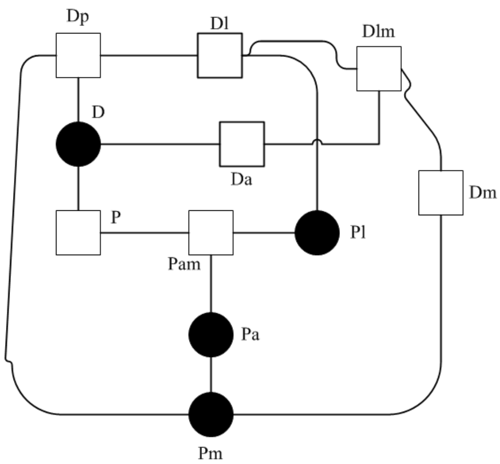
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pam=Pa+Pm	Combinación 1	
P=Pam+Pl	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	
Dlm=Dl+Dm	Combinación 1	
D=Dlm+Da	Combinación 2	

Figura 4.27: Lectura 15 del problema *Los Planos.*

Lectura 16

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = D = 36 000
Partes de Ana = Pa = 2
Partes de Luis = Pl = 3
Partes de Miguel = Pm = 7
Partes que le tocan a Ana y Miguel = Pam
Total de partes entre los tres = P
Dinero que le toca a una parte = Dp
Dinero que le toca a Ana = Da
Dinero que le toca a Luis = Dl
Dinero que le toca a Ana y Miguel = Dam
Dinero que le toca a Miguel = Dm

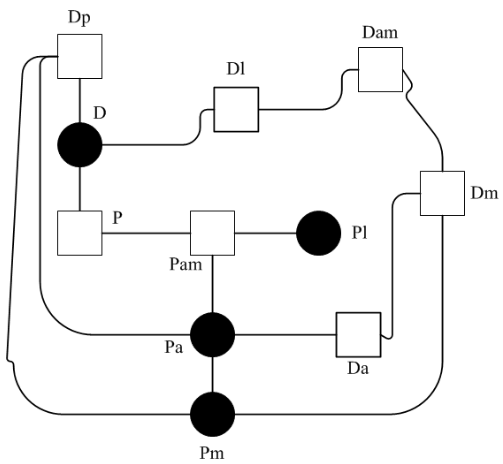
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$Pam=Pa+Pm$	Combinación 1	
$P=Pam+Pl$	Combinación 1	
$D=Dp \cdot P$	Isomorfismo de medidas 2	
$Da=Dp \cdot Pa$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dm=Dp \cdot Pm$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dam=Da+Dm$	Combinación 1	
$D=Dam+Dl$	Combinación 2	

Figura 4.28: Lectura 16 del problema *Los Planos*.

Lectura 17

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = D = 36 000
Partes de Ana = Pa = 2
Partes de Luis = Pl = 3
Partes de Miguel = Pm = 7
Partes que le tocan a Luis y Miguel = Plm
Total de partes entre los tres = P
Dinero que le toca a una parte = Dp
Dinero que le toca a Ana = Da

Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Ana y Luis = *Dal*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

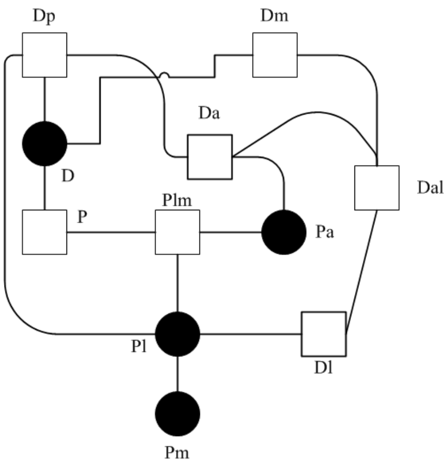
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Plm=Pl+Pm	Combinación 1	
P=Plm+Pa	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dal=Da+Dl	Combinación 1	
D=Dal+Dm	Combinación 2	

Figura 4.29: Lectura 17 del problema *Los Planos*.

Lectura 18

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Partes que le tocan a Luis y Miguel = *Plm*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Ana y Miguel = *Dam*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

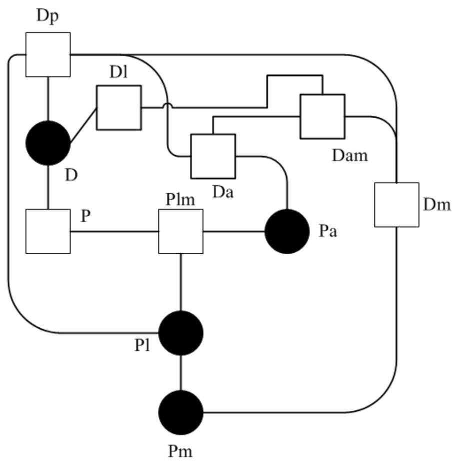
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Plm=Pl+Pm	Combinación 1	
P=Plm+Pa	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Da=Dp·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	
Dam=Da+Dm	Combinación 1	
D=Dam+Dl	Combinación 2	

Figura 4.30: Lectura 18 del problema *Los Planos*.

Lectura 19

Análisis de las cantidades

Dinero total a repartir = *D* = 36 000
Partes de Ana = *Pa* = 2
Partes de Luis = *Pl* = 3
Partes de Miguel = *Pm* = 7
Partes que le tocan a Luis y Miguel = *Plm*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le toca a Ana = *Da*
Dinero que le toca a Luis = *Dl*
Dinero que le toca a Luis y Miguel = *Dlm*
Dinero que le toca a Miguel = *Dm*

Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Plm=Pl+Pm	Combinación 1	
P=Plm+Pa	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	

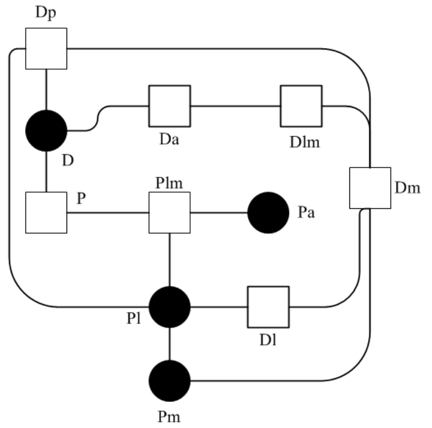
Dl=Dp·Pl	Isomorfismo de medidas 1	
Dm=Dp·Pm	Isomorfismo de medidas 1	
Dlm=Dl+Dm	Combinación 1	
D=Dlm+Da	Combinación 2	

Figura 4.31: Lectura 19 del problema *Los Planos.*

<u>*La Final de copa*</u>

Para ir a la final de copa, un equipo de fútbol ha llenado 14 trenes con 450 plazas cada uno y 106 autobuses con 50 plazas cada uno. Si en cada fila del estadio donde se jugará la final caben 80 personas, ¿cuántas filas se ocuparán en total?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de trenes = *T* = 14
Número de plazas en cada tren = *Pt* = 450
Número de personas que van a la final en tren = *Ptt*
Número de autobuses = *A* = 106
Número de plazas en cada autobús = *Pa* = 50
Número de personas que van a la final en autobús = *Pta*
Número de personas que van a la final = *P*
Personas que caben en cada fila del estadio = *Pf* = 80
Número de filas que ocupan en total = *F*

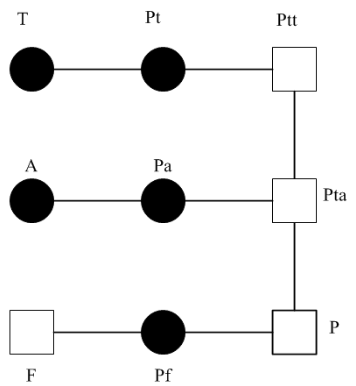
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Ptt=T·Pt	Isomorfismo de medidas 1	
Pta=A·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
P=Ptt+Pta	Combinación 1	
P=F·Pf	Isomorfismo de medidas 3	

Figura 4.32: Lectura 1 del problema *La Final de copa*.

Lectura 2 (Lectura no computable por la no divisibilidad entera de las cantidades)

Análisis de las cantidades

Número de trenes = T = 14
Número de plazas en cada tren = Pt = 450
Número de personas que van a la final en tren = Ptt
Número de autobuses = A = 106
Número de plazas en cada autobús = Pa = 50
Número de personas que van a la final en autobús = Pta
Personas que caben en cada fila del estadio = Pf = 80
Filas que ocupan las personas que van en tren = Ft
Filas que ocupan las personas que van en autobús = Fa
Número de filas que ocupan en total = F

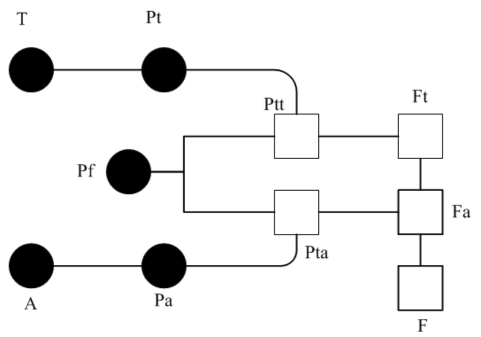
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$Ptt=T\cdot Pt$	Isomorfismo de medidas 1	
$Pta=A\cdot Pa$	Isomorfismo de medidas 1	
$Ptt=Ft\cdot Pf$	Isomorfismo de medidas 3	
$Pta=Fa\cdot Pf$	Isomorfismo de medidas 3	
$F=Ft+Fa$	Combinación 1	

Figura 4.33: Lectura 2 del problema *La Final de copa*.

<u>*Trajes y abrigos*</u>

Se disponen de 200 m de tela para hacer 20 trajes que necesitan 3 metros de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer abrigos. Si para hacer cada abrigo se necesitan 4 m de tela, ¿cuántos abrigos pueden hacerse?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Cantidad de tela disponible = Ct = 200
Número de trajes = T = 20
Metros de tela necesarios para cada traje = Mt = 3
Metros de tela necesarios para todos los trajes = Mtt

Metros de tela para hacer los abrigos = *Mta*
Metros de tela necesarios para cada abrigo = *Ma* = 4
Número de abrigos = *A*

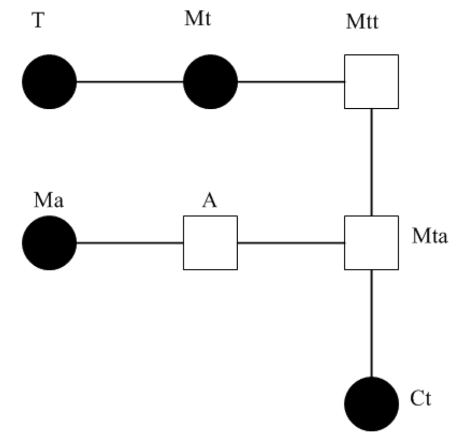
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Mtt=T·Mt	Isomorfismo de medidas 1	
Ct=Mta+Mtt	Cambio 2	
Mta=Ma·A	Isomorfismo de medidas 3	

Figura 4.34: Lectura 1 del problema *Trajes y abrigos*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Cantidad de tela disponible = *Ct* = 200
Número de trajes = *T* = 20
Metros de tela necesarios para cada traje = *Mt* = 3
Metros de tela necesarios para todos los trajes = *Mtt*
Metros de tela necesarios para cada abrigo = *Ma* = 4
Número de abrigos que podría hacer con toda la tela = *Cta*
Número de abrigos que se pueden hacer con los metros de tela para los trajes = *Att*
Número de abrigos = *A*

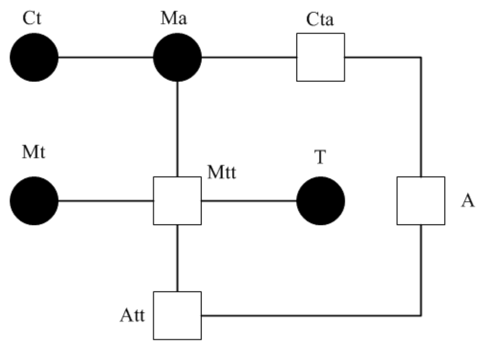
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Ct=Cta·Ma	Isomorfismo de medidas 3	
Mtt=T·Mt	Isomorfismo de medidas 1	
Mtt=Ma·Att	Isomorfismo de medidas 3	
Cta=A+Att	Cambio 2	

Figura 4.35: Lectura 2 del problema *Trajes y abrigos*.

Lectura 3 (Lectura no computable por la no divisibilidad entera de las cantidades)

Análisis de las cantidades

Cantidad de tela disponible = *Ct* = 200
Número de trajes = *T* = 20
Metros de tela necesarios para cada traje = *Mt* = 3
Metros de tela necesarios para cada abrigo = *Ma* = 4
Número de trajes que podría hacer con toda la tela = *Ctt*
Número de trajes que no se hacen = *Tnh*
Metros de tela para hacer los abrigos = *Mta*
Número de abrigos = *A*

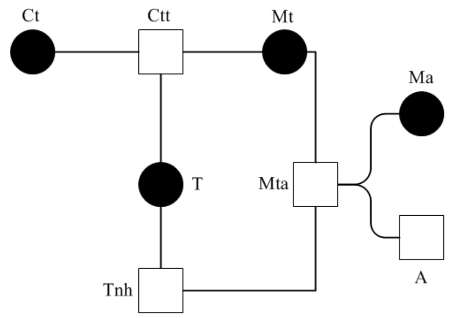
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Ct=Ctt·Mt	Isomorfismo de medidas 3	
Ctt=Tnh+T	Cambio 2	
Mta=Tnh·Mt	Isomorfismo de medidas 1	
Mta=A·Ma	Isomorfismo de medidas 3	

Figura 4.36: Lectura 3 del problema *Trajes y abrigos*.

<u>*La Granja*</u>

En una granja se gastan todos los días 150 kilos de pienso y 20 de heno para alimentar a los animales. El kilo de pienso cuesta 3 € y el de heno, 4 €. Si el dinero que pueden gastar en un año es de 200.000 euros, ¿cuánto dinero sobrará?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Dinero gastado en pienso al día = *Dpd*
Dinero gastado en heno al día = *Dhd*
Dinero gastado en comida al día = *Dd*
Dinero gastado en comida al año = *Dga*

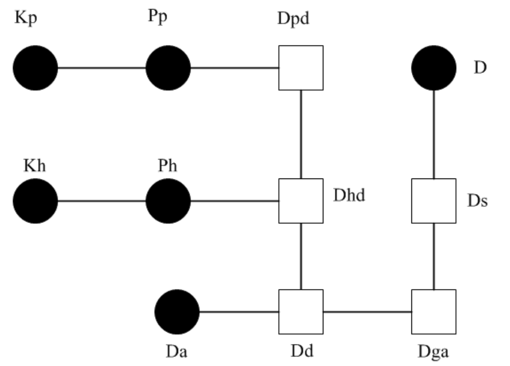
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Dpd=Kp·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dhd=Kh·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
Dd=Dpd+Dhd	Combinación 1	
Dga=Dd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dga+Ds	Cambio 4	

Figura 4.37: Lectura 1 del problema *La Granja*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Kilogramos de pienso que se gastan al año = *Kpa*
Kilogramos de heno que se gastan al año = *Kha*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero gastado en comida al año = *Dga*

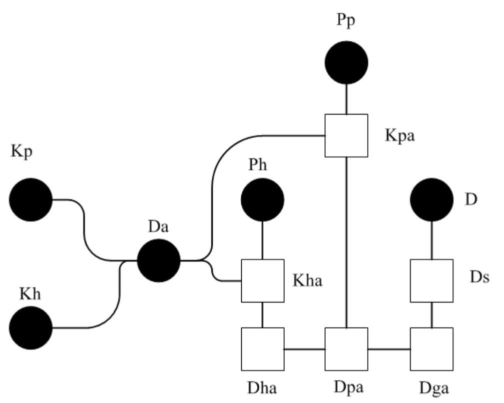
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kpa=Kp·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kha=Kh·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Kpa·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Kha·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
Dga=Dpa+Dha	Combinación 1	
D=Dga+Ds	Cambio 4	

Figura 4.38: Lectura 2 del problema *La Granja*.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Dinero gastado en pienso al día = *Dpd*
Dinero gastado en heno al día = *Dhd*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero gastado en comida al año = *Dga*

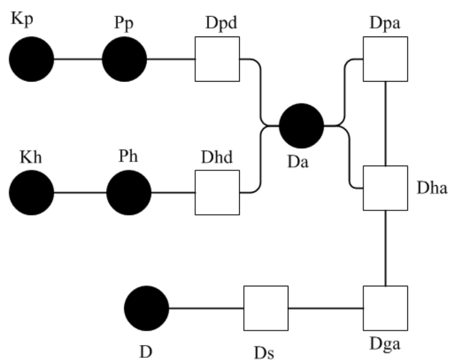
<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Estructura semántica</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>Dpd=Kp·Pp</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td><td rowspan="6">
</td></tr>
<tr><td>Dhd=Kh·Ph</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>Dpa=Dpd·Da</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>Dha=Dhd·Da</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>Dga=Dpa+Dha</td><td>Combinación 1</td></tr>
<tr><td>D=Dga+Ds</td><td>Cambio 4</td></tr>
</table>

Figura 4.39: Lectura 3 del problema *La Granja*.

Lectura 4

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Dinero gastado en pienso al día = *Dpd*
Dinero gastado en heno al día = *Dhd*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*

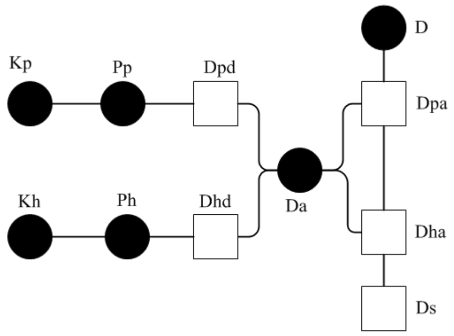
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Dpd=Kp·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dhd=Kh·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Dpd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Dhd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dpa+Dha+Ds	Combinación 2	

Figura 4.40: Lectura 4 del problema *La Granja*.

Lectura 5

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Kilogramos de pienso que se gastan al año = *Kpa*
Kilogramos de heno que se gastan al año = *Kha*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*

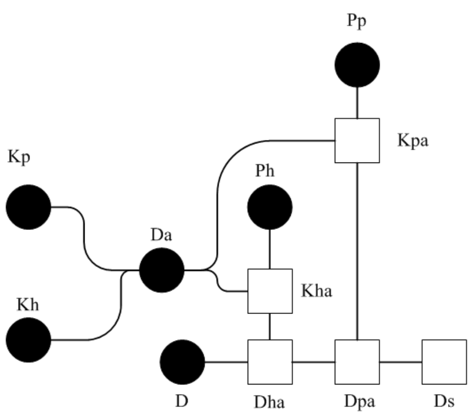
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kpa=Kp·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kha=Kh·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Kpa·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Kha·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dpa+Dha+Ds	Combinación 2	

Figura 4.41: Lectura 5 del problema *La Granja*.

Lectura 6

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Dinero gastado en pienso al día = *Dpd*
Dinero gastado en heno al día = *Dhd*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero que sobra tras el gasto anual en pienso = *Dsp*

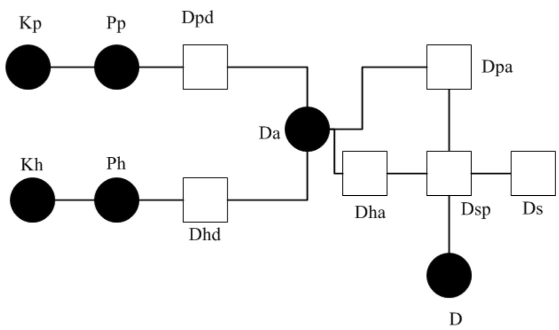
<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Estructura semántica</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$Dpd=Kp\cdot Pp$</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td><td rowspan="6">
</td></tr>
<tr><td>$Dhd=Kh\cdot Ph$</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>$Dpa=Dpd\cdot Da$</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>$Dha=Dhd\cdot Da$</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>$D=Dpa+Dsp$</td><td>Cambio 4</td></tr>
<tr><td>$Dsp=Dha+Ds$</td><td>Cambio 4</td></tr>
</table>

Figura 4.42: Lectura 6 del problema *La Granja*.

Lectura 7

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Dinero gastado en pienso al día = *Dpd*
Dinero gastado en heno al día = *Dhd*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero que sobra tras el gasto anual en pienso = *Dsh*

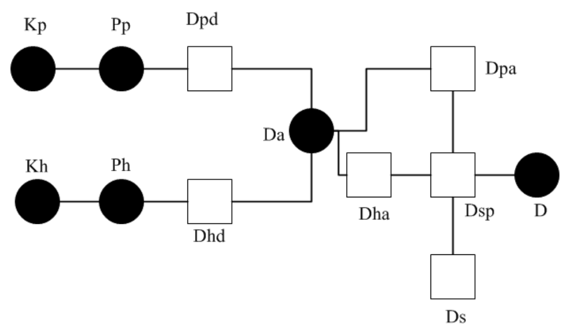
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Dpd=Kp·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dhd=Kh·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Dpd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Dhd·Da	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dha+Dsh	Cambio 4	
Dsh=Dpa+Ds	Cambio 4	

Figura 4.43: Lectura 7 del problema *La Granja*.

Lectura 8

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Kilogramos de pienso que se gastan al año = *Kpa*
Kilogramos de heno que se gastan al año = *Kha*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero que sobra tras el gasto anual en pienso = *Dsp*

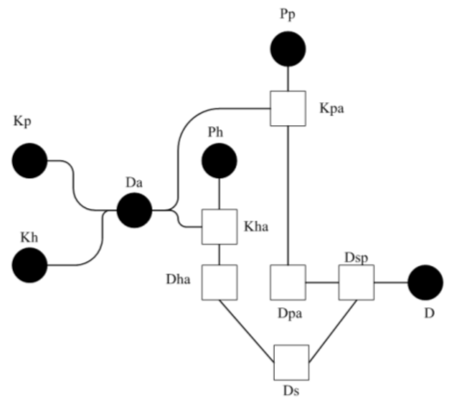
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kpa=Kp·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kha=Kh·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Kpa·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Kha·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dpa+Dsp	Cambio 4	
Dsp=Dha+Ds	Cambio 4	

Figura 4.44: Lectura 8 del problema *La Granja*.

Lectura 9

Análisis de las cantidades

Kilogramos de pienso que se gastan al día = *Kp* = 150
Kilogramos de heno que se gastan al día = *Kh* = 20
Precio de cada kilo de pienso = *Pp* = 3
Precio de cada kilo de heno = *Ph* = 4
Dinero que se pueden gastar en un año = *D* = 200000
Dinero que sobra = *Ds*
Días de un año = *Da* = 365
Kilogramos de pienso que se gastan al año = *Kpa*
Kilogramos de heno que se gastan al año = *Kha*
Dinero gastado en pienso al año = *Dpa*
Dinero gastado en heno al año = *Dha*
Dinero que sobra tras el gasto anual en heno = *Dsh*

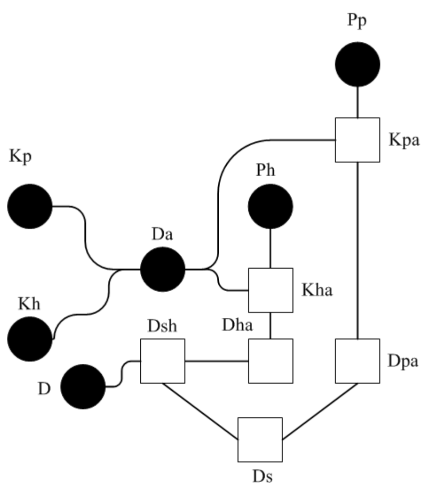
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kpa=Kp·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kha=Kh·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dpa=Kpa·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
Dha=Kha·Ph	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dha+Dsh	Cambio 4	
Dsh=Dpa+Ds	Cambio 4	

Figura 4.45: Lectura 9 del problema *La Granja*.

4.3.2 ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO POST

<u>*Las Pelotas de tenis*</u>

En un club de tenis tienen dos carros con 105 y 287 pelotas, respectivamente. Las van a poner en botes de 7 pelotas para utilizarlas en un torneo. ¿Cuántos botes serán necesarios?

Lectura 1
Análisis de las cantidades
Número de pelotas en el carro pequeño = *Pp* =105
Número de pelotas en el carro grande = *Pg* = 287

Total de pelotas = *P*
Número de pelotas por bote = *Pb* = 7
Número de botes = *B*

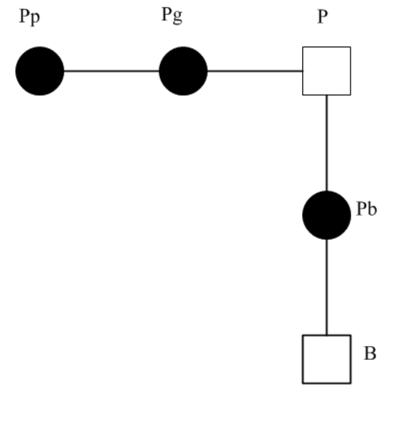
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pp+Pg *P=Pb·B*	Combinación 1 Isomorfismo de medidas 3	

Figura 4.46: Lectura 1 del problema *Las Pelotas de tenis.*

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de pelotas en el carro pequeño = *Pp* =105
Número de pelotas en el carro grande = *Pg* = 287
Botes necesarios para el carro pequeño = *Bp*
Botes necesarios para el carro grande = *Bg*
Número de pelotas por bote = *Pb* = 7
Número de botes = *B*

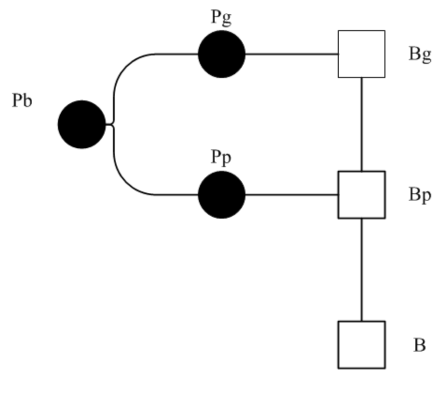
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pp=Bp·Pb *Pg=Bg·Pb* *B=Bp+Bg*	Isomorfismo de medidas 3 Isomorfismo de medidas 3 Combinación 1	

Figura 4.47: Lectura 2 del problema *Las Pelotas de tenis.*

<u>*La Discoteca*</u>

Una discoteca ha comprado 52 altavoces a 423 € cada uno y 25 pantallas de TV a 1840€ cada una. ¿Cuánto dinero se ha gastado en total?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de altavoces comprados = *Na* = 52
Precio de cada altavoz = *Pa* = 423
Número de pantallas de TV compradas = *Np* = 25
Precio de cada pantalla = *Pp* = 1840
Dinero gastado en la compra de los altavoces = *Da*
Dinero gastado en la compra de las pantallas de TV = *Dp*
Dinero gastado en total = *D*

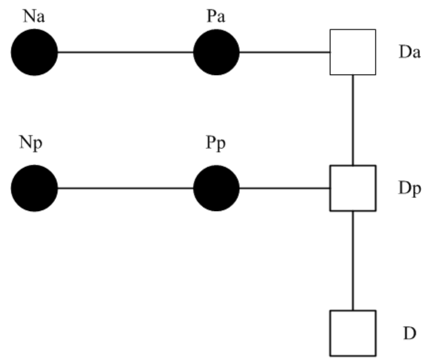
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Da=Na·Pa	Isomorfismo de medidas 1	
Dp=Np·Pp	Isomorfismo de medidas 1	
D=Da+Dp	Combinación 1	

Figura 4.48: Lectura 1 del problema *La Discoteca*.

<u>*El Mayorista*</u>

Un mayorista compra en un matadero 55 corderos a 46 euros cada uno. Vende a un restaurante 33 a 65 euros cada uno y el resto a un supermercado por 58 euros cada uno. ¿Qué beneficio obtuvo?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Corderos que compra el mayorista = *Ncm* =55
Precio que paga el mayorista por cada cordero = *Pucm* = 46
Precio que paga el mayorista por todos los corderos = *Pcm*
Corderos que vende al restaurante = *Ncr* = 33
Precio al que vende cada cordero al restaurante = *Pucr* = 65
Dinero que recibe de la venta de los corderos al restaurante = *Pcr*
Número de corderos que vende al supermercado = *Ncs*
Precio al que vende cada cordero al supermercado = *Pucs* = 58
Dinero que recibe de vender los corderos al supermercado = *Pcs*
Dinero que recibe de la venta de todos los corderos = *Dv*
Beneficio = *B*

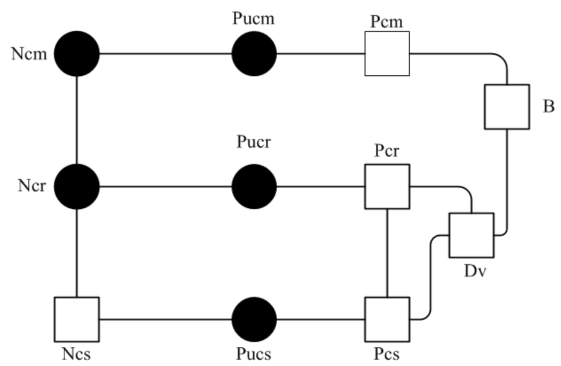
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pcm=Ncm·Pucm	Isomorfismo de medidas 1	
Pcr= Ncr·Pucr	Isomorfismo de medidas 1	
Ncm=Ncr+Ncs	Cambio 2	
Pcs=Ncs·Pucs	Isomorfismo de medidas 1	
Dv=Pcr+Pcs	Combinación 1	
Dv=Pcm+B	Cambio 4	

Figura 4.49: Lectura 1 del problema *El Mayorista*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Corderos que compra el mayorista = *Ncm* =55
Precio que paga el mayorista por cada cordero = *Pucm* = 46
Precio que paga el mayorista por todos los corderos = *Pcm*
Corderos que vende al restaurante = *Ncr* = 33
Precio al que vende cada cordero al restaurante = *Pucr* = 65
Dinero que recibe de la venta de los corderos al restaurante = *Pcr*
Número de corderos que vende al supermercado = *Ncs*
Precio al que vende cada cordero al supermercado = *Pucs* = 58
Dinero que recibe de vender los corderos al supermercado = *Pcs*
Dinero que falta por recuperar después de la primera venta = *Df*
Beneficio = *B*

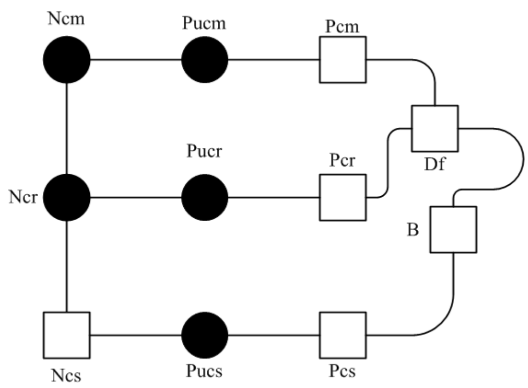
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pcm=Ncm·Pucm	Isomorfismo de medidas 1	
Pcr= Ncr·Pucr	Isomorfismo de medidas 1	
Ncm=Ncr+Ncs	Cambio 2	
Pcs=Ncs·Pucs	Isomorfismo de medidas 1	
Pcm=Pcr+Df	Combinación 2	
Pcs=B+Df	Cambio 4	

Figura 4.50: Lectura 2 del problema *El Mayorista*.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Corderos que compra el mayorista = *Ncm* =55
Precio que paga el mayorista por cada cordero = *Pucm* = 46
Precio que paga el mayorista por todos los corderos = *Pcm*
Corderos que vende al restaurante = *Ncr* = 33
Precio al que vende cada cordero al restaurante = *Pucr* = 65
Dinero que recibe de la venta de los corderos al restaurante = *Pcr*
Número de corderos que vende al supermercado = *Ncs*
Precio al que vende cada cordero al supermercado = *Pucs* = 58
Dinero que recibe de vender los corderos al supermercado = *Pcs*
Dinero que falta por recuperar después de la segunda venta = *Dfb*
Beneficio = *B*

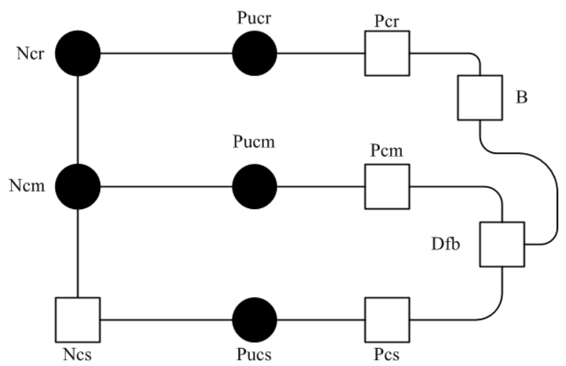
<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Estructura semántica</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>Pcm=Ncm·Pucm</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td><td rowspan="6">
</td></tr>
<tr><td>Pcr= Ncr·Pucr</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>Ncm=Ncr+Ncs</td><td>Cambio 2</td></tr>
<tr><td>Pcs=Ncs·Pucs</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>Pcm=Pcs+Dfb</td><td>Combinación 2</td></tr>
<tr><td>Pcr=B+Dfb</td><td>Cambio 4</td></tr>
</table>

Figura 4.51: Lectura 3 del problema *El Mayorista*.

Lectura 4

Análisis de las cantidades

Corderos que compra el mayorista = *Ncm* =55
Precio que paga el mayorista por cada cordero = *Pucm* = 46
Corderos que vende al restaurante = *Ncr* = 33
Precio al que vende cada cordero al restaurante = *Pucr* = 65
Número de corderos que vende al supermercado = *Ncs*
Precio al que vende cada cordero al supermercado = *Pucs* = 58
Beneficio = *B*
Beneficio por cordero vendido al supermercado = *Bucs*
Beneficio por cordero vendido al restaurante = *Bucr*
Beneficio por los corderos vendidos al supermercado = *Bcs*
Beneficio por los corderos vendidos al restaurante = *Bcr*

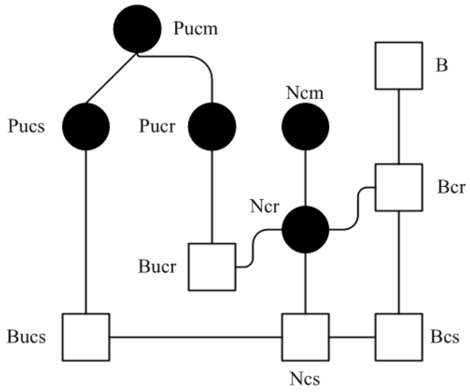
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pucr=Pucm+Bucr	Cambio 4	
Ncm=Ncr+Ncs	Cambio 2	
Pucs=Pucm+Bucs	Cambio 4	
Bcr=Bucr·Ncr	Isomorfismo de medidas 1	
Bcs=Bucs·Ncs	Isomorfismo de medidas 1	
B=Bcr+Bcs	Combinación 1	

Figura 4.52: Lectura 4 del problema *El Mayorista*.

<u>*El Camión*</u>

Un camión que hace la ruta Madrid-Valencia ha cargado una caja de 235 kilos y 26 sacos de 14 kilos. ¿Cuánto pesa la carga en total?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Peso de la caja = *Pc* = 235
Número de sacos = *Ns* = 26
Peso de cada saco = *Ps* = 14
Peso de todos los sacos cargados = *Pts*
Peso total de la carga = *P*

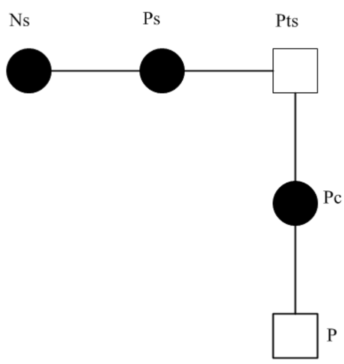
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	Grafo
Pts=Ns·Ps	Isomorfismo de medidas 1	
P=Pts+Pc	Combinación 1	

Figura 4.53: Lectura 1 del problema *El Camión*.

El Bautizo

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Coste total del banquete = *Ct* = 663
Personas que han asistido de más = *Pa* = 8
Coste total del banquete con 8 personas más = *Ctm* = 975
Diferencia de precio entre los dos banquetes = *Dp*
Precio del menú de una persona = *Pm*
Personas que asisten al bautizo = *P*

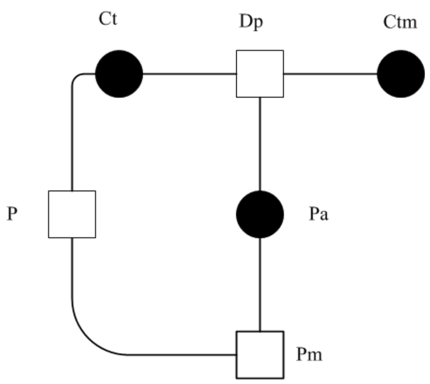
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Ctm=Ct+Dp *Dp=Pm·Pa* *Ct=Pm·P*	Cambio 4 Isomorfismo de medidas 2 Isomorfismo de medidas 3	

Figura 4.54: Lectura 1 del problema *El Bautizo*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Coste total del banquete = *Ct* = 663
Personas que han asistido de más = *Pa* = 8
Coste total del banquete con 8 personas más = *Ctm* = 975
Diferencia de precio entre los dos banquetes = *Dp*
Precio del menú de una persona = *Pm*
Personas que hubieran asistido al banquete más caro = *Pc*
Personas que asisten al bautizo = *P*

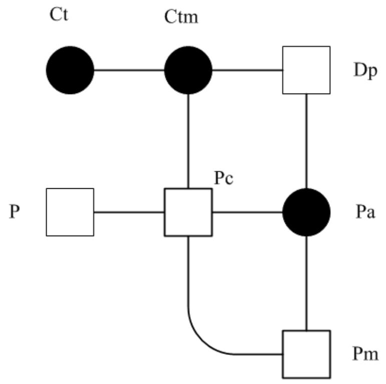
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Ctm=Ct+Dp *Dp=Pm·Pa* *Ctm=Pm·Pc* *Pc=P+Pa*	Cambio 4 Isomorfismo de medidas 2 Isomorfismo de medidas 3 Cambio 2	

Figura 4.55: Lectura 2 del problema *El Bautizo*.

<u>Los Billetes</u>

Ayer fui al banco y saqué 13 billetes y hoy he sacado 9. Si todos los billetes eran de 5 euros, ¿cuánto dinero he sacado del banco en total?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de billetes que saqué ayer = *Nba* = 13
Número de billetes que he sacado hoy = *Nbh* = 9
Valor de cada billete = *Vb* = 5
Dinero sacado ayer = *Da*
Dinero sacado hoy = *Dh*
Dinero total = *D*

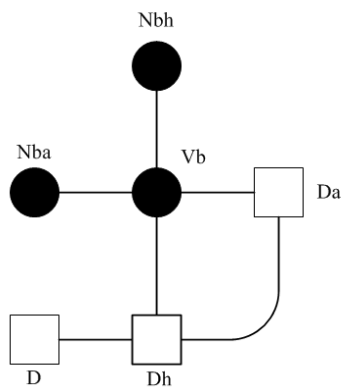
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Da=Nba·Vb *Dh=Nbh·Vb* *D=Da+Dh*	Isomorfismo de medidas 1 Isomorfismo de medidas 1 Combinación 1	

Figura 4.56: Lectura 1 del problema *Los Billetes*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de billetes que saqué ayer = *Nba* = 13
Número de billetes que he sacado hoy = *Nbh* = 9
Valor de cada billete = *Vb* = 5
Número de billetes sacados entre ambos días = *Nb*
Dinero total = *D*

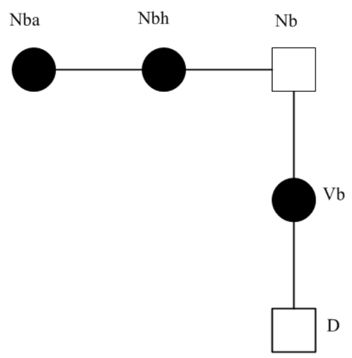
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Nb=Nba+Nbh *D=Nb·Vb*	Combinación 1 Isomorfismo de medidas 1	

Figura 4.57: Lectura 2 del problema *Los Billetes.*

<u>*La Empresa*</u>

Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000€. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

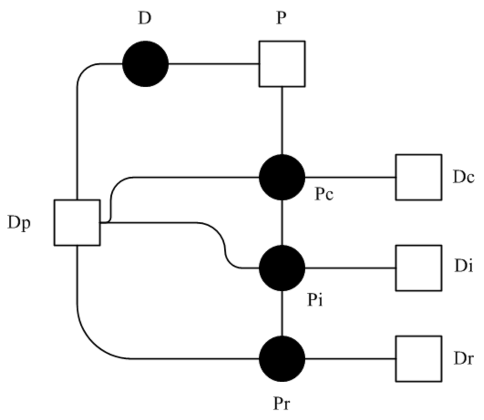
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pc+Pi+Pr	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 4.58: Lectura 1 del problema *La Empresa*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

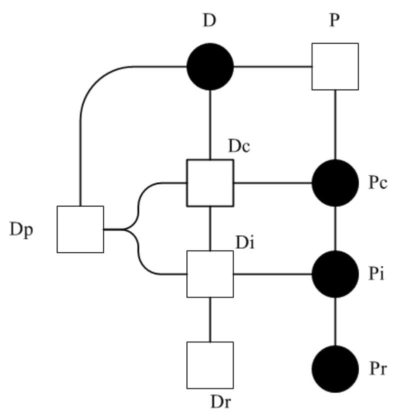
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pc+Pi+Pr	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dc+Di+Dr	Combinación 2	

Figura 4.59: Lectura 2 del problema *La Empresa*.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

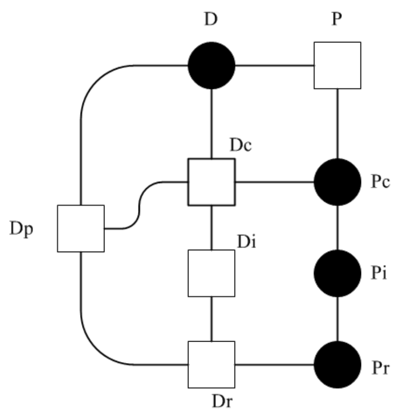
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pc+Pi+Pr	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dc+Di+Dr	Combinación 2	

Figura 4.60: Lectura 3 del problema *La Empresa*.

Lectura 4

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

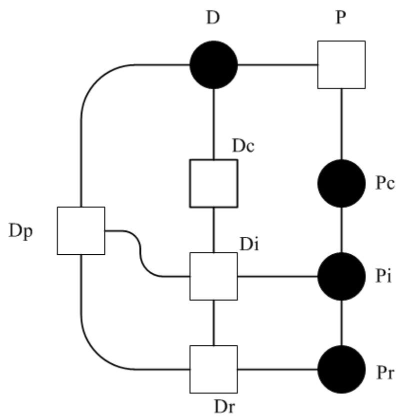
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pc+Pi+Pr	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	
D=Dc+Di+Dr	Combinación 2	

Figura 4.61: Lectura 4 del problema *La Empresa*.

Lectura 5

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Partes de Carla e Icíar = *Pci*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

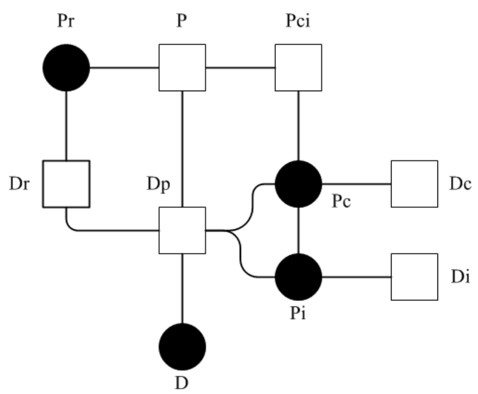
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pci=Pc+Pi	Combinación 1	
P=Pci+Pr	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 4.62: Lectura 5 del problema *La Empresa*.

Lectura 6

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Partes de Carla y Rodrigo = *Pcr*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

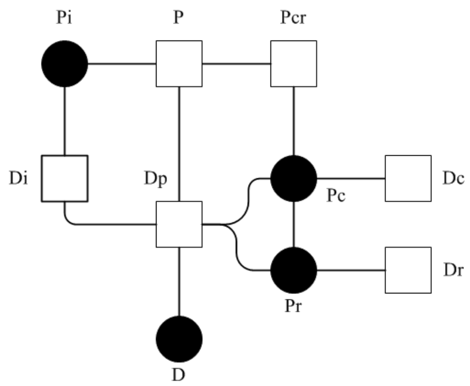
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pcr=Pc+Pr	Combinación 1	
P=Pcr+Pi	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 4.63: Lectura 6 del problema *La Empresa*.

Lectura 7

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Partes de Icíar y Rodrigo = *Pir*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

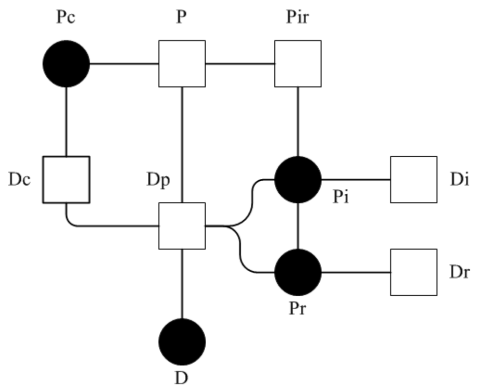
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pir=Pi+Pr	Combinación 1	
P=Pir+Pc	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	

Figura 4.64: Lectura 7 del problema *La Empresa*.

Lectura 8

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Carla e Icíar = *Dci*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

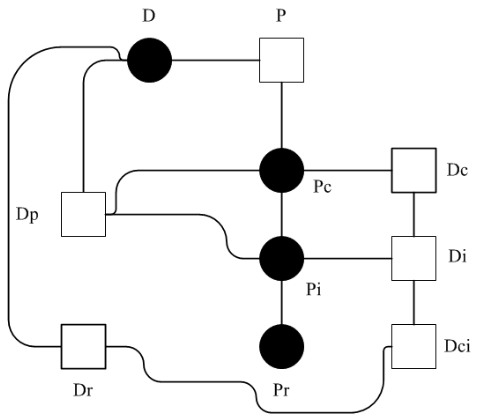
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pc+Pi+Pr	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dci=Dc+Di	Combinación 1	
D=Dci+Dr	Combinación 2	

Figura 4.65: Lectura 8 del problema *La Empresa*.

Lectura 9

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = D = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = Pc = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = Pi = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = Pr = 5
Total de partes entre los tres = P
Dinero que le toca a una parte = Dp
Dinero que le corresponde a Carla = Dc
Dinero que le corresponde a Icíar = Di
Dinero que le corresponde a Carla y Rodrigo = Dcr
Dinero que le corresponde a Rodrigo = Dr

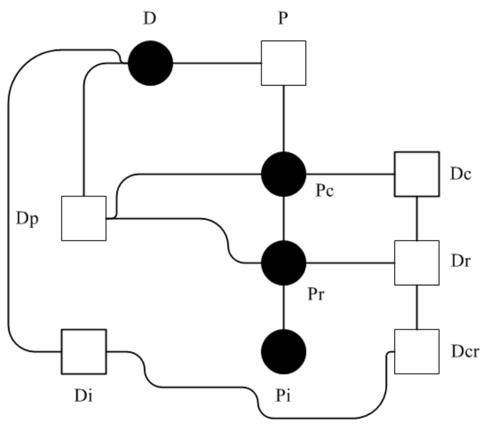
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$P=Pc+Pi+Pr$	Combinación 1	
$D=Dp\cdot P$	Isomorfismo de medidas 2	
$Dc=Dp\cdot Pc$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dr=Dp\cdot Pr$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dcr=Dc+Dr$	Combinación 1	
$D=Dcr+Di$	Combinación 2	

Figura 4.66: Lectura 9 del problema *La Empresa*.

Lectura 10

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = D = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = Pc = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = Pi = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = Pr = 5
Total de partes entre los tres = P
Dinero que le toca a una parte = Dp
Dinero que le corresponde a Carla = Dc
Dinero que le corresponde a Icíar = Di
Dinero que le corresponde a Icíar y Rodrigo = Dir
Dinero que le corresponde a Rodrigo = Dr

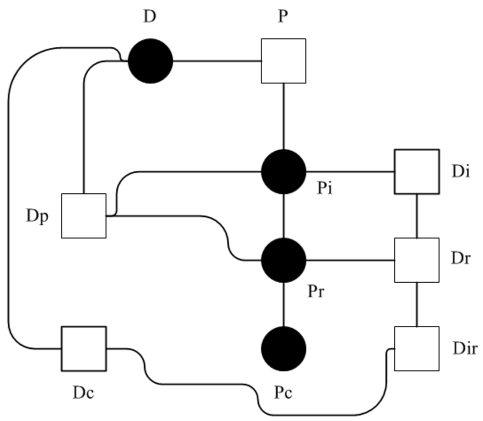
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
P=Pc+Pi+Pr	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	
Dir=Di+Dr	Combinación 1	
D=Dir+Dc	Combinación 2	

Figura 4.67: Lectura 10 del problema *La Empresa*.

Lectura 11

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Número de partes que le tocan a Carla e Icíar = *Pci*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Carla e Icíar = *Dci*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

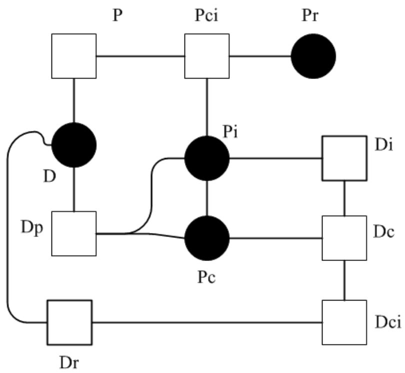
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pci=Pc+Pi	Combinación 1	
P=Pci+Pr	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dci=Dc+Di	Combinación 1	
D=Dci+Dr	Combinación 2	

Figura 4.68: Lectura 11 del problema *La Empresa*.

Lectura 12

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Número de partes que le tocan a Carla e Icíar = *Pci*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Carla y Rodrigo = *Dcr*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

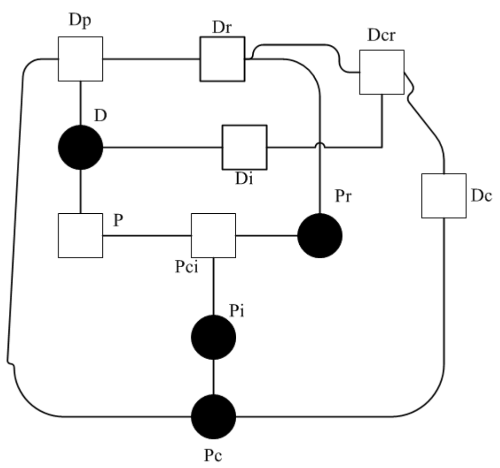
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pci=Pc+Pi	Combinación 1	
P=Pci+Pr	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	
Dcr=Dc+Dr	Combinación 1	
D=Dcr+Di	Combinación 2	

Figura 4.69: Lectura 12 del problema *La Empresa*.

Lectura 13

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Número de partes que le tocan a Carla e Icíar = *Pci*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Icíar y Rodrigo = *Dir*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

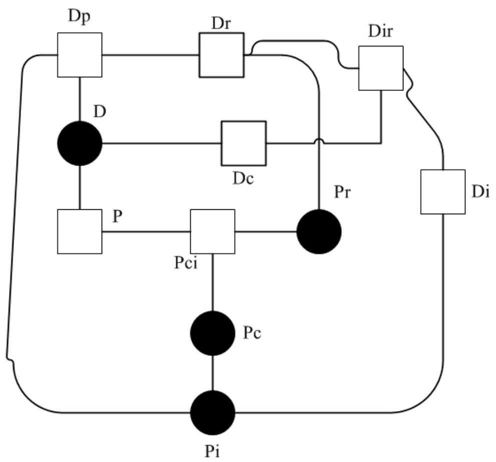
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pci=Pc+Pi	Combinación 1	
P=Pci+Pr	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	
Dir=Di+Dr	Combinación 1	
D=Dir+Dc	Combinación 2	

Figura 4.70: Lectura 13 del problema *La Empresa*.

Lectura 14

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Número de partes que le tocan a Carla y Rodrigo = *Pcr*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Carla e Icíar = *Dci*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

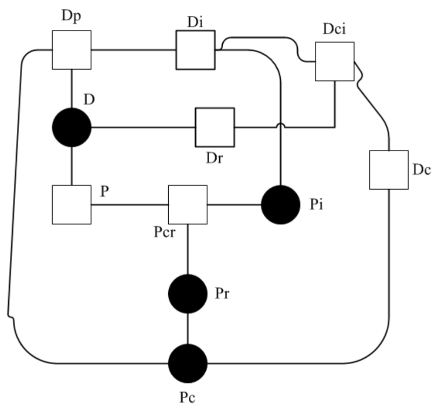
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pcr=Pc+Pr	Combinación 1	
P=Pcr+Pi	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dci=Dc+Di	Combinación 1	
D=Dci+Dr	Combinación 2	

Figura 4.71: Lectura 14 del problema *La Empresa*.

Lectura 15

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = D = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = Pc = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = Pi = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = Pr = 5
Número de partes que le tocan a Carla y Rodrigo = Pcr
Total de partes entre los tres = P
Dinero que le toca a una parte = Dp
Dinero que le corresponde a Carla = Dc
Dinero que le corresponde a Icíar = Di
Dinero que le corresponde a Icíar y Rodrigo = Dir
Dinero que le corresponde a Rodrigo = Dr

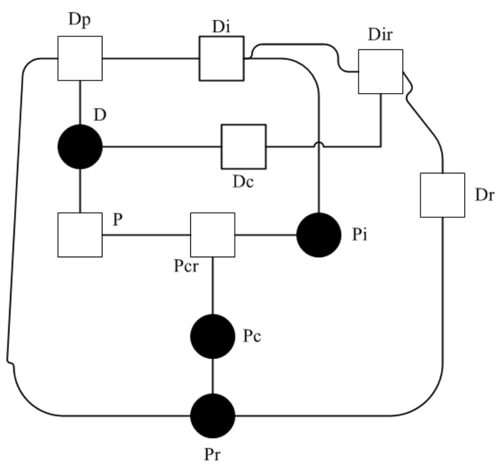
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
$Pcr=Pc+Pr$	Combinación 1	
$P=Pcr+Pi$	Combinación 1	
$D=Dp\cdot P$	Isomorfismo de medidas 2	
$Di=Dp\cdot Pi$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dr=Dp\cdot Pr$	Isomorfismo de medidas 1	
$Dir=Di+Dr$	Combinación 1	
$D=Dir+Dc$	Combinación 2	

Figura 4.72: Lectura 15 del problema *La Empresa*.

Lectura 16

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = D = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = Pc = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = Pi = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = Pr = 5
Número de partes que le tocan a Carla y Rodrigo = Pcr
Total de partes entre los tres = P

Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Carla y Rodrigo = *Dcr*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

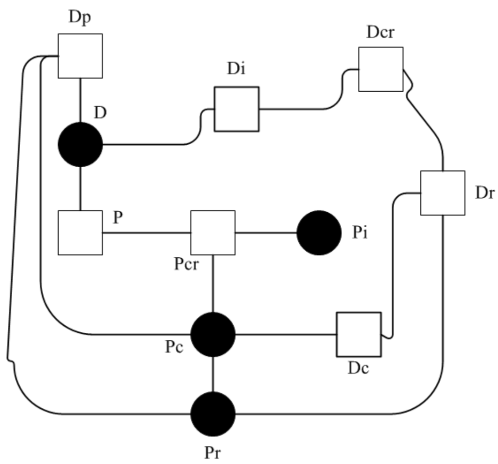
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pcr=Pc+Pr	Combinación 1	 Figura 4.73. Grafo asociado a la lectura 16 del problema *La empresa*.
P=Pcr+Pi	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	
Dcr=Dc+Dr	Combinación 1	
D=Dcr+Di	Combinación 2	

Figura 4.73: Lectura 16 del problema *La Empresa*.

Lectura 17

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Número de partes que le tocan a Icíar y Rodrigo = *Pir*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Carla e Icíar = *Dci*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

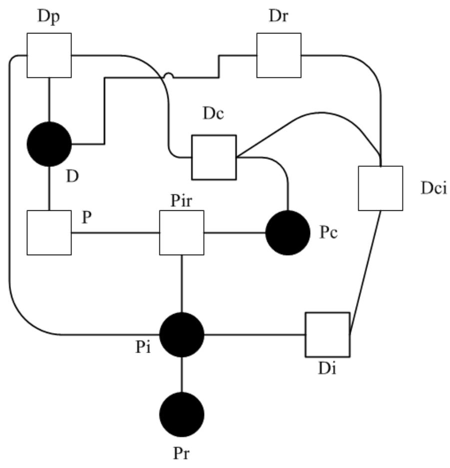
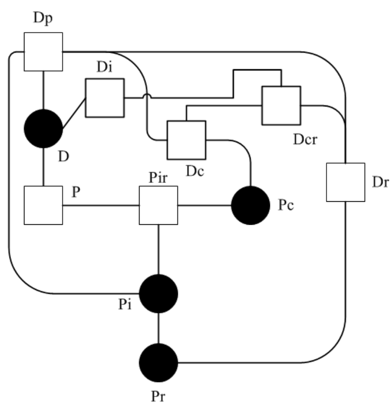
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pir=Pi+Pr	Combinación 1	
P=Pir+Pc	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dci=Dc+Di	Combinación 1	
D=Dci+Dr	Combinación 2	

Figura 4.74: Lectura 17 del problema *La Empresa*.

Lectura 18

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Número de partes que le tocan a Icíar y Rodrigo = *Pir*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Carla y Rodrigo = *Dcr*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pir=Pi+Pr	Combinación 1	
P=Pir+Pc	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Dc=Dp·Pc	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	
Dcr=Dc+Dr	Combinación 1	

D=Dcr+Di	Combinación 2	

Figura 4.75: Lectura 18 del problema *La Empresa*.

Lectura 19

Análisis de las cantidades

Total de dinero que ha ganado la empresa = *D* = 18000
Número de partes que le corresponden a Carla = *Pc* = 6
Número de partes que le corresponden a Icíar = *Pi* = 9
Número de partes que le corresponden a Rodrigo = *Pr* = 5
Número de partes que le tocan a Icíar y Rodrigo = *Pir*
Total de partes entre los tres = *P*
Dinero que le toca a una parte = *Dp*
Dinero que le corresponde a Carla = *Dc*
Dinero que le corresponde a Icíar = *Di*
Dinero que le corresponde a Icíar y Rodrigo = *Dir*
Dinero que le corresponde a Rodrigo = *Dr*

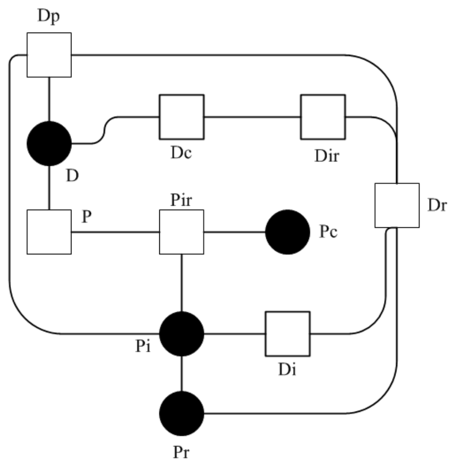
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pir=Pi+Pr	Combinación 1	
P=Pir+Pc	Combinación 1	
D=Dp·P	Isomorfismo de medidas 2	
Di=Dp·Pi	Isomorfismo de medidas 1	
Dr=Dp·Pr	Isomorfismo de medidas 1	
Dir=Di+Dr	Combinación 1	
D=Dir+Dc	Combinación 2	

Figura 4.76: Lectura 19 del problema *La Empresa*.

El Granjero

Un granjero se dedica a la venta de los huevos que ponen sus gallinas. En la granja tiene 12 corrales grandes y 28 corrales pequeños. Cada corral grande produce 140 huevos diarios y cada corral pequeño, 45. Si el granjero comercializa los huevos en cajas donde caben 60 huevos, ¿cuántas cajas necesita diariamente?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de corrales grandes = *Ncg* = 12
Número de corrales pequeños = *Ncp* = 28
Huevos diarios que produce un corral grande = *Hucg* = 140
Huevos diarios que produce un corral pequeño = *Hucp* = 45
Número de huevos que caben en cada caja = *Hpc* = 60
Huevos diarios producidos en los corrales grandes = *Hcg*
Huevos diarios producidos en los corrales pequeños = *Hcp*
Total de huevos producidos diariamente = *H*
Total de cajas necesarias diariamente = *C*

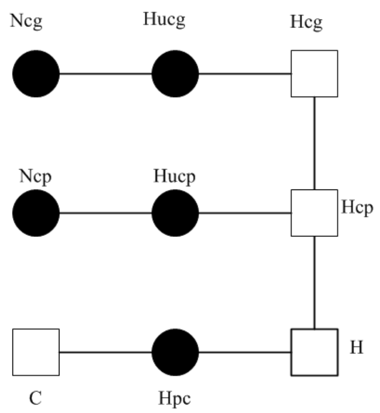
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Hcg=Hucg·Ncg	Isomorfismo de medidas 1	
Hcp=Hucp·Ncp	Isomorfismo de medidas 1	
H=Hcg+Hcp	Combinación 1	
H=Hpc·C	Isomorfismo de medidas 3	

Figura 4.77: Lectura 1 del problema *El Granjero*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Número de corrales grandes = *Ncg* = 12
Número de corrales pequeños = *Ncp* = 28
Huevos diarios que produce un corral grande = *Hucg* = 140
Huevos diarios que produce un corral pequeño = *Hucp* = 45
Número de huevos que caben en cada caja = *Hpc* = 60
Huevos diarios producidos en los corrales grandes = *Hcg*
Huevos diarios producidos en los corrales pequeños = *Hcp*
Cajas para almacenar los huevos diarios producidos en corrales grandes = *Ccg*
Cajas para almacenar los huevos diarios producidos en corrales pequeños = *Ccp*
Total de cajas necesarias diariamente = *C*

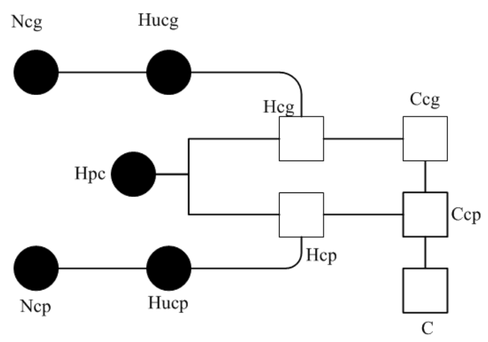
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Hcg=Hucg·Ncg *Hcp=Hucp·Ncp* *Hcg=Hpc·Ccg* *Hcp=Hpc·Ccp* *C=Ccg+Ccp*	Isomorfismo de medidas 1 Isomorfismo de medidas 1 Isomorfismo de medidas 3 Isomorfismo de medidas 3 Combinación 1	

Figura 4.78: Lectura 2 del problema *El Granjero.*

<u>*Los Disfraces*</u>

Se disponen de 450 m de tela para hacer 25 disfraces de león que necesitan 6 metros de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer disfraces de elefante. Si para hacer un disfraz de elefante se necesitan 15 m de tela, ¿cuántos disfraces de elefante podrán hacerse?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Metros totales de tela = *Mp* = 450
Número de disfraces de león = *L* = 25
Metros de tela por disfraz de león = *Mul* = 6
Metros de tela por disfraz de elefante = *Mue* = 15
Número de disfraces de elefante = *E*
Metros de tela para disfraces de león = *Ml*
Metros de tela para disfraces de elefante = *Me*

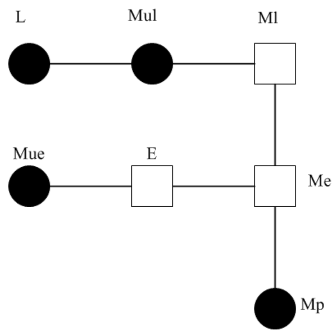
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Ml=L·Mul *Mp=Me+Ml* *Me=E·Mue*	Isomorfismo de medidas 1 Cambio 2 Isomorfismo de medidas 3	

Figura 4.79: Lectura 1 del problema *Los Disfraces.*

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Metros totales de tela = *Mp* = 450
Número de disfraces de león = *L* = 25
Metros de tela por disfraz de león = *Mul* = 6
Metros de tela por disfraz de elefante = *Mue* = 15
Número de disfraces de elefante = *E*
Número de disfraces de elefante que podría hacer con toda la tela = *Ett*
Número de disfraces de elefante que se pueden hacer con los metros de tela para disfraces de león = *Etl*
Metros de tela para disfraces de león = *Ml*

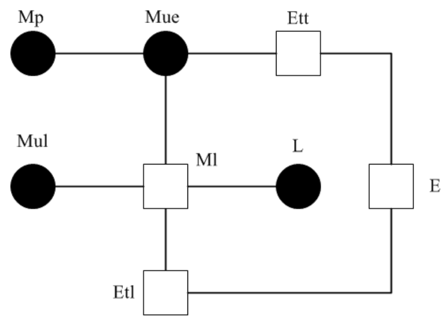
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Mp=Ett·Mue	Isomorfismo de medidas 3	
Ml=L·Mul	Isomorfismo de medidas 1	
Ml=Mue·Etl	Isomorfismo de medidas 3	
Ett=E+Etl	Cambio 2	

Figura 4.80: Lectura 2 del problema *Los Disfraces.*

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Metros totales de tela = *Mp* = 450
Número de disfraces de león = *L* = 25
Metros de tela por disfraz de león = *Mul* = 6
Metros de tela por disfraz de elefante = *Mue* = 15
Número de disfraces de elefante = *E*
Número de disfraces de león que podrían hacerse con toda la tela = *Ltt*
Número de disfraces de león que no se hacen = *Ln*
Metros de tela para disfraces de elefante = *Me*

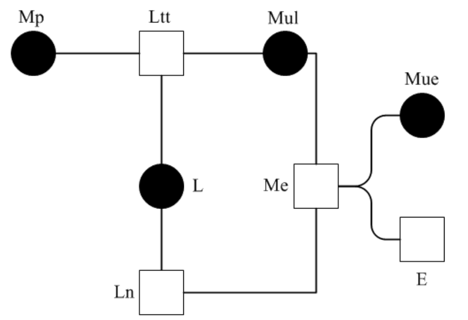
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Mp=Ltt·Mul	Isomorfismo de medidas 3	
Ltt=Ln+L	Cambio 2	
Me=Ln·Mul	Isomorfismo de medidas 1	
Me=E·Mue	Isomorfismo de medidas 3	

Figura 4.81: Lectura 3 del problema *Los Disfraces.*

<u>El pienso</u>

Un granjero gasta diariamente 15 kilos de pienso para gallinas y 120 kilos de pienso para vacas. El kilo de pienso para gallinas cuesta 2 € y el de pienso para vacas, 5 €. Si en un año sólo puede gastar 250.000 euros. ¿Cuánto dinero le sobra?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Kilos diarios de pienso para gallinas = *Kg* = 15
Kilos diarios de pienso para vacas = *Kv* = 120
Precio de un kilo de pienso para gallinas = *Pug* = 2
Precio de un kilo de pienso para vacas = *Puv* = 5
Días en un año = *Da* = 365
Dinero que se podría gastar al año = *Dt* = 250000
Dinero gastado en pienso para gallinas en un día = *Pdg*
Dinero gastado en pienso para vacas en un día = *Pdv*
Dinero gastado en un día en comida para los animales = *Pdc*
Dinero gastado en un año en comida para los animales = *Pac*
Dinero que sobrará en un año = *Ds*

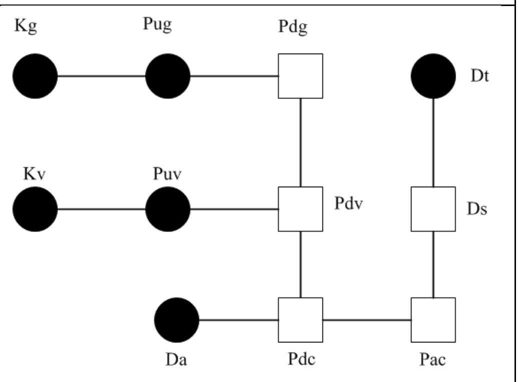
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pdg=Kg·Pug	Isomorfismo de medidas 1	
Pdv=Kv·Puv	Isomorfismo de medidas 1	
Pdc=Pdv+Pdg	Combinación 1	
Pac=Pdc·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dt=Pac+Ds	Cambio 4	

Figura 4.82: Lectura 1 del problema *El Pienso.*

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Kilos diarios de pienso para gallinas = *Kg* = 15
Kilos diarios de pienso para vacas = *Kv* = 120
Precio de un kilo de pienso para gallinas = *Pug* = 2
Precio de un kilo de pienso para vacas = *Puv* = 5
Días en un año = *Da* = 365
Dinero que se podría gastar al año = *Dt* = 250000
Dinero gastado en un año en comida para gallinas = *Pag*
Dinero gastado en un año en comida para vacas = *Pav*
Dinero gastado en un año en comida para los animales = *Pac*
Kilos anuales de pienso para gallinas = *Kag*
Kilos anuales de pienso para vacas = *Kav*
Dinero que sobrará en un año = *Ds*

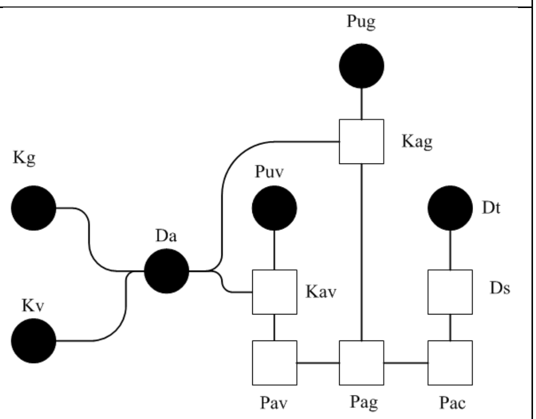
<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Estructura semántica</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>Kag=Kg·Da</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td><td rowspan="6">
</td></tr>
<tr><td>Kav=Kv·Da</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>Pag=Kag·Pug</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>Pav=Kav·Puv</td><td>Isomorfismo de medidas 1</td></tr>
<tr><td>Pac=Pag+Pav</td><td>Combinación 1</td></tr>
<tr><td>Dt=Pac+Ds</td><td>Cambio 4</td></tr>
</table>

Figura 4.83: Lectura 2 del problema *El Pienso*.

Lectura 3

Análisis de las cantidades

Kilos diarios de pienso para gallinas = *Kg* = 15
Kilos diarios de pienso para vacas = *Kv* = 120
Precio de un kilo de pienso para gallinas = *Pug* = 2
Precio de un kilo de pienso para vacas = *Puv* = 5
Días en un año = *Da* = 365
Dinero que se podría gastar al año = *Dt* = 250000
Dinero gastado en pienso para gallinas en un día = *Pdg*
Dinero gastado en pienso para vacas en un día = *Pdv*
Dinero gastado en un año en comida para gallinas = *Pag*
Dinero gastado en un año en comida para vacas = *Pav*
Dinero gastado en un año en comida para los animales = *Pac*
Dinero que sobrará en un año = *Ds*

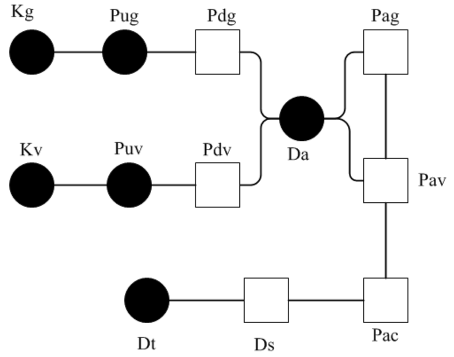
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pdg=Kg·Pug	Isomorfismo de medidas 1	
Pdv=Kv·Puv	Isomorfismo de medidas 1	
Pag=Pdg·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Pav=Pdv·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Pac=Pag+Pav	Combinación 1	
Dt=Pac+Ds	Cambio 4	

Figura 4.84: Lectura 3 del problema *El Pienso*.

Lectura 4

Análisis de las cantidades

Kilos diarios de pienso para gallinas = *Kg* = 15
Kilos diarios de pienso para vacas = *Kv* = 120
Precio de un kilo de pienso para gallinas = *Pug* = 2
Precio de un kilo de pienso para vacas = *Puv* = 5
Días en un año = *Da* = 365
Dinero que se podría gastar al año = *Dt* = 250000
Dinero gastado en pienso para gallinas en un día = *Pdg*
Dinero gastado en pienso para vacas en un día = *Pdv*
Dinero gastado en un año en comida para gallinas = *Pag*
Dinero gastado en un año en comida para vacas = *Pav*
Dinero que sobrará en un año = *Ds*

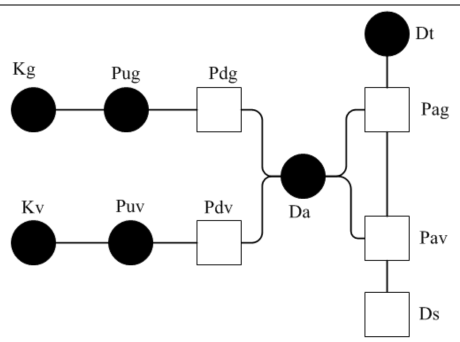
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pdg=Kg·Pug	Isomorfismo de medidas 1	
Pdv=Kv·Puv	Isomorfismo de medidas 1	
Pag=Pdg·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Pav=Pdv·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dt=Pag+Pav+Ds	Combinación 2	

Figura 4.85: Lectura 4 del problema *El Pienso*.

Lectura 5

Análisis de las cantidades

Kilos diarios de pienso para gallinas = *Kg* = 15
Kilos diarios de pienso para vacas = *Kv* = 120
Precio de un kilo de pienso para gallinas = *Pug* = 2
Precio de un kilo de pienso para vacas = *Puv* = 5
Días en un año = *Da* = 365
Dinero que se podría gastar al año = *Dt* = 250000
Dinero gastado en un año en comida para gallinas = *Pag*
Dinero gastado en un año en comida para vacas = *Pav*
Kilos anuales de pienso para gallinas = *Kag*
Kilos anuales de pienso para vacas = *Kav*
Dinero que sobrará en un año = *Ds*

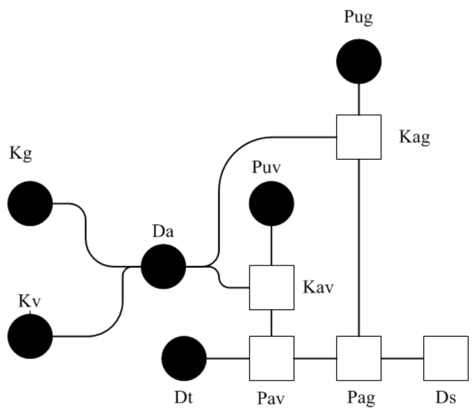
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kag=Kg·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kav=Kv·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Pag=Kag·Pug	Isomorfismo de medidas 1	
Pav=Kav·Puv	Isomorfismo de medidas 1	
Dt=Pag+Pav+Ds	Combinación 2	

Figura 4.86: Lectura 5 del problema *El Pienso*.

Lectura 6

Análisis de las cantidades

Kilos diarios de pienso para gallinas = *Kg* = 15
Kilos diarios de pienso para vacas = *Kv* = 120
Precio de un kilo de pienso para gallinas = *Pug* = 2
Precio de un kilo de pienso para vacas = *Puv* = 5
Días en un año = *Da* = 365
Dinero que se podría gastar al año = *Dt* = 250000
Dinero gastado en pienso para gallinas en un día = *Pdg*
Dinero gastado en pienso para vacas en un día = *Pdv*
Dinero gastado en un año en comida para gallinas = *Pag*
Dinero gastado en un año en comida para vacas = *Pav*
Dinero que sobra tras el gasto anual en comida de las gallinas = *Dsg*
Dinero que sobrará en un año = *Ds*

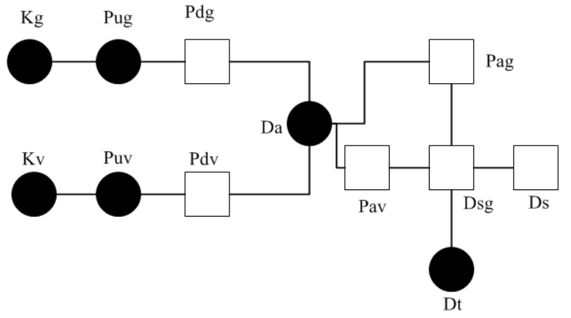
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pdg=Kg·Pug	Isomorfismo de medidas 1	
Pdv=Kv·Puv	Isomorfismo de medidas 1	
Pag=Pdg·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Pav=Pdv·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dt=Pag+Dsg	Cambio 4	
Dsg=Pav+Ds	Cambio 4	

Figura 4.87: Lectura 6 del problema *El Pienso*.

Lectura 7

Análisis de las cantidades

Kilos diarios de pienso para gallinas = *Kg* = 15
Kilos diarios de pienso para vacas = *Kv* = 120
Precio de un kilo de pienso para gallinas = *Pug* = 2
Precio de un kilo de pienso para vacas = *Puv* = 5
Días en un año = *Da* = 365
Dinero que se podría gastar al año = *Dt* = 250000
Dinero gastado en pienso para gallinas en un día = *Pdg*
Dinero gastado en pienso para vacas en un día = *Pdv*
Dinero gastado en un año en comida para gallinas = *Pag*
Dinero gastado en un año en comida para vacas = *Pav*
Dinero que sobra tras el gasto anual en comida de las vacas = *Dsv*
Dinero que sobrará en un año = *Ds*

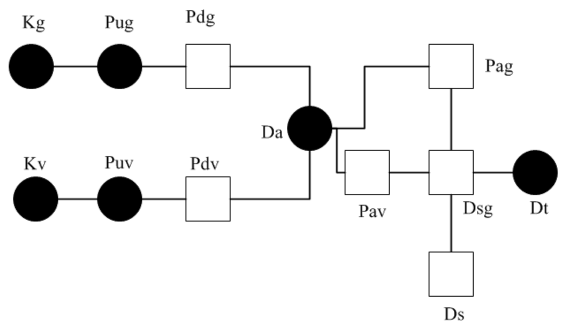
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Pdg=Kg·Pug	Isomorfismo de medidas 1	
Pdv=Kv·Puv	Isomorfismo de medidas 1	
Pag=Pdg·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Pav=Pdv·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Dt=Pav+Dsv	Cambio 4	
Dsv=Pag+Ds	Cambio 4	

Figura 4.88: Lectura 7 del problema *El Pienso*.

Lectura 8

Análisis de las cantidades

Kilos diarios de pienso para gallinas = *Kg* = 15
Kilos diarios de pienso para vacas = *Kv* = 120
Precio de un kilo de pienso para gallinas = *Pug* = 2
Precio de un kilo de pienso para vacas = *Puv* = 5
Días en un año = *Da* = 365
Dinero que se podría gastar al año = *Dt* = 250000
Dinero gastado en un año en comida para gallinas = *Pag*
Dinero gastado en un año en comida para vacas = *Pav*
Kilos anuales de pienso para gallinas = *Kag*
Kilos anuales de pienso para vacas = *Kav*
Dinero que sobra tras el gasto anual en comida de las gallinas = *Dsg*
Dinero que sobrará en un año = *Ds*

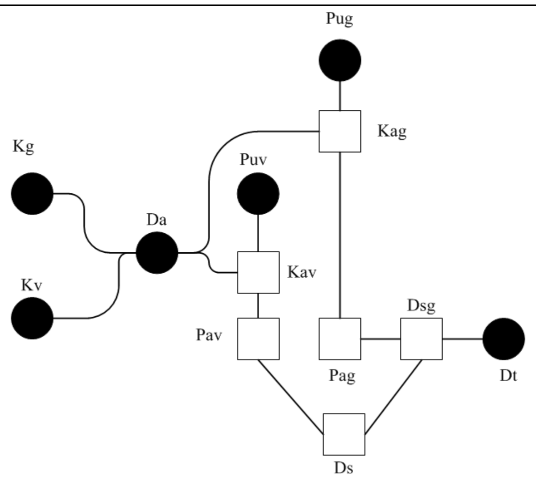
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kag=Kg·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kav=Kv·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Pag=Kag·Pug	Isomorfismo de medidas 1	
Pav=Kav·Puv	Isomorfismo de medidas 1	
Dt=Dsg+Pag	Cambio 4	
Dsg=Pav+Ds	Cambio 4	

Figura 4.89: Lectura 8 del problema *El Pienso*.

Lectura 9

Análisis de las cantidades

Kilos diarios de pienso para gallinas = *Kg* = 15
Kilos diarios de pienso para vacas = *Kv* = 120
Precio de un kilo de pienso para gallinas = *Pug* = 2
Precio de un kilo de pienso para vacas = *Puv* = 5
Días en un año = *Da* = 365
Dinero que se podría gastar al año = *Dt* = 250000
Dinero gastado en un año en comida para gallinas = *Pag*
Dinero gastado en un año en comida para vacas = *Pav*
Kilos anuales de pienso para gallinas = *Kag*
Kilos anuales de pienso para vacas = *Kav*
Dinero que sobra tras el gasto anual en comida de las vacas = *Dsv*
Dinero que sobrará en un año = *Ds*

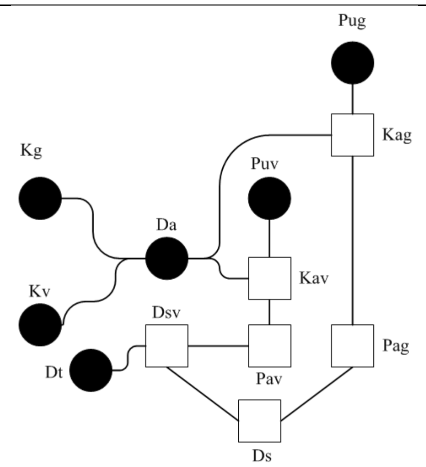
Análisis de las relaciones	*Estructura semántica*	*Grafo*
Kag=Kg·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Kav=Kv·Da	Isomorfismo de medidas 1	
Pag=Kag·Pug	Isomorfismo de medidas 1	
Pav=Kav·Puv	Isomorfismo de medidas 1	
Dt=Dsv+Pav	Cambio 4	
Dsv=Pag+Ds	Cambio 4	

Figura 4.90: Lectura 9 del problema *El Pienso*.

4.4. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS PRODUCCIONES EN LOS CUESTIONARIOS

Esta subsección presenta un análisis comparativo entre los dos grupos del desempeño de los estudiantes en los cuestionarios Pre y Post. El objetivo principal de este análisis es valorar si las secuencias de enseñanza han propiciado una mejora significativa en la competencia en la resolución aritmética de problemas verbales de los participantes y, además, comparar en qué medida esta competencia ha variado en función de la secuencia de enseñanza realizada por los estudiantes. En el análisis tomamos en consideración una variable independiente y diferentes variables dependientes. La variable independiente es el tipo de instrucción seguida por el participante: grupo SH o grupo CH. En cuanto a las variables dependientes, examinamos por separados diferentes variables: una referida al rendimiento global de los estudiantes en el conjunto de los problemas, y otras, de ámbito más local, que dan cuenta del rendimiento de los estudiantes atendiendo al número de etapas de los problemas o su capacidad de resolver determinadas etapas en función de la categoría semántica a la que pertenezcan.

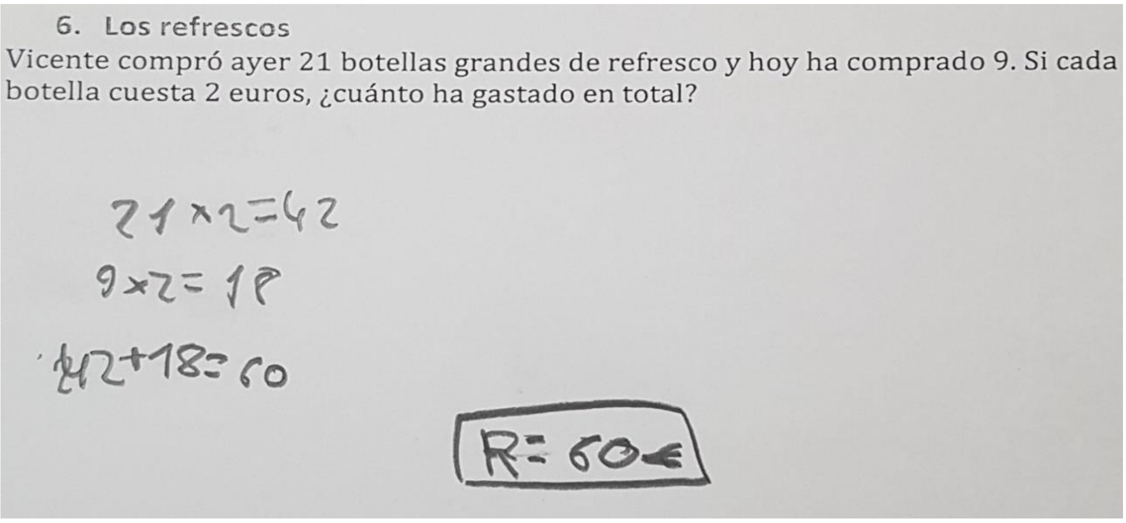
La siguiente subsección resume la codificación previa al análisis estadístico de las producciones de los estudiantes en los cuestionarios Pre y Post. Tras ello, se presentan los resultados del estudio comparativo.

4.4.1 LA CODIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS DE LOS CUESTIONARIOS

Las producciones escritas de los estudiantes en los cuestionarios han sido reducidas para cada problema a una puntuación que se calcula como la media aritmética de las puntuaciones obtenidas en cada una de las etapas constituyentes de la lectura abordada por el participante. La puntuación de cada etapa se ha codificado mediante una variable dicotómica según el estudiante resolviera correctamente o no la etapa en cuestión. Finalmente, la puntuación global para cada problema tomaba en consideración, a través de la media aritmética, el desempeño en cada una de las etapas y el número de etapas. Las etapas –y, en consecuencia, los problemas– no abordados se codificaron como incorrectas. Dado que no es objeto de la investigación analizar la competencia en el cálculo aritmético, se codificaron como correctas etapas en la que los estudiantes identificaban correctamente, y sin ningún género de dudas, la operación a realizar y las cantidades conocidas involucradas en la relación, aunque cometieran algún error de cálculo.

Veamos, a modo de ejemplo, las codificaciones que se hicieron de las resoluciones de dos estudiantes (E2 y E8 del Grupo SH) del problema *Los Refrescos*, presentado en el cuestionario Pre. Es importante indicar que, cada uno de los alumnos, utilizó una lectura diferente para la resolución del problema.

En primer lugar, el estudiante E2 realizó la resolución de este problema con la lectura L1 (Figura 4.91). Esta lectura consta de tres etapas, siendo las dos primeras isomorfismos de medida 1 y la última una combinación 1.


6. Los refrescos
Vicente compró ayer 21 botellas grandes de refresco y hoy ha comprado 9. Si cada botella cuesta 2 euros, ¿cuánto ha gastado en total?

21×2=42
9×2=18
42+18=60
R= 60€

Figura 4.91. Resolución del estudiante E2 del problema *Los Refrescos*.

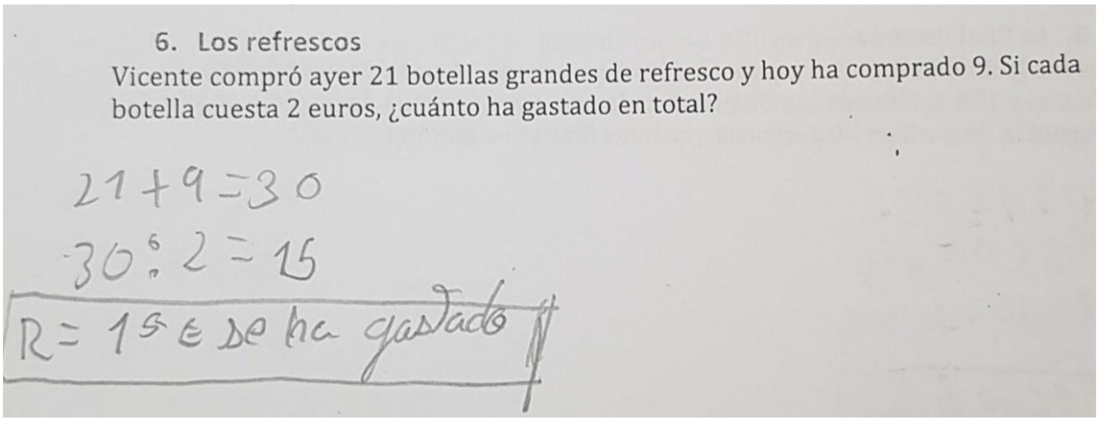
Como se puede observar, E2 planteó correctamente las tres relaciones entre cantidades y, por tanto, la codificación de este problema es la que presentamos en la Tabla 4.1. La puntuación global para estudiante en el problema *Los Refrescos* fue, por tanto, de 1 punto.

Tabla 4.1.

Codificación de la resolución del problema *Los Refrescos* en el estudiante E2.

PROBLEMA	LOS REFRESCOS		
ESTUDIANTE	**Isomorfismo 1**	**Isomorfismo 1**	**Combinación 1**
E2	1	1	1

En segundo lugar, el estudiante E8 realizó la resolución de este problema con la lectura L2 (Figura 4.92). Esta lectura es la formada por dos etapas; la primera de ellas se corresponde con una estructura semántica de combinación 1 mientras que la otra era un isomorfismo de medida 1.


6. Los refrescos
Vicente compró ayer 21 botellas grandes de refresco y hoy ha comprado 9. Si cada botella cuesta 2 euros, ¿cuánto ha gastado en total?

21+9=30
30:2=15
R= 15 € se ha gastado

Figura 4.92. Resolución del estudiante E8 del problema *Los Refrescos*.

Como se puede observar, E8 planteó correctamente la primera relación de combinación 1, pero erróneamente la segunda relación de isomorfismo de medida 1 y, por tanto, la codificación de este problema es la que presentamos en la Tabla 4.2. La puntuación global para este problema es la media aritmética de las puntuaciones para cada etapa (0,5 puntos).

Tabla 4.2.

Codificación de la resolución del problema *Los Refrescos* en el estudiante E8.

PROBLEMA	**LOS REFRESCOS**	
ESTUDIANTE	**Combinación 1**	**Isomorfismo 1**
E8	1	0

4.4.2 EL NIVEL PREVIO DE COMPETENCIA DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DE PROBLEMAS VERBALES.

En primer lugar, procedemos a analizar el nivel de competencia previo de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales aritméticamente en lápiz y papel. De manera global, sin distinción entre las instrucciones que posteriormente se aplicarían en cada grupo, los estudiantes obtuvieron en el cuestionario Pre una puntuación promedio de 5,25 puntos (sobre 10), con una desviación típica de 2,50 puntos. A continuación, procedemos a comparar su nivel de competencia atendiendo a la estructura de la etapa (aditiva o multiplicativa), a la categoría semántica o al número de etapas del problema.

La Tabla 4.3 sintetiza el nivel de éxito promedio por etapa en el cuestionario Pre considerando la estructura aditiva o multiplicativa de la etapa. A su vez, para cada estructura, se presenta el desglose atendiendo a la categoría semántica. Las categorías semánticas presentes en el estudio vinieron condicionadas por la elección de los problemas del cuestionario Pre, así como las lecturas realizadas por los estudiantes. En concreto, en las etapas aditivas, se incluyeron etapas de cambio 2, cambio 4 y combinación 1, mientras que, para las multiplicativas, se dieron etapas de isomorfismo 1, isomorfismo 2 e isomorfismo 3. En esta tabla se consideran las puntuaciones promedio de todas las etapas resueltas en el cuestionario Pre.

Tabla 4.3.

Tasa de éxito por etapa en el cuestionario Pre según estructura y categoría semántica

Estructura	Categoría	Puntuación		
		n	*M*	*SD*
Aditiva		441	0,77	0,42
	Cambio 2	71	0,61	0,49
	Cambio 4	72	0,69	0,46
	Combinación 1	298	0,83	0,38
Multiplicativa		761	0,72	0,45
	Isomorfismo 1	659	0,73	0,44
	Isomorfismo 2	39	0,54	0,51
	Isomorfismo 3	63	0,73	0,45

La Tabla 4.4 refleja la puntuación promedio en el cuestionario Pre considerando las puntuaciones obtenidas para cada estudiante según la estructura y categoría semántica.

Tabla 4.4.

Tasa de éxito por etapa en el cuestionario Pre según estructura y categoría semántica

Estructura	Categoría	Puntuación		
		n	*M*	*SD*
Aditiva		52	0,73	0,22
	Cambio 2	50	0,54	0,46
	Cambio 4	47	0,67	0,43
	Combinación 1	52	0,80	0,22
Multiplicativa		52	0,70	0,26

Isomorfismo 1	52	0,72	0,27
Isomorfismo 2	30	0,48	0,48
Isomorfismo 3	37	0,67	0,46

Los resultados derivados de ambas tablas muestran que, en comparación, las etapas aditivas resultan más sencillas para los estudiantes que las multiplicativas. Sin embargo, estas diferencias no son estadísticamente significativas t (51) = 0,95, p = ,35, d = 0,13. Un análisis por categoría semántica para cada tipo de estructuras reveló diferencias remarcables. La Figura 4.93 muestra las puntuaciones promedio de los estudios en el cuestionario Pre considerando las etapas clasificadas en función de su categoría semántica.

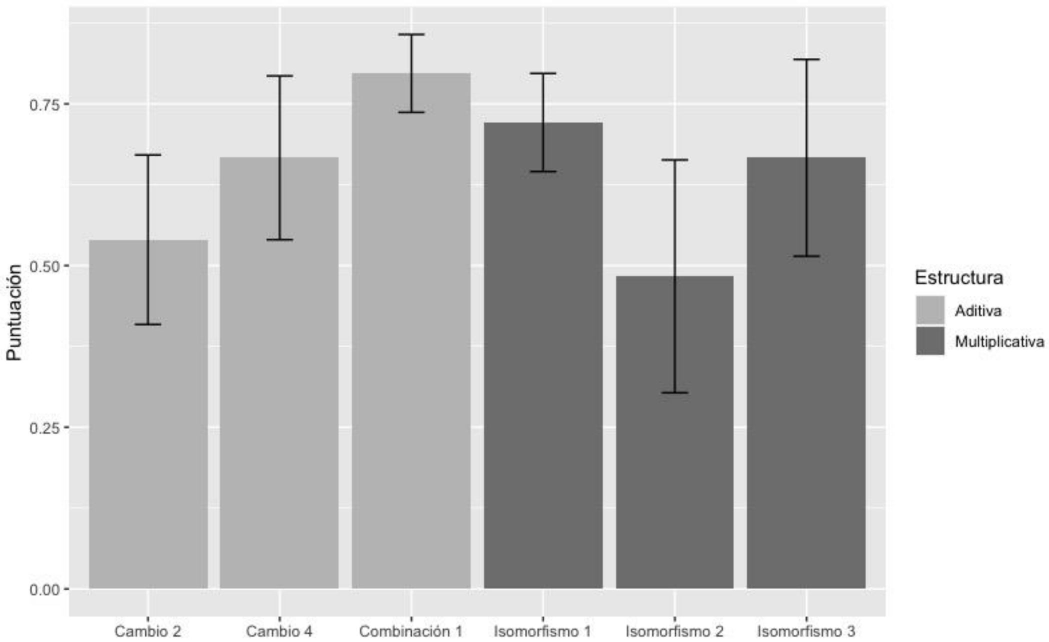


Figura 4.93. Puntuaciones en el Cuestionario Pre por categoría semántica

En el caso de las etapas aditivas, tanto un análisis de Shapiro-Wilk como un análisis visual mediante un QQ-plot, reveló el incumplimiento de la asunción de normalidad para las tres categorías semánticas. En consecuencia, se optó por el test de Friedman, que confirmó la existencia de diferencias significativas ($\chi 2$ (3) = 102, p < ,0001). Una comparación pareada ajustada mediante la corrección de Holm-Bonferroni señaló la existencia de diferencias estadísticamente significativas entre los problemas de cambio 2 y combinación 1 (W = 84, p = ,0002), pero no entre cambio 4 y cambio 2 (W = 183, p = ,062) o cambio 4 y combinación 1 (W = 75,5. p = ,095). En las etapas multiplicativas se dieron nuevamente un incumplimiento de las asunciones de normalidad, por lo que acudió de nuevo al test de Friedman. También se observaron diferencias estadísticamente significativas globales ($\chi 2$ (3) = 52, p < ,0001), aunque en el pareado ajustado no se documentaron diferencias estadísticamente significativas entre categorías semánticas.

En cuanto al número de etapas del problema, la Tabla 4.5 presenta la puntuación promedio en el cuestionario Pre tomando en consideración las puntuaciones obtenidas por cada estudiante en función del número de etapas de la lectura acometida. Nuevamente se recurrió al test de Friedman al no verificarse las asunciones necesarias para realizar una ANOVA de medidas repetidas. Éste apuntó la existencia de diferencias estadísticamente significativas ($\chi 2$ (5) = 132, p < ,0001). Las comparaciones pareadas revelaron diferencias estadísticamente significativas en todas las comparaciones con excepción de las parejas de problemas de dos y cuatro etapas y de tres y seis etapas (Tabla 4.6)

Tabla 4.5.

Tasa de éxito en el cuestionario Pre según número de etapas

Número de etapas	Puntuación		
	n	*M*	*SD*
2	52	0,72	0,28
3	51	0,60	0,29
4	45	0,69	0,37
5	48	0,35	0,34
6	49	0,50	0,37

Tabla 4.6.

Análisis post hoc – Comparaciones por número de etapas en cuestionario Pre

Comparación	Puntuación		
	W	p_{aju}	*Sig*
2 etapas vs 3 etapas	692	,004	**
2 etapas vs 4 etapas	274	,622	
2 etapas vs 5 etapas	892	<,00001	****
2 etapas vs 6 etapas	606	,0009	***
3 etapas vs 4 etapas	185	,037	*
3 etapas vs 5 etapas	869	,0001	***
3 etapas vs 6 etapas	458	,103	
4 etapas vs 5 etapas	519	<,00001	****
4 etapas vs 6 etapas	503	,003	**
5 etapas vs 6 etapas	190	,021	*

4.4.3. ANÁLISIS COMPARATIVO GLOBAL

4.4.3.1. ANÁLISIS COMPARATIVO GLOBAL ATENDIENDO A LA COMPETENCIA PREVIA DEL RESOLUTOR

En este apartado realizamos una comparación entre los resultados obtenidos por los estudiantes en los cuestionarios Pre y Post tomando como factores el grupo de pertenencia durante la secuencia de enseñanza, así como el nivel de competencia en la resolución. La Tabla 4.7 resume la media y la desviación típica de las puntuaciones en ambos cuestionarios para cada uno de los tipos de instrucción, así como de la ganancia (calculada como la diferencia entre las puntuaciones del cuestionario Post y del Pre).

Tabla 4.7.

Diferencias de rendimiento por instrucción

Grupo		Pre	Post	Dif
SH (N = 26)	Media	5,35	6,41	1,06
	Desv. Típ.	2,45	2,33	1,34
CH (N = 26)	Media	5,16	6,54	1,38
	Desv. Típ.	2,60	2,68	1,55

Un análisis estadístico reveló que no existían diferencias significativas entre los grupos para las puntuaciones del cuestionario Pre pero, tal y como puede observarse en la tabla, la media es ligeramente superior en el grupo sin ayudas respecto al grupo con ayudas. En cambio, la media en el cuestionario Post es superior en grupo CH. Con el objeto de estudiar el efecto de la instrucción en la competencia de los estudiantes en la resolución aritmética de problemas verbales, se realizó un análisis de covarianza (ANCOVA). Como variable independiente se tomó el tipo de instrucción: grupo SH (sin ayudas) y grupo CH (con ayudas). Como variable dependiente se usó las puntuaciones de los estudiantes en el cuestionario Post, empleando las puntuaciones en el cuestionario Pre como covariable. Como paso previo a este análisis se verificó el cumplimiento de todas las asunciones. En primer lugar, se comprobó gráficamente la existencia de una relación lineal entre la variable dependiente y la covariable para cada grupo. En segundo lugar, un análisis de varianza permitió corroborar que no existiera una interacción significativa entre las puntuaciones en el cuestionario Pre y en el cuestionario Post, $F(1, 48) = 0{,}10$, $p = {,}75$. Tras ello, un test de Shapiro-Wilk corroboró la asunción de normalidad de los residuos ($W = 0{,}98$, $p = {,}728$). Asimismo, se confirmó la homogeneidad de varianzas de los residuos ($F(1, 50) = 0{,}77$, $p = {,}384$). Finalmente, un análisis de residuos estandarizados permitió destacar la presencia de outliers en los datos. A tenor de lo anterior, es viable emplear un análisis de covarianza para estudiar el efecto de la instrucción en la competencia en la resolución aritmética de problemas verbales. Tras controlar el efecto de los resultados en el cuestionario Pre, no se observó una diferencia estadísticamente significativa entre los grupos SH y CH sobre la competencia en la resolución aritmética de problemas verbales demostrada en el cuestionario Post (F(1,49) = 0,54, p = ,466, w^2 = 0,01).

Para evaluar las diferencias entre las puntuaciones en el cuestionario Pre y en el cuestionario Post, se realizó una comparación de medias. Nuevamente, con antelación a este análisis, se procedió a verificar la viabilidad de realizar un análisis paramétrico. El análisis señaló una mejora estadísticamente significativa tras la instrucción tanto para el grupo sin ayudas (t(25) =4,01, p = ,0005) como para el grupo con ayudas (t(25) =4,52, p = ,0001), aunque en este último el tamaño del efecto fue superior (d = 0,89) que en la instrucción del grupo SH (d = 0,79). Según Cohen (1992) estos valores pueden considerarse como efectos de tamaño grande.

En cuanto al efecto de la instrucción atendiendo a la estructura de las etapas (aditiva o multiplicativa), la Tabla 4.8. presenta las puntuaciones promedio en el cuestionario Pre y Post para cada grupo (CH y SH) atendiendo a la estructura de las etapas y la categoría semántica. Mediante análisis inferencial de comparación de medias se identificó la inexistencia de diferencias estadísticamente significativas entre los tipos de instrucción tanto el cuestionario Pre (aditivas, t(49,9) = 0,25, p = ,81, d = 0,07; multiplicativas, t(50) = 0,32, p = ,75, d = 0,09) como en el Post (aditivas, t(48,9) = 0,38, p = ,70, d = 0,11; multiplicativas, t(48) = 0,69, p = ,49, d = 0,19), aunque los tamaños del efecto son ligeramente superiores para el grupo CH.

Tabla 4.8.

Tasa de éxito por etapa en el cuestionario Pre y Post según estructura y tipo de instrucción

Estructura	Categoría	Puntuación Pre			Puntuación Post		
		n	M	SD		M	SD
Grupo SH							
	Aditiva	26	0,74	0,21	26	0,79	0,19
	Cambio 2	26	0,60	0,49	26	0,58	0,46
	Cambio 4	24	0,65	0,45	24	0,69	0,46
	Combinación 1	26	0,80	0,19	26	0,85	0,16
	Multiplicativa	26	0,72	0,26	26	0,79	0,19
	Isomorfismo 1	26	0,72	0,28	26	0,80	0,20
	Isomorfismo 2	15	0,60	0,47	17	0,62	0,49
	Isomorfismo 3	18	0,75	0,43	24	0,71	0,44
Grupo CH							
	Aditiva	26	0,72	0,23	26	0,76	0,22

Cambio 2	24	0,48	0,43	26	0,62	0,45
Cambio 4	23	0,69	0,42	23	0,75	0,42
Combinación 1	26	0,79	0,24	26	0,81	0,18
Multiplicativa	26	0,69	0,26	26	0,74	0,24
Isomorfismo 1	26	0,72	0,28	26	0,76	0,25
Isomorfismo 2	15	0,37	0,48	21	0,64	0,42
Isomorfismo 3	19	0,59	0,48	20	0,74	0,46

En cuanto a la categoría semántica, los resultados son muy similares a los obtenidos para el caso de la estructura, no observándose diferencias estadísticamente significativas entre el grupo sin ayudas y con ayudas antes y después de la instrucción.

Tabla 4.9.

Comparaciones entre grupos CH y SH en Pre y Post según categoría semántica

Categoría	Cuestionario Pre			Cuestionario Post		
	t	*p*	*d*	*t*	*p*	*d*
Aditiva						
Cambio 2	0,90	,37	0,26	-0,30	,76	-0,08
Cambio 4	-0,34	,74	-0,10	-0,46	,65	-0,13
Combinación 1	0,14	,89	0,04	0,91	,37	0,25
Multiplicativa						
Isomorfismo 1	-0,02	,99	-0,01	0,69	,50	0,19
Isomorfismo 2	1,34	,19	0,49	-0,17	,87	-0,06
Isomorfismo 3	1,09	,29	0,36	-0,28	,78	-0,08

5. Estudio de casos

5.1. EL PROPÓSITO DEL ESTUDIO

Una vez finalizado el estudio de grupo, se realizó el estudio de casos que vamos a presentar en este capítulo. Este estudio tenía un carácter exploratorio y pretendía describir las actuaciones que tenían los estudiantes cuando resolvían aritméticamente problemas verbales con distintas versiones de HINTS. En concreto, los estudiantes emplearon la misma versión en el estudio de casos que habían utilizado en la secuencia de enseñanza correspondiente a la parte grupal. Mediante este análisis pretendemos identificar las tendencias cognitivas de los estudiantes, reflejadas en las estrategias de resolución, tanto correctas como erróneas. Aunque este objetivo ha sido abordado parcialmente en anteriores investigaciones, en nuestro caso se introducía la novedad de ofrecer a los estudiantes certeza sobre la validez de las acciones que llevaban a cabo.

Con este fin, en el estudio de casos los alumnos resolvieron los problemas que no habían sido capaces de resolver en el cuestionario Post en lápiz y papel. Para favorecer las reflexiones en el nuevo marco que ofrecía el uso de HINTS, los alumnos se agruparon por parejas. La selección de las parejas se hizo teniendo en cuenta, en la medida de lo posible, que ninguno de los dos miembros de la pareja hubiera sido capaz de resolver individualmente determinados problemas del cuestionario Post. Posteriormente expondremos con detalle los criterios de selección de cada pareja y de los problemas usados en esta fase de la investigación.

5.2. LA TÉCNICA DE OBTENCIÓN DE DATOS

Como nuestra intención es centrarnos en analizar las decisiones que se toman durante el proceso de resolución, necesitamos que los estudiantes conviertan sus reflexiones en producciones orales o escritas. En Schoenfeld (1985) se enuncian distintos procedimientos de recogida de datos cuando se pretende que los estudiantes manifiesten sus pensamientos en voz alta. Se apunta que cada configuración puede clarificar ciertos aspectos de los procesos cognitivos que se dan pero que también pueden oscurecerse otros. La elección de la configuración a utilizar en el montaje experimental vendrá dada por la intención de nuestro estudio. Así Schoenfeld (1985), detalla un conjunto de variables que pueden afectar a la información que se recoge, pero que también pueden influir en las actuaciones de los estudiantes. Entre ellas: a) el número de personas grabadas; b) el grado de intervención de los investigadores; c) el número de observadores; d) la naturaleza y el grado de libertad en las instrucciones que se dan; e) la naturaleza del entorno, su familiaridad para los sujetos experimentales; f) las características de la tarea; o g) el número de sujetos que resuelven la tarea. Así, se esperan diferentes actuaciones y producciones verbales de los estudiantes atendiendo al número de sujetos que participan en la resolución. La verbalización que realizaría un sujeto permitiría acceder a un conocimiento puro de su reflexión, pero detendría su razonamiento si se exigiera durante la resolución. Una verbalización individualizada al finalizar la resolución podría introducir interpretaciones a posteriori. La resolución en grupos de varias personas facilitaría una exposición de los razonamientos de una manera más natural, pero podría reducir la intervención de alguno de los componentes. Es por ello que Schoenfeld (1985) recomienda la técnica de resolución de problemas en voz alta por parte de parejas de estudiantes donde el diálogo resulta natural y permite aflorar las reflexiones de ambos individuos. Para Puig (1996), la resolución por parejas tiene como consecuencia positiva la de no tener que instruir a los resolutores para que piensen en voz alta o para que hablen cuando se quedan callados. Es decir, se producen intercambios comunicativos como explicar, convencer, hacer burla, consultar… Siguiendo este proceso, en Puig (1996) se eligió a alumnos voluntarios del curso de resolución de problemas que habían impartido los investigadores. Estos alumnos fueron grabados de cara a la pizarra, solos o por parejas, haciendo hincapié en la necesidad de que verbalizasen y escribiesen todo lo que les fuese posible hasta la finalización del problema. La resolución de cada problema tenía un tiempo asignado y, en general, no se interrumpía el proceso de resolución salvo por un error de cálculo o de utilización errónea de una fórmula que pudiera impedir la observación de alguna otra actuación que consideraban más interesante. Con este mismo criterio los investigadores decidían si contestar o no a las preguntas que podían proponer los resolutores o hacer sugerencias en algún momento concreto del proceso. Otra de las ventajas de la resolución por parejas es que el intercambio de diferentes opiniones en la resolución produce conflictos cognitivos. Estos conflictos cognitivos producen desequilibrios internos que pueden provocar reorganizaciones cognitivas en los alumnos y producir modificaciones en sus ideas (Cobo, 1998).

En nuestro estudio de casos, se optó por la configuración experimental de parejas de estudiantes resolviendo problemas con HINTS. Como nuestra intención era observar sus actuaciones y cómo estas se modificaban en función de las respuestas del ITS, decidimos mantener un grado de intervención bajo por parte de los investigadores presentes. Las parejas de estudiantes fueron videograbadas. A partir de los protocolos audiovisuales, se elaboraron protocolos escritos, los cuales constituyen la principal herramienta sobre la que realizar el análisis de las actuaciones. A continuación, explicamos cómo organizamos nuestro estudio de casos y describimos cómo trasladamos el protocolo visual al escrito.

5.2.1. LA OBTENCIÓN DE LOS PROTOCOLOS AUDIOVISUALES

El estudio de casos tuvo lugar en el laboratorio de ciencias del centro escolar al que pertenecían los alumnos elegidos. Se dispusieron cuatro mesas de alumno juntas formando una mesa más amplia y encima de ella se colocó un ordenador portátil sin ningún periférico adicional ya que los alumnos manifestaron estar familiarizados con el uso del ratón táctil del portátil. Respecto a las diferencias que los alumnos se encontraron entre las tres sesiones de la secuencia de enseñanza y el estudio de casos, cabe mencionar tres: 1) en la secuencia de enseñanza los ordenadores utilizados eran de sobremesa y cada uno de ellos disponía de su ratón convencional; 2) la interacción verbal en voz alta de los pasos que cada alumno seguiría para resolver cada problema; y 3) la grabación de la interacción entre ellos. Por otra parte, el ITS había sido configurado previamente para que a cada pareja solo se le presentase la colección de problemas que cumplían los criterios de clasificación previamente establecidos. Antes de que la pareja fuese llamada al laboratorio, el investigador se encargó de cargar la colección de problemas que debían resolver, permitiendo que los estudiantes no tuvieran que preocuparse de realizar ninguna cuestión técnica y pudieran centrarse en la resolución de os problemas.

Para la obtención de los protocolos audiovisuales se utilizaron dos cámaras independientes enfocando desde diferentes lugares con el propósito de captar todas las acciones que pudiesen realizar los sujetos experimentales. Una de estas cámaras se colocó con un enfoque diagonal donde se podía apreciar la cara, tronco y brazos de los sujetos y que nos permitía saber qué sujeto realizaba una determinada acción y en qué momento. Desde esta cámara no se podía apreciar las acciones que se iban realizando en la pantalla del ordenador, pero sí quien las realizaba. La segunda de las cámaras se colocó detrás de los sujetos con la intención de grabar las acciones que se mostraban o realizaban en la pantalla del ordenador. Así, mediante el uso combinado de las dos cámaras, siempre era posible saber quién era el autor de una determinada acción, de una verbalización, de un gesto y hacia donde dirigían la mirada en un determinado momento. Aunque las dos cámaras también grababan el sonido ambiental y las conversaciones, se colocó una grabadora profesional sobre la mesa. La grabadora se situó lo más cercana posible a los resolutores, pero sin interferir en sus acciones sobre el ordenador. Se eligió una configuración a un nivel muy alto de definición con el objetivo de poder captar claramente las conversaciones entre los sujetos, incluso en aquellos casos donde estos se manifestasen entre susurros. Para completar la obtención de los protocolos audiovisuales se utilizó un software específico para la grabación de todas las acciones realizadas en el ordenador. En concreto, se utilizó la versión 4.1.1. del software gratuito BB Flashback Express que permitió recoger, tanto las acciones realizadas sobre el ITS mediante la grabación de la pantalla del ordenador, como el audio de cualquier sonido ambiente a través del micrófono del ordenador.

El estudio de casos se iniciaba sacando a las parejas de su grupo-clase en el horario asignado a matemáticas y conduciéndolas al laboratorio de ciencias del centro. Una vez la pareja había tomado asiento enfrente del ordenador se les informaba que tenían que cargar el primer problema y que tenían que intentar resolverlo, con la versión del HINTS que habían utilizado en la secuencia de enseñanza, en un tiempo determinado de diez minutos sin más ayuda que la versión del propio ITS. Es decir, las parejas que en la secuencia de enseñanza utilizaron el HINTS en su versión con ayudas utilizaban esta versión con ayudas en el estudio de casos, mientras que las parejas que utilizaron la versión del ITS sin ayudas, utilizaron esta versión para resolver los problemas del estudio de casos. Se les indicó que no podían utilizar lápiz ni papel ni ningún otro utensilio a parte del propio ITS. Posteriormente se les dieron las instrucciones de que debían leer el enunciado del problema en voz alta y de que informasen a su compañero de qué acción realizarían en cada momento y por qué en voz alta y de manera audible.

También se les indicó que el tiempo máximo estipulado para resolver cada problema era de diez minutos. No obstante, el investigador podía optar por conceder un tiempo adicional si consideraba interesante lo que en ese instante se estuviera produciendo o si la línea de actuación de los estudiantes mostrase claros signos de poder conducirlos, en breve espacio de tiempo, al éxito del problema. De igual manera, el investigador podía ofrecer abandonar la resolución del problema antes de tiempo cuando se observaba una ausencia de acciones o cuando los sujetos lo solicitaban. Las intervenciones del investigador durante las resoluciones se limitaron a solucionar dificultades técnicas, pedir que elevaran el volumen de la voz o evitar conversaciones entre los sujetos fuera del ámbito de estudio.

Cuando los sujetos resolvían correctamente el problema dentro del tiempo establecido, el investigador les informaba que tenían que cargar el siguiente problema. Si una vez finalizado el tiempo considerado por el investigador no se había resuelto el problema correctamente en su totalidad, el investigador preguntaba si los sujetos querían realizar alguna acción más. Si la respuesta era positiva, les dejaba realizar la última acción propuesta por ellos mientras que si era negativa les instaba a cargar el problema siguiente.

5.2.2. LA OBTENCIÓN DE LOS PROTOCOLOS ESCRITOS

Para el análisis de las actuaciones de las diferentes parejas resulta necesario transformar los datos audiovisuales grabados a un protocolo escrito. En nuestro caso, seguimos el criterio establecido por Puig (1996), que consiste en considerar fragmentos independientes aquellas verbalizaciones que se producen sin interrupción e identificar cada uno de ellos con un ítem. Por otro lado, y de acuerdo con Schoenfeld (1985), los protocolos tienen que ser diseccionados en episodios cuando se analiza la gestión del proceso de resolución. Cada episodio representará una actuación consistente de los, en nuestro caso, pares de resolutores. Estos episodios tendrán asociada una de las seis etiquetas siguientes: lectura, análisis, exploración, planificación/implementación, verificación y transición. Lo anterior nos permite, por ejemplo, afirmar que un punto de transición entre episodios es un punto potencial de evaluación o decisión. Para el caso de la resolución aritmética de problemas, parte de estas actuaciones vienen condicionadas por el hecho de que se utiliza un método de resolución con contenido heurístico donde se parte de la existencia de un método de resolución (Puig, 1996). El apoyo que suministra el recurso a un ITS hace que parte de los procesos de gestión de la resolución sean llevados a cabo por HINTS. Como consecuencia, nuestro estudio se centra en los procesos de lectura y análisis, siendo esta última, el objetivo principal del estudio.

En definitiva, nuestro protocolo escrito queda reducido a una serie de ítems ordenados para cada uno de los problemas del estudio de casos donde se incluyen los diálogos, los mensajes de respuesta de HINTS, y los gestos y acciones llevados a cabo por los resolutores. Dentro del protocolo escrito, hemos incluido entre paréntesis todo lo relativo a acciones y gestos que puedan ocurrir dentro de un ítem junto con la verbalización. Para indicar interrupciones hemos escrito puntos suspensivos al final del ítem en que se expresa una verbalización interrumpida y puntos suspensivos al inicio del ítem en que se presenta la verbalización que interrumpe a la anterior. En relación a la simultaneidad de verbalizaciones y acciones el criterio adoptado será el siguiente: cuando la acción se produce al mismo tiempo que una verbalización, ésta será recogida dentro del mismo ítem que la verbalización sin indicar quien ha realizado la acción si el que introduce la acción es el mismo que la ha verbalizado, e indicando quien la realiza si el que la verbaliza es distinto del que la realiza. Si la acción es acometida en silencio, sin coincidencia con ninguna verbalización, constituirá un ítem en sí mismo y se indicará entre paréntesis quien realiza la acción y posteriormente la acción.

Para dar cuenta lo más fielmente posible en el protocolo escrito de lo que ocurre verbalmente, si en algún momento se produce un silencio superior a cinco segundos en el que no hay verbalización ni acción, también lo recogeremos entre paréntesis indicando el tiempo que ha transcurrido en silencio. También indicaremos los momentos en que algún fragmento de la transcripción ha sido imposible transcribirlo por dificultades para comprenderlo.

5.3. LA SELECCIÓN DE LOS PARTICIPANTES

La selección de los participantes se hizo a partir del estudio de grupos, estableciéndose los siguientes criterios para la formación de las parejas. Los alumnos debían pertenecer a un mismo grupo de estudio (criterio 1). Es decir, debían haber utilizado la misma versión del tutor durante las tres sesiones de la secuencia de enseñanza. Los alumnos debían haber obtenido la misma puntuación de problemas correcta o incorrectamente resueltos en el cuestionario Post (criterio 2). Los alumnos debían haber resuelto incorrectamente los mismos problemas en el cuestionario Post (criterio 3). Una vez conformadas las parejas de estudiantes, se consultó al tutor del grupo y profesor del área de matemáticas su opinión sobre las parejas conformadas con el fin de que nos informase acerca de posibles incompatibilidades entre los alumnos o de las características individuales de los estudiantes para evitar una escasa verbalización durante este estudio de casos.

El primero de los criterios tiene que ver con nuestro interés en que los alumnos utilizasen la misma versión del tutor que habían utilizado en la secuencia de enseñanza y con la que se habían familiarizado. Por una parte, observar el uso de los niveles de ayuda por parte de aquellas parejas que habían usado esta versión y cómo estas ayudas podían influir a la hora de hacer ciertos razonamientos que pudiesen conducir a la resolución correcta de los problemas propuestos. Por otra parte, estábamos interesados en comprobar de qué manera los estudiantes utilizaban estas ayudas para afrontar los pasos en los que encontraban dificultades.

Con el segundo y tercer criterio se pretendía asegurar la mayor homogeneidad de las parejas para posibilitar surgieran de la forma más natural posible, las dificultades que ya habían encontrado en el cuestionario Post.

Por tanto, y para la elección de las parejas, en primer lugar, observamos en cada grupo (Criterio 1) aquellos estudiantes que habían resuelto incorrectamente el mismo número de problemas en el Post (Criterio 2).

Tabla 5.1.

Problemas incorrectos en el Post de los estudiantes del grupo sin HINTS.

	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6	Estudiante 7	Estudiante 8	Estudiante 9	Estudiante 10	Estudiante 11	Estudiante 12	Estudiante 13	Estudiante 14	Estudiante 15	Estudiante 16	Estudiante 17	Estudiante 18	Estudiante 19	Estudiante 20	Estudiante 21	Estudiante 22	Estudiante 23	Estudiante 24	Estudiante 25	Estudiante 26
Problemas incorrectos en el Post	2	6	1	6	3	6	3	8	4	7	0	1	0	7	4	6	7	9	5	4	9	3	4	5	8	1

Tabla 5.2.

Problemas incorrectos en el Post de los estudiantes del grupo con HINTS.

	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6	Estudiante 7	Estudiante 8	Estudiante 9	Estudiante 10	Estudiante 11	Estudiante 12	Estudiante 13	Estudiante 14	Estudiante 15	Estudiante 16	Estudiante 17	Estudiante 18	Estudiante 19	Estudiante 20	Estudiante 21	Estudiante 22	Estudiante 23	Estudiante 24	Estudiante 25	Estudiante 26
Problemas incorrectos en el Post	8	7	0	4	6	6	3	3	8	3	2	5	10	9	3	9	5	5	7	5	1	0	7	0	3	7

Intentando evitar a aquellos estudiantes que a priori podían dar muy poca verbalización en el estudio de casos, decidimos evitar a los estudiantes que habían obtenido las mejores y peores puntuaciones en el cuestionario Post. Con este fin determinamos en Q_1 y Q_3el intervalo de problemas mal resueltos que nos interesaría analizar para descartar ese 25% de pocos y muchos problemas mal resueltos. Para los estudiantes del grupo sin HINTS obtuvimos que $Q_1 = 2{,}75$ y que $Q_3 = 7$ y para los estudiantes del grupo con HINTS obtuvimos que $Q_1 = 3$ y que $Q_3 = 7$. Es decir, alumnos que habían contestado incorrectamente pocos problemas (0, 1, 2) y aquellos alumnos con un número de problemas incorrectos superior al Q_3 (8, 9 y 10), fueron eliminados de la elección para el estudio de casos. En ambos casos, quedaban 16 alumnos que estaban en el 50% central de la muestra, es decir, los alumnos que habían contestado incorrectamente 3, 4, 5, 6 o 7 problemas en el cuestionario Post y que mostramos en la Tabla 5.3:

Tabla 5.3.

Estudiantes analizados con problemas incorrectos en el cuestionario post.

Número de resoluciones incorrectas	Estudiantes sin HINTS	Estudiantes con HINTS
3	E5, E7, E22	E7, E8, E10, E15, E25
4	E9, E15, E20, E23	E4
5	E19, E24	E12, E17, E18, E20
6	E2, E4, E6, E16	E5, E6
7	E10, E14, E17	E2, E19, E23, E26

Para poder dar respuesta al criterio 3 de selección de las parejas, calculamos el número de coincidencias en los problemas resueltos incorrectamente en ambos grupos. Estas coincidencias las mostramos en las Tablas 5.4 y 5.5.

Tabla del grupo 5.4.

Número de coincidencias en la resolución incorrecta de problemas del cuestionario Post en el grupo sin ayudas.

	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	E 8	E 9	E 10	E 11	E 12	E 13	E 14	E 15	E 16	E 17	E 18	E 19	E 20	E 21	E 22	E 23	E 24	E 25	E 26
E1	X	2	0	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	0
E2	2	X	1	5	3	5	3	5	4	6	0	1	0	5	4	5	6	6	5	4	5	3	4	5	6	1
E3	0	1	X	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0
E4	2	5	1	X	2	6	3	6	4	6	0	0	0	6	4	6	6	6	5	4	6	3	3	5	6	0
E5	2	3	0	2	X	2	2	2	2	3	0	1	0	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	3	1
E6	2	5	1	6	2	X	3	6	4	6	0	0	0	6	4	6	6	6	5	4	6	3	3	5	6	0
E7	2	3	0	3	2	3	X	3	3	3	0	0	0	3	2	3	3	3	3	3	3	3	2	3	3	0
E8	2	5	1	6	2	6	3	X	4	6	0	0	0	7	4	6	6	8	5	4	8	3	3	5	7	0
E9	2	4	0	4	2	4	3	4	X	4	0	0	0	4	3	4	4	4	4	4	4	3	3	4	4	0

E10	2	6	1	6	3	6	3	6	4	X	0	1	0	6	4	6	7	7	5	4	6	3	4	5	8	1
E11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E12	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	X	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
E13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E14	2	5	1	6	2	6	3	7	4	6	0	0	0	X	4	6	6	7	5	4	7	3	3	5	6	0
E15	2	4	1	4	2	4	2	4	3	4	0	0	0	4	X	4	4	4	4	3	4	2	2	4	4	0
E16	2	5	1	6	2	6	3	6	4	6	0	0	0	6	4	X	6	6	5	4	6	3	3	5	6	0
E17	2	6	1	6	3	6	3	6	4	7	0	1	0	6	4	6	X	7	5	4	6	3	4	5	7	1
E18	2	6	1	6	3	6	3	8	4	7	0	1	0	7	4	6	7	X	5	4	8	3	4	5	8	1
E19	2	5	1	5	2	5	3	5	4	5	0	0	0	5	4	5	5	5	X	4	5	3	3	5	5	0
E20	2	4	0	4	2	4	3	4	4	4	0	0	0	4	3	4	4	4	4	X	4	3	3	4	4	0
E21	2	5	1	6	2	6	3	8	4	6	0	0	0	7	4	6	6	8	5	4	X	3	3	5	7	0
E22	2	3	0	3	2	3	3	3	3	3	0	0	0	3	2	3	3	3	3	3	3	X	2	3	3	0
E23	1	4	0	3	2	3	2	3	3	4	0	1	0	3	2	3	4	4	3	3	3	2	X	3	4	1
E24	2	5	1	5	2	5	3	5	4	5	0	0	0	5	4	5	5	5	5	4	5	3	3	X	5	0
E25	2	6	1	6	3	6	3	7	4	8	0	1	0	6	4	6	7	8	5	4	7	3	4	5	X	1
E26	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	X

Tabla 5.5.

Número de coincidencias en la resolución incorrecta de problemas del cuestionario Post en el grupo con ayudas.

	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	E 8	E 9	E 10	E 11	E 12	E 13	E 14	E 15	E 16	E 17	E 18	E 19	E 20	E 21	E 22	E 23	E 24	E 25	E 26
E1	X	7	0	4	6	4	3	3	7	3	2	5	8	7	3	7	5	5	7	5	1	0	7	0	3	7
E2	7	X	0	4	6	5	3	3	6	3	2	5	7	6	3	6	5	5	6	4	1	0	6	0	3	6
E3	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E4	4	4	0	X	4	4	3	3	4	3	1	4	4	4	3	4	4	4	4	4	1	0	4	0	3	4
E5	6	6	0	4	X	5	3	3	6	3	1	4	6	6	3	6	5	4	6	5	1	0	6	0	3	6
E6	4	5	0	4	5	X	3	3	6	3	1	4	6	6	3	6	5	4	5	4	1	0	5	0	3	7
E7	3	3	0	3	3	3	X	3	3	2	1	3	3	3	2	3	3	3	3	3	0	0	3	0	2	3
E8	3	3	0	3	3	3	3	X	3	2	1	3	3	3	2	3	3	3	3	3	0	0	3	0	2	3
E9	7	6	0	4	6	6	3	3	X	3	2	4	8	7	3	7	5	4	7	5	1	0	7	0	3	7
E10	3	3	0	3	3	3	2	2	3	X	1	3	3	3	2	3	3	3	3	3	1	0	3	0	3	3
E11	2	2	0	1	1	1	1	1	2	1	X	1	2	1	0	1	1	1	2	1	0	0	2	0	1	2
E12	5	5	0	4	4	4	3	3	4	3	1	X	5	5	3	5	4	5	4	4	1	0	4	0	3	4
E13	8	7	0	4	6	6	3	3	8	3	2	5	X	9	3	9	5	5	7	5	1	0	7	0	3	7
E14	7	6	0	4	6	6	3	3	7	3	1	5	9	X	3	9	5	5	6	5	1	0	6	0	3	6
E15	3	3	0	3	3	3	2	2	3	2	0	3	3	3	X	3	3	3	3	3	1	0	3	0	2	3
E16	7	6	0	4	6	6	3	3	7	3	1	5	9	9	3	X	5	5	6	5	1	0	6	0	3	6
E17	5	5	0	4	5	5	3	3	5	3	1	4	5	5	3	5	X	4	5	4	1	0	5	0	3	5
E18	5	5	0	4	4	4	3	3	4	3	1	5	5	5	3	5	4	X	4	4	1	0	4	0	3	4
E19	7	6	0	4	6	5	3	3	7	3	2	4	7	6	3	6	5	4	X	5	1	0	7	0	3	7
E20	5	4	0	4	5	4	3	3	5	3	1	4	5	5	3	5	4	4	5	X	1	0	5	0	3	5
E21	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	X	0	1	0	1	1
E22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0
E23	7	6	0	4	6	5	3	3	7	3	2	4	7	6	3	6	5	4	7	5	1	0	X	0	3	7
E24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	0
E25	3	3	0	3	3	3	2	2	3	3	1	3	3	3	2	3	3	3	3	3	1	0	3	0	X	3
E26	7	6	0	4	6	7	3	3	7	3	2	4	7	6	3	6	5	4	7	5	1	0	7	0	3	X

En el grupo CH, solo encontramos un estudiante con cuatro problemas incorrectos. La imposibilidad a la hora de formar una pareja de estas características en este grupo nos llevó a tampoco analizarla en el grupo SH por lo que eliminamos todos los alumnos con 4 problemas resueltos incorrectamente. En el grupo CH y con seis errores se encontraban dos alumnos, E5 y E6 (ver Tabla 5.3). Como se muestra en la Tabla 5.5, solo coincidieron en cinco de las resoluciones incorrectas. De la misma manera los cuatro estudiantes del grupo SH también coincidían solo en cinco problemas resueltos incorrectamente por lo que decidimos descartar a todos los estudiantes tanto del grupo CH como del grupo SH. Tras estos descartes, nos quedaron estudiantes para la resolución de tres, cinco y siete problemas incorrectos. Una vez comprobadas las coincidencias con estos estudiantes, el procedimiento de selección nos proporcionó un listado de posibles estudiantes para la construcción de parejas (Tabla 5.6.). A estos tres grupos los llamamos: Nivel bajo de competencia (siete problemas incorrectos), Nivel medio de competencia (cinco problemas incorrectos) y Nivel alto de competencia (tres problemas incorrectos).

Tabla 5.6.

Estudiantes por nivel con los mismos problemas incorrectos del cuestionario Post.

Número de resoluciones incorrectas	Estudiantes sin ayudas	Estudiantes con ayudas
3 (Nivel alto)	No hay estudiantes	E7, E8
5 (Nivel medio)	E19, E24	E12, E18
7 (Nivel bajo)	E10, E17	E19, E23, E26

Llegado este punto y, para completar la elección de las parejas que formarían el estudio de casos, teníamos que resolver dos problemas que nos habían surgido respecto a los criterios que seguíamos para la elección. En primer lugar, no teníamos estudiantes que cumpliesen el criterio 3 de elección para el nivel alto de competencia en el grupo SH y, en segundo lugar, teníamos tres estudiantes para el nivel bajo de competencia en el grupo CH. Para solucionar ambos problemas, recogimos la opinión del tutor de cada grupo sobre qué pareja sería conveniente formar para ambos niveles. Tras esta consulta, se decidió formar la pareja E23 y E26 para el nivel bajo en el grupo CH y la pareja E5 y E22 para el nivel alto del grupo SH ya que la opinión de los tutores fue que estas parejas producirían un mayor intercambio de comunicación en el estudio de casos. El no haber descartado el nivel alto de competencia por la ausencia de estudiantes en el grupo SH se basó en el hecho de considerar importante poder analizar estudiantes que pertenecieran a los tres niveles de competencia y al hecho de que teníamos una pareja que cumplía los tres criterios en el grupo con HINTS.

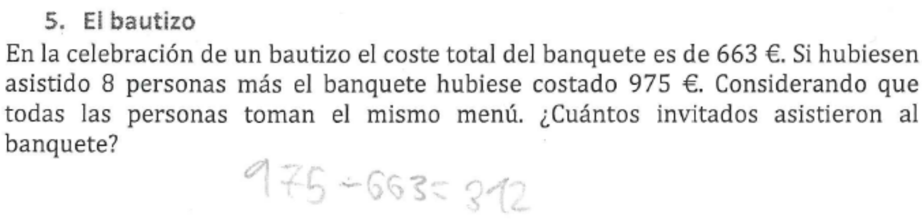
Tabla 5.7.

Parejas de estudiantes que participaron en el estudio de casos.

Número de resoluciones incorrectas	Estudiantes sin HINTS	Estudiantes con HINTS
3 (Nivel alto)	E5, E22	E7, E8
5 (Nivel medio)	E19, E24	E12, E18
7 (Nivel bajo)	E10, E17	E23, E26

Una vez construidas las parejas que formaran parte del estudio de casos pasamos a ofrecer una breve descripción de las actuaciones que tuvieron en el Post en algunos problemas que resolvieron incorrectamente para poner de manifiesto las dificultades que comparten.

- *La pareja Andreu-Julia*. Estaba formada por los estudiantes E7 (Andreu) y E8 (Julia). Ambos estudiantes obtuvieron 3 puntos de problemas incorrectos en el cuestionario Post por haber realizado incorrectamente tres problemas. Ambos habían sido incapaces de resolver correctamente los problemas *El Bautizo, La Empresa y El Pienso.* En el problema *El Bautizo* ambos alumnos fueron capaces de establecer correctamente un esquema de cambio para averiguar la diferencia de precio entre los dos banquetes, pero mientras Andreu (Figura 5.1) no continúa el problema, Julia (Figura 5.2) es capaz de plantear el isomorfismo de división partitiva que relacionaría la diferencia de precio de los dos banquetes con la diferencia de personas entre los dos banquetes. Es en la última o últimas relaciones donde Julia no es capaz de plantear la relación de isomorfismo de medida de división cuotitiva entre cualquiera de las dos precios y el precio de menú por persona. Ella estableció una relación con la cantidad 975, pero utilizando de manera incorrecta un isomorfismo de medida multiplicativo.

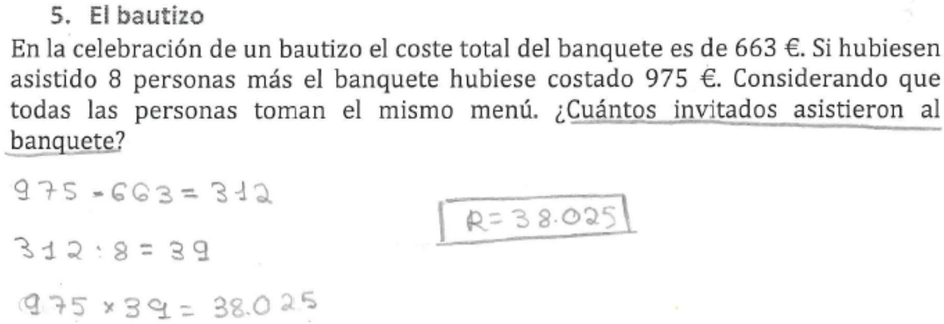


5. El bautizo

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

975 − 663 = 312

Figura 5.1. Resolución de Andreu del problema *El Bautizo*



5. El bautizo

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

975 − 663 = 312

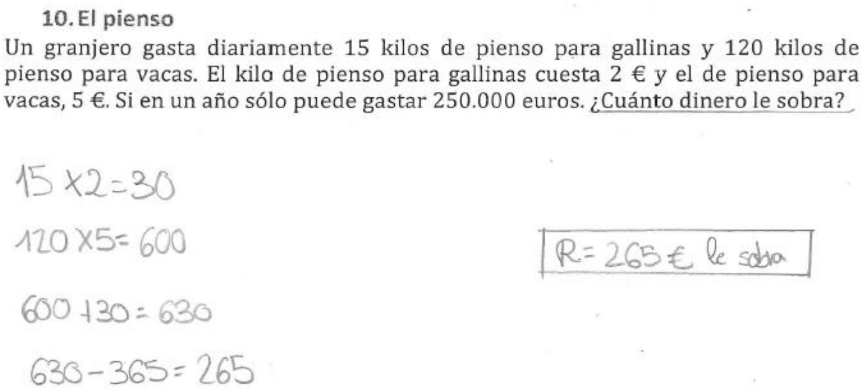
312 : 8 = 39

975 × 39 = 38.025

$\boxed{R = 38.025}$

Figura 5.2. Resolución de Julia del problema *El Bautizo*.

- *La pareja Claudia-Natalia*. Estaba formada por los estudiantes E12 (Natalia) y E18 (Claudia). Ambos estudiantes obtuvieron una puntuación de cinco problemas incorrectos en el cuestionario Post. Ambos habían sido incapaces de resolver correctamente los problemas *El Mayorista*, *El Bautizo*, *Los Billetes*, *La Empresa y El Pienso.* Si tomamos, por ejemplo, el problema *El Pienso*, ambas alumnas (Figuras 5.3 y 5.4) son capaces de resolver correctamente los dos isomorfismos de medidas multiplicativos en la lectura L1 del problema y la relación de combinación 1 posterior en el que averiguamos el dinero gastado en un día en comida con los animales. La dificultad la encontraron en relacionar esta cantidad diaria con una cantidad que no aparece en el enunciado y que tiene que ver con los días que tiene un año mediante el isomorfismo de medidas 1. A pesar de esto, Claudia sí que incorpora de manera errónea esta cantidad en una relación aditiva.



10. El pienso

Un granjero gasta diariamente 15 kilos de pienso para gallinas y 120 kilos de pienso para vacas. El kilo de pienso para gallinas cuesta 2 € y el de pienso para vacas, 5 €. Si en un año sólo puede gastar 250.000 euros. ¿Cuánto dinero le sobra?

15 × 2 = 30

120 × 5 = 600

600 + 30 = 630

630 − 365 = 265

$\boxed{R = 265 € \text{ le sobra}}$

Figura 5.3. Resolución de Claudia del problema *El Pienso*.

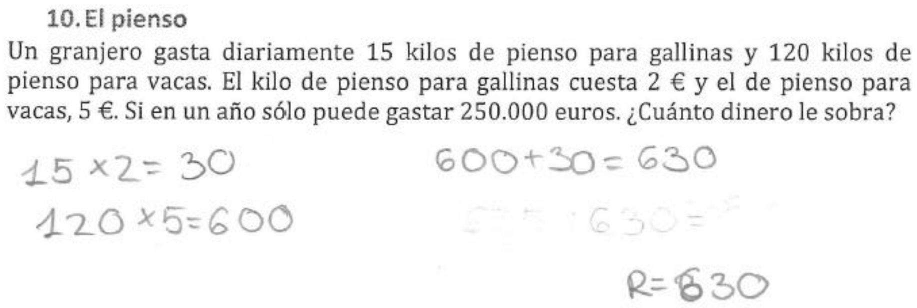


Figura 5.4. Resolución de Natalia del problema *El Pienso*.

- *La pareja César-Nerea*. Estaba formada por los estudiantes E23 (César) y E26 (Nerea). Ambos estudiantes obtuvieron una puntuación de siete problemas incorrectos en el cuestionario Post. Ambos habían sido incapaces de resolver correctamente los problemas *Las Pelotas de tenis, El Mayorista, El Bautizo, La Empresa, El Granjero, Los Disfraces y El Pienso.* En el problema *Los Disfraces*, César (Figura 5.5) es capaz de identificar el primer isomorfismo de medidas 1 y consigue averiguar la cantidad de tela necesaria para los disfraces de león, aunque el cálculo no está realizado correctamente a pesar de tener calculadora. A partir de aquí parece que no tiene claro el significado de las cantidades conocidas ni lo que tiene que hallar ya que vuelve a relacionar los disfraces de león con los metros necesarios para realizar un disfraz de elefante. Por otro lado, Nerea (Figura 5.6) parece que ha ido eligiendo las cantidades que ha utilizado en las relaciones en el mismo orden que aparecían en el enunciado. Con ellas ha ido hallando nuevas cantidades y proponiendo relaciones sin demasiado sentido.

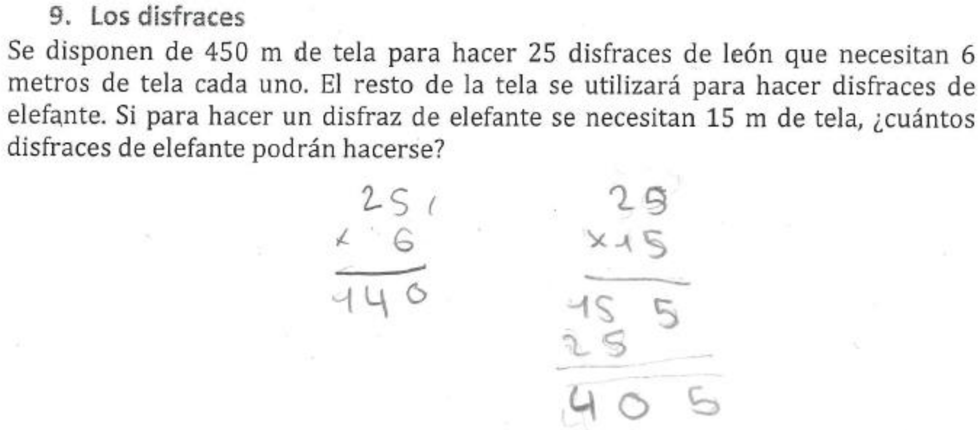
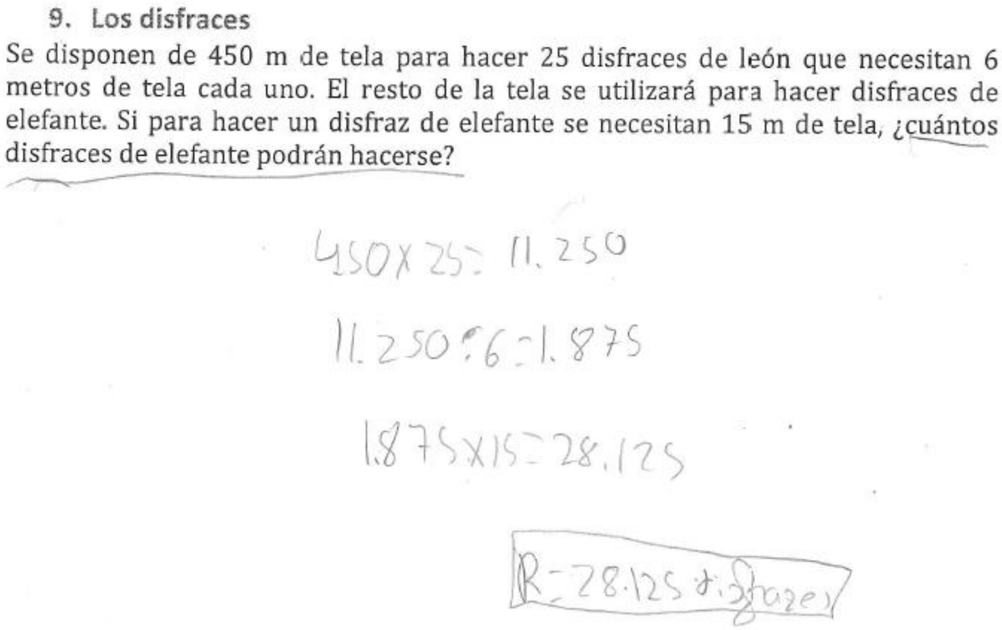


Figura 5.5. Resolución de César del problema *Los Disfraces*.


9. Los disfraces

Se disponen de 450 m de tela para hacer 25 disfraces de león que necesitan 6 metros de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer disfraces de elefante. Si para hacer un disfraz de elefante se necesitan 15 m de tela, ¿cuántos disfraces de elefante podrán hacerse?

450x25= 11.250

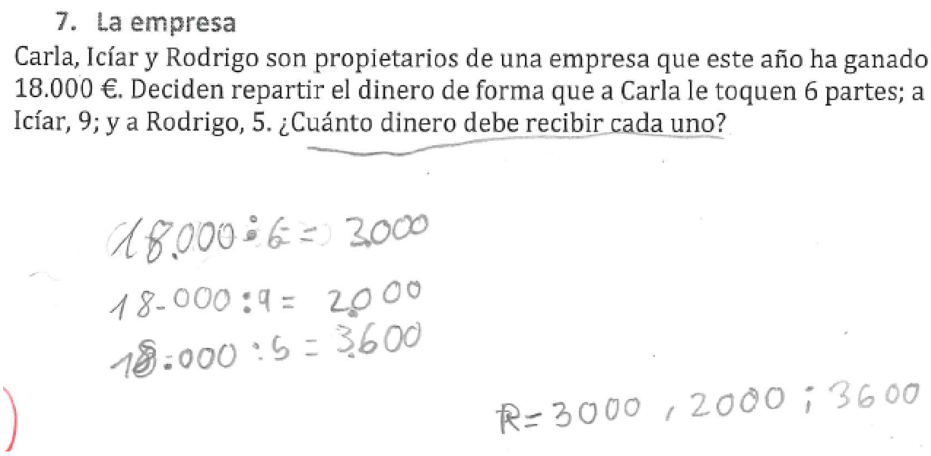
11.250:6=1.875

1.875x15=28.125

R=28.125 disfraces

Figura 5.6. Resolución de Nerea del problema *Los Disfraces*.

- *La pareja Pablo-Pau*. Estaba formada por los estudiantes E5 (Pablo) y E22 (Pau). Esta es la pareja que se eligió para el nivel alto de competencia con el ITS sin HINTS, aunque debemos recordar que no habíamos encontrado una pareja con coincidencia absoluta en los problemas resueltos incorrectamente. Ambos estudiantes obtuvieron una puntuación de tres problemas incorrectos en el cuestionario Post. Pablo no fue capaz de resolver correctamente los problemas *Las Pelotas de tenis, El Bautizo y La Empresa* y Pau los problemas *El Mayorista, El Bautizo y La Empresa.* Por ejemplo, en el problema *La Empresa* ambos alumnos (Figuras 5.7 y 5.8) coinciden plenamente en su actuación y se puede observar cómo los alumnos utilizan en la primera relación del problema una cantidad que aparece posteriormente en otro nivel de resolución deformando las cantidades que indican las partes que tiene cada persona con el significado de total de partes.


7. La empresa

Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000 €. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

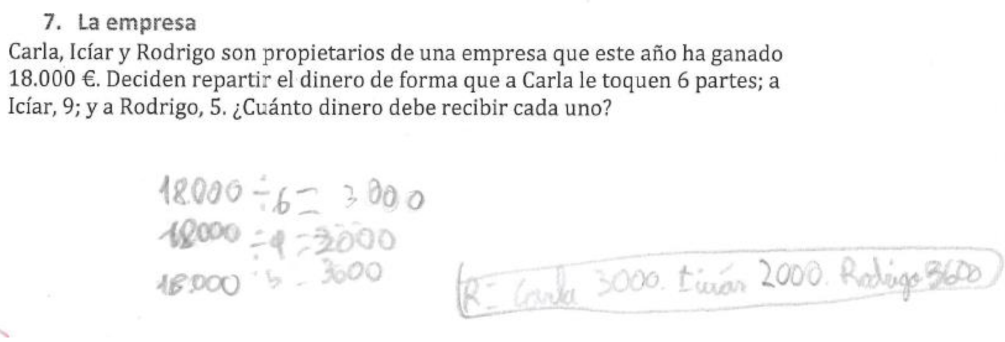
18.000:6= 3000

18.000:9= 2000

18.000:5= 3600

R= 3000, 2000; 3600

Figura 5.7. Resolución de Pablo del problema *La Empresa*.



7. La empresa

Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000 €. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

18000 ÷ 6 = 3000

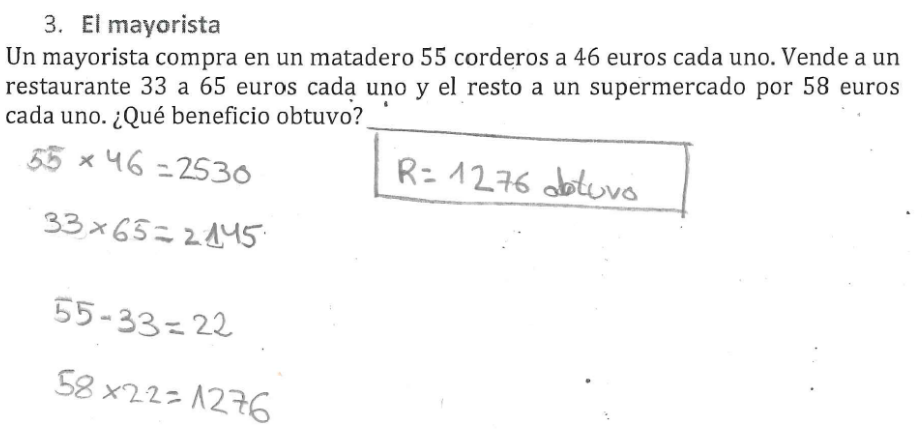
18000 ÷ 9 = 2000

18000 ÷ 5 = 3600

R= Carla 3000. Icíar 2000. Rodrigo 3600

Figura 5.8. Resolución de Pau del problema *La Empresa*.

- *La pareja Andrea-Marina*. Estaba formada por los estudiantes E19 (Andrea) y E24 (Marina). Ambas estudiantes obtuvieron una puntuación de cinco problemas incorrectos en el cuestionario Post. Ambas habían sido incapaces de resolver correctamente los problemas *El Mayorista*, *El Bautizo, La Empresa, Los Disfraces y El Pienso.* Estas alumnas obtuvieron de manera correcta los valores de algunas cantidades desconocidas en la resolución de ciertas de las etapas de algunos de estos problemas como. por ejemplo, en el problema *El Mayorista* donde ambas empiezan aplicando bien los dos isomorfismos de medida, pero en el que posteriormente, Andrea continua el problema correctamente en las siguientes dos etapas mientras que Marina parece que tiene problemas a la hora de distinguir entre el dinero que se obtiene, el que se gasta y entre la naturaleza de las cantidades, es decir, si hacen referencia a número de corderos o precios de los corderos (véase Figura 5.9 y 5.10).



3. El mayorista

Un mayorista compra en un matadero 55 corderos a 46 euros cada uno. Vende a un restaurante 33 a 65 euros cada uno y el resto a un supermercado por 58 euros cada uno. ¿Qué beneficio obtuvo?

55 × 46 = 2530

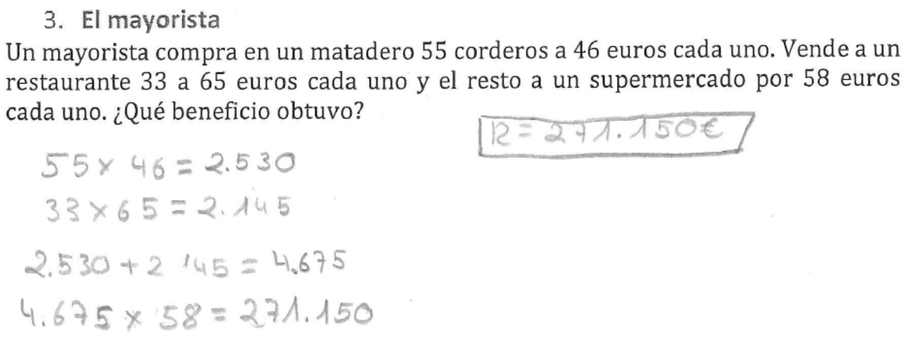
33 × 65 = 2145

55 - 33 = 22

58 × 22 = 1276

R= 1276 obtuvo

Figura 5.9. Resolución de Andrea del problema *El Mayorista*.

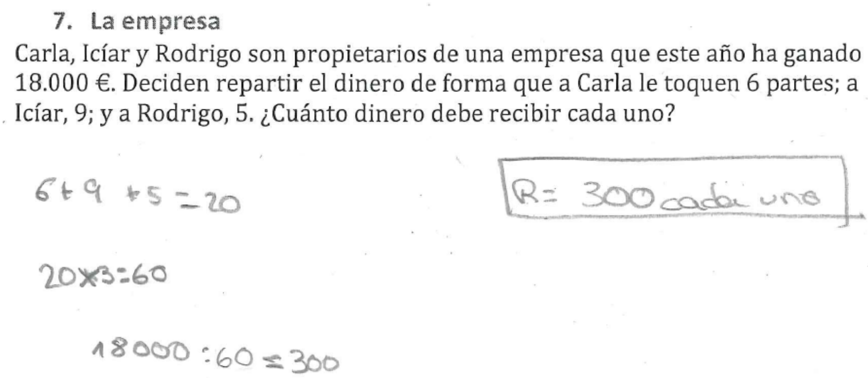

3. **El mayorista**
Un mayorista compra en un matadero 55 corderos a 46 euros cada uno. Vende a un restaurante 33 a 65 euros cada uno y el resto a un supermercado por 58 euros cada uno. ¿Qué beneficio obtuvo?

R= 271.150€

55 x 46 = 2.530
33 x 65 = 2.145
2.530 + 2.145 = 4.675
4.675 x 58 = 271.150

Figura 5.10. Resolución de Marina del problema *El Mayorista*.

Esto también puede apreciarse en el problema *La Empresa* en el que ambas realizan correctamente la primera etapa en la que obtienen el total de partes. Sin embargo, Andrea no le da el significado correcto a la cantidad obtenida y parece asignarle el significado de las partes iguales que tienen cada uno de los tres propietarios. Por otra parte, Marina sí que parece que le asigna en un principio el significado correcto de total de partes, pero no es capaz de darse cuenta del significado de la nueva cantidad obtenida (deformación del significado de la cantidad) ya que pensaba que había terminado el problema (véase Figura 5.11 y 5.12).

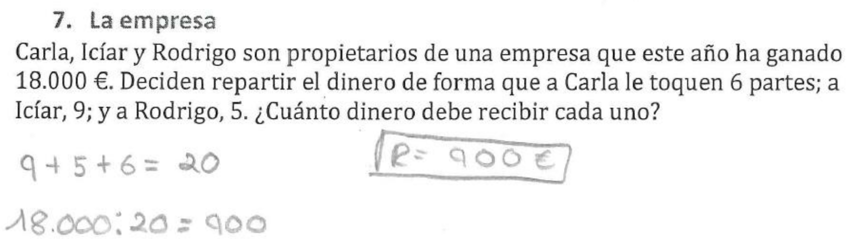

7. **La empresa**
Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000 €. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

6+9+5=20
R= 300 cada uno

20x3=60

18000:60=300

Figura 5.11. Resolución de Andrea del problema *La Empresa*.

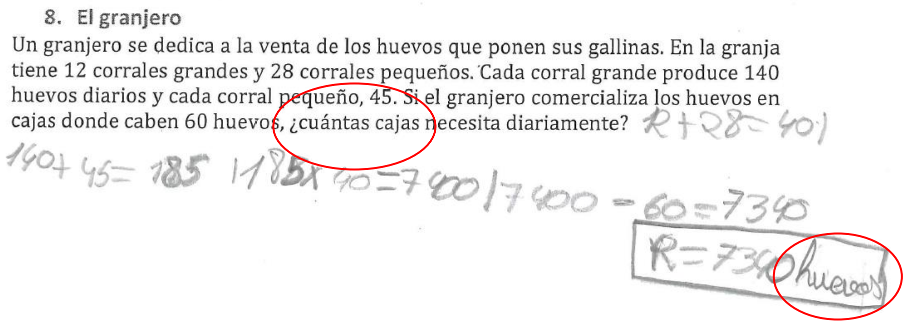

7. **La empresa**
Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000 €. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

9+5+6= 20
R= 900 €

18.000:20 = 900

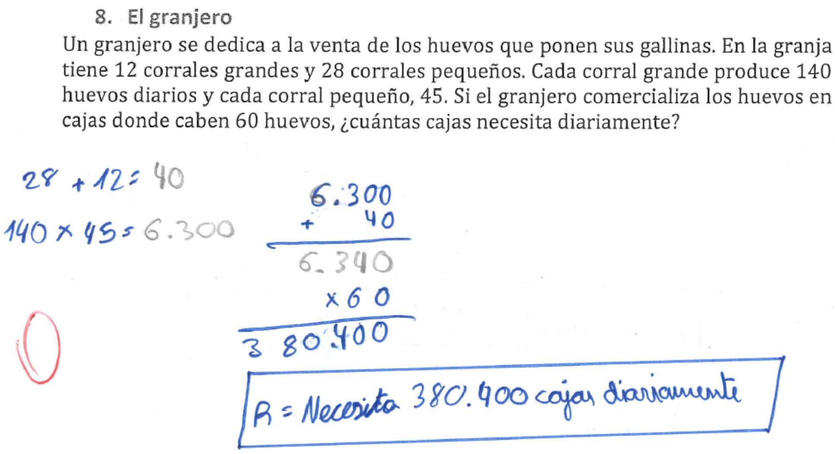
Figura 5.12. Resolución de Marina del problema *La Empresa*.

- *La pareja Francisco-Alejandro*. Estaba formada por los estudiantes E10 (Francisco) y E17 (Alejandro). Ambos estudiantes obtuvieron una puntuación de siete problemas incorrectos en el cuestionario Post y no consiguieron resolver los mismos problemas. *Las Pelotas de tenis, El Mayorista, El Bautizo, La Empresa, El Granjero, Los Disfraces y El Pienso.* Estos dos alumnos presentan numerosas diferencias en la resolución de estos problemas y realizan cálculos difíciles de interpretar y dotarlos de sentido (véase Figura 5.13 y 5.14). Su inclusión en el estudio de casos, y más allá de cumplir el criterio de selección, responde a la posibilidad de identificar los razonamientos subyacentes a unas producciones que en principio podrían considerarse erráticas.


8. El granjero

Un granjero se dedica a la venta de los huevos que ponen sus gallinas. En la granja tiene 12 corrales grandes y 28 corrales pequeños. Cada corral grande produce 140 huevos diarios y cada corral pequeño, 45. Si el granjero comercializa los huevos en cajas donde caben 60 huevos, ¿cuántas cajas necesita diariamente?

Figura 5.13. Resolución de Francisco del problema *El Granjero*.


8. El granjero

Un granjero se dedica a la venta de los huevos que ponen sus gallinas. En la granja tiene 12 corrales grandes y 28 corrales pequeños. Cada corral grande produce 140 huevos diarios y cada corral pequeño, 45. Si el granjero comercializa los huevos en cajas donde caben 60 huevos, ¿cuántas cajas necesita diariamente?

Figura 5.14. Resolución de Alejandro del problema *El Granjero*.

5.4. EL ANÁLISIS DE LOS CASOS

Para el análisis de los casos partiremos de los protocolos escritos obtenidos para cada una de las parejas a partir de los protocolos audiovisuales de sus resoluciones. El proceso de resolución de cada pareja se plasma en dos columnas tal y como aparece en los trabajos de Arnau (2010); González Calero (2014) o Puig (1996). De esta forma se pretende facilitar la lectura situando en un mismo nivel las actuaciones transcritas y la interpretación que el investigador hace. Así, en la columna de la izquierda se recoge el protocolo escrito agrupado en fragmentos, mientras que en la columna de la derecha se describe y se interpreta el fragmento correspondiente. La reconstrucción e interpretación de las actuaciones irá acompañada de una representación de estado de resolución en forma de esquema de análisis-síntesis. De esta manera se pretende ofrecer una visión general del estado en que se encuentra el proceso de resolución.

Hemos dividido el protocolo escrito en fragmentos o episodios a la manera de Puig (1996). En dicho estudio el objetivo era describir los procesos de planificación, ejecución y evaluación que llevaban a cabo estudiantes mientras resolvían problemas. En nuestro caso, y por tratarse del estudio de la resolución de problemas mediante un método que ya proporciona un plan, la división en fragmentos anterior carecería de sentido. En principio, cada fragmento o episodio responde a uno o varios intentos de obtener el valor de una cantidad desconocida.

La manera en que se ordenan los análisis de las actuaciones para cada pareja se corresponde con el orden en que los problemas fueros presentados en el estudio de casos. En primer lugar, se presentarán las tres parejas que utilizaron durante la secuencia de enseñanza y el estudio de casos el ITS que proporcionaba ayudas a demanda. Posteriormente, se presentarán las tres parejas que emplearon la versión de HINTS sin ayudas. Dentro de cada grupo presentaremos en primer lugar a la pareja que tenía un nivel alto de competencia (puntuación de 3 problemas incorrectos en el cuestionario Post) y acabaremos por la pareja que obtuvo un nivel bajo de competencia (puntuación de 7 problemas incorrectos en el cuestionario Post).

5.4.1. LA PAREJA ANDREU-JULIA. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON HINTS.

5.4.1.1 El caso de la pareja Andreu-Julia en el problema "El Bautizo"

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

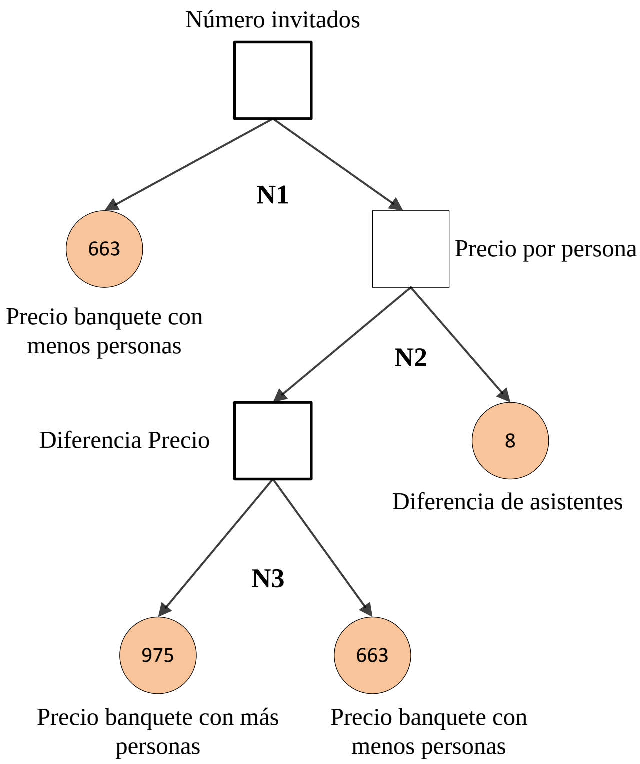


Figura 5.15.

1. (Julia lee el enunciado del problema.)
2. Julia: ¿Tú qué crees que tenemos que hacer?
3. Andreu: A ver.
4. Julia: A ver. Tenemos que hacer 663 que son todo, pero si… más eso (señala en la pantalla el 663) dividido entre… entre 8 ¿no? ¿Lo ponemos? Eso (señala en la pantalla el 663) entre 8 personas.
5. Andreu: Sí, sí, vale (introduce [663/8; mensaje de error]).

Tras leer el enunciado, Julia (ítem 4) propone dividir 663 entre 8 a lo que Andreu asiente. Andreu introduce 663/8 y el sistema proporciona un mensaje de error (ítem 5). En este mensaje de error, HINTS especifica los nombres de las cantidades asociadas a los valores 663 y 8. Sin embargo, los estudiantes parecen no leer el mensaje por la celeridad con que cierran la ventana. Julia parece convencida de que es posible determinar la cantidad desconocida "precio por persona" mediante el recurso a un esquema conceptual de isomorfismo de medidas de división partitiva. Sin embargo, la determinación de esta cantidad desconocida situada en un N2 del diagrama de análisis exige determinar previamente otra cantidad desconocida situada en el tercer nivel. Parece plausible concluir que los estudiantes evitan el análisis de N3 asignado el valor de la cantidad conocida "precio del banquete con menos personas" (663) a la cantidad desconocida "diferencia de precio".

Los estudiantes comenten un error al que denominaremos colapso-deformación (Figura 5.16) para reflejar el proceso mediante el que los resolutores cercenan una relación y asignan un valor de una de las cantidades conocidas relacionadas a una de las cantidades desconocidas. En principio, este error puede reflejar la dificultad de los alumnos para realizar un análisis completo a medida que se incrementa la profundidad del mismo. Esta dificulta podría ser consecuencia de la carga cognitiva exigida para mantener a nivel mental el entramado de relaciones. En la situación concreta, la comisión del error podría verse potenciada por el hecho de que la relación de N3, al ser aditiva, conecta cantidades de la misma naturaleza (precio medido en dinero). Otra interpretación plausible podría ser que, sencillamente, han asignado el valor 663 ("precio del banquete con 8 personas menos"). Sin embargo, esta interpretación

6. Julia: No. Y novecientos… no, no. A ver. ¡Ah! Ya sé. Sería 975 entre 8 porque las 8 personas que han ido para saber cuántas ¿no?
7. Andreu: Sí.
8. Julia: Escribe 975 (Andreu introduce [975…; …]) entre (Andreu introduce [975/…; …] 8 (Andreu introduce [975/8; mensaje de error]).
9. Julia: No.

parece menos sólida a la luz de la acción que realizan a continuación.

Tras el mensaje de error, Julia (ítem 6) materializa un razonamiento similar al anterior asignando el valor de la cantidad “precio del banquete con más personas” (975) a la cantidad desconocida “diferencia de precio”.

De los dos intentos anteriores, podemos concluir que Julia se había marcado como objetivo calcular el “precio del menú de una persona (*Pm*)”, asignando para tal fin los valores de cantidades conocidas a una cantidad desconocida. En los dos casos, las cantidades comparten la característica de cuantificar magnitudes de igual naturaleza (dinero). Sea consecuencia, o no, de un proceso de colapso-deformación, la actuación pone de manifiesto que los estudiantes priorizan la necesidad de aplicar un esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva a la situación. Esta prioridad se confirma en el ítem 11 cuando Julia afirma que lo que quería averiguar era “el precio del menú de una persona (*Pm*)”.

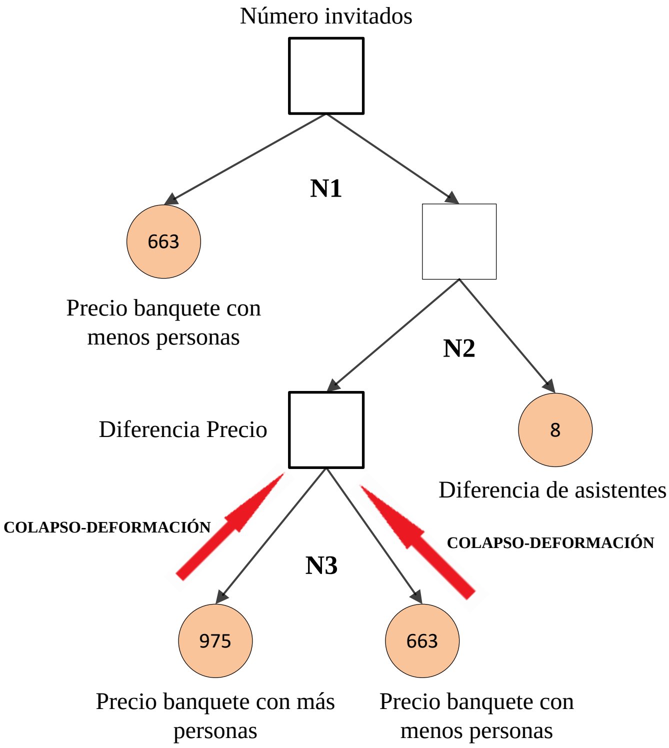


Figura 5.16.

10. (Silencio de veinte segundos.)
11. Julia: 975 euros es lo que ha costado con las 8 personas. Tendremos que saber lo que ha costado una persona.
12. Andreu: Ya.
13. Julia: Entonces… menos 8, pero menos 8 no.
14. (Silencio de seis segundos.)
15. Julia: ¿Y…? Espera… ¿673 más 975… y después eso lo dividimos entre 8?
16. Andreu: ¿Más o menos? … menos.
17. (Julia introduce [663…; …].)
18. Andreu: Pon primero el 975.
19. (Julia borra lo introducido e introduce [975-663; Dp=312].)

Tras los dos intentos fallidos, Julia propone (ítem 13) restar 975 menos 8, lo que implica usar un esquema conceptual distinto al que había intentado emplear en los dos primeros intentos. Resulta importante resaltar que este cambio de orientación se produce después que Julia, en el ítem 11, asiente el razonamiento sobre la necesidad de identificar la cantidad desconocida de N2 ("precio por persona"). Podemos interpretar lo anterior como una descarga de hechos no necesarios (por ejemplo, la necesidad de calcular el "número de invitados") en ese momento para abordar el análisis. Al reorientar el plan, Julia intenta integrar algunas de las cantidades ya utilizadas en los intentos previos dentro de una relación aditiva (ítem 11). Sin embargo, descarta la idea (ítem 13).

Tras un silencio de 6 segundos (ítem 14), Julia parece desencadenar un proceso de análisis mediante el que descubre una relación entre cantidades ligadas por un esquema de cambio. Así. Julia (ítem 15) propone sumar 673 y 975, lo que supondría aplicar el esquema de cambio, pero sin conseguir materializarlo mediante la expresión de una operación correcta. En la verbalización del ítem 15, Julia verbaliza un proceso de análisis-síntesis que supone dar cuenta de dos pasos de la resolución: (a) un paso en el N3 del análisis apoyado en relación aditiva (incorrecta) apoyada en un esquema de cambio y (b) un paso en N2 apoyado sobre un esquema de isomorfismo de medidas partitivo.

Andreu interviene (ítem 16) poniendo en duda la operación suma propuesta por Julia. En el ítem 18, Julia acepta la sugerencia de Andreu. El sistema considera correcta la operación y asigna el resultado a la cantidad la "diferencia de precio entre los dos banquetes (*Dp*=312)".

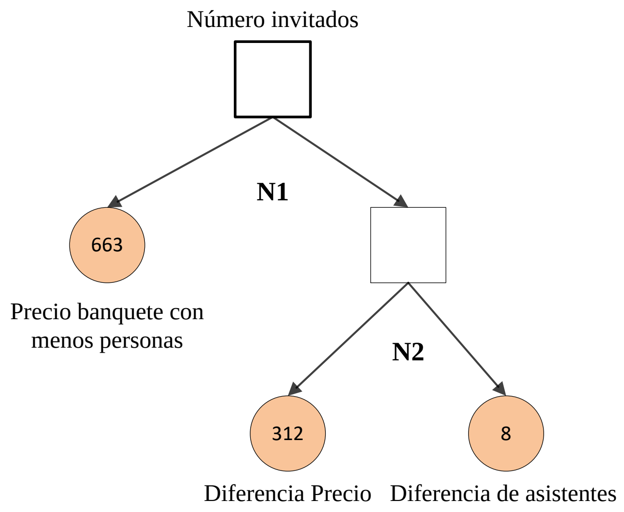


Figura 5.17

20. Julia: Vale (lee el dato nuevo obtenido en la tabla de cantidades). “Diferencia…”. Vale 312… y 312 entre 8 ¿no?
21. Andreu: Sí. 312 entre 8.
22. (Julia introduce [312/8; Pm=39].)

Julia (ítem 20) lee el valor y parte del nombre asignado por HINTS a la cantidad recién calculada, lo que parece indicar que no comprendía la finalidad de la propuesta de Andreu. A continuación, y siguiendo con el plan enunciado en el ítem 15, propone dividir 312 entre 8 (ítem 20), lo que implica emplear correctamente la relación *Dp=Pm·Pa* (isomorfismo de medidas) para calcular el “precio del menú de una persona (*Pm*)” mediante una división partitiva.

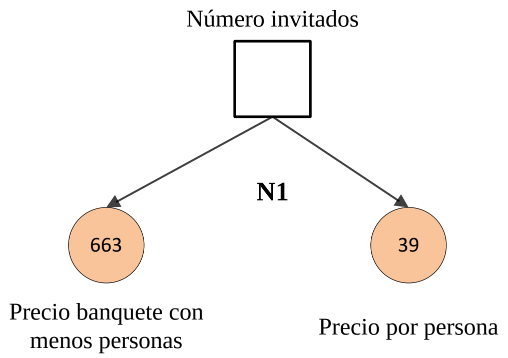


Figura 5.18.

23. Julia: (Lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) “Precio del menú de una persona”. Y eso…eh… pues tendríamos que hacer 312, (lee en voz baja) “…de una persona”, y si dicen que han ido seiscientas…pues,

De nuevo Julia (ítem 23) vuelve a leer el valor y el nombre asignado a la cantidad por el sistema y parece desencadenar un proceso de análisis sobre el estado actualizado de la resolución. Al verbalizar la operación usa la palabra por (ítem 23). Encontramos dos explicaciones: (1) ha eso (señala el dato 663) por eso (señala el dato 39) ¿no?, porque 39 euros es una persona. Entonces sería 633 (introduce [663...; …]) …

24. Andreu: …663 entre…
25. Julia: …663 entre…
26. Julia y Andreu: …39.
27. (Julia introduce [663/39; P=17].)
28. (El sistema da como correcta la última operación e indica la finalización del problema correctamente).

omitido la palabra *dividido* y ha reducido la proposición *dividido por* a *por*; (2) ha planteado de manera incorrecta una multiplicación. Inmediatamente, Andreu aclara que la operación debe ser de división (ítem 24) y Julia lo acepta (ítem 25), lo que nos impide confirmar una u otra alternativa. En definitiva, Andreu (ítem 24) identifica correctamente la relación $Ct=Pm \cdot P$ ligada a un esquema de isomorfismo de medidas de división cuotitiva en el N1 de análisis.

El sistema da como correcta la última operación e indica la finalización del problema que los estudiantes han resuelto siguiendo la lectura L1.

5.4.1.2 El caso de la pareja Andreu-Julia en el problema "La Empresa"

Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000 €. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

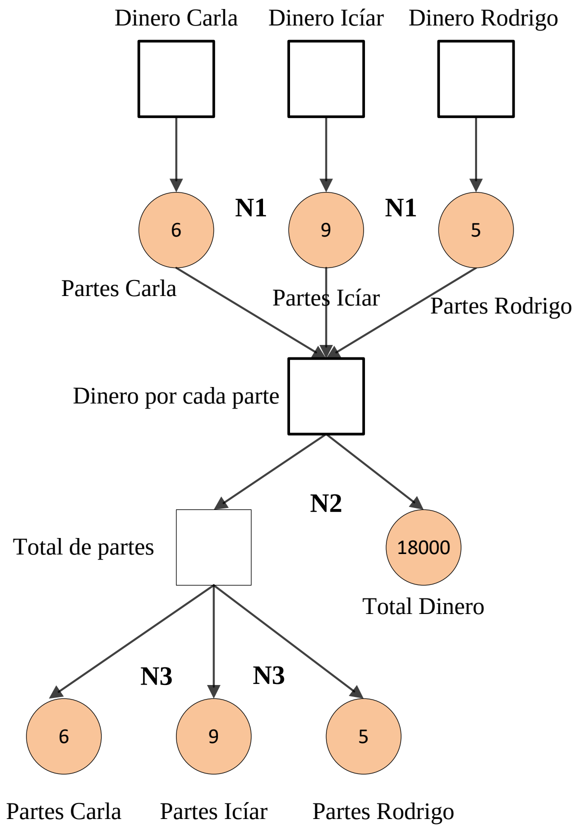


Figura 5.19.

1. (Andreu lee el enunciado del problema.)
2. Julia: Tendremos que hacer 18 000 entre ¿6?
3. Andreu: Entre el que sea ¿no?
4. (Julia introduce [18000/5; mensaje de error].)

Tras leer el enunciado Julia (ítem 2) propone dividir 18000 entre 6 a lo que Andreu responde (ítem 3) que daría lo mismo dividir por cualquiera de las partes. La pareja omite aplicar un esquema de combinación para determinar el total de partes y aplica directamente un isomorfismo de medidas de división partitiva. En este caso, no parece plausible afirmar que han deformado el significado que tiene la cantidad conocida "partes de Rodrigo" colapsándola en el "dinero por cada parte" (Figura 5.20). Por el contrario, se puede concluir que la presencia explícita de la palabra "repartir" en el enunciado les ha sugerido aplicar directamente un isomorfismo de medidas.

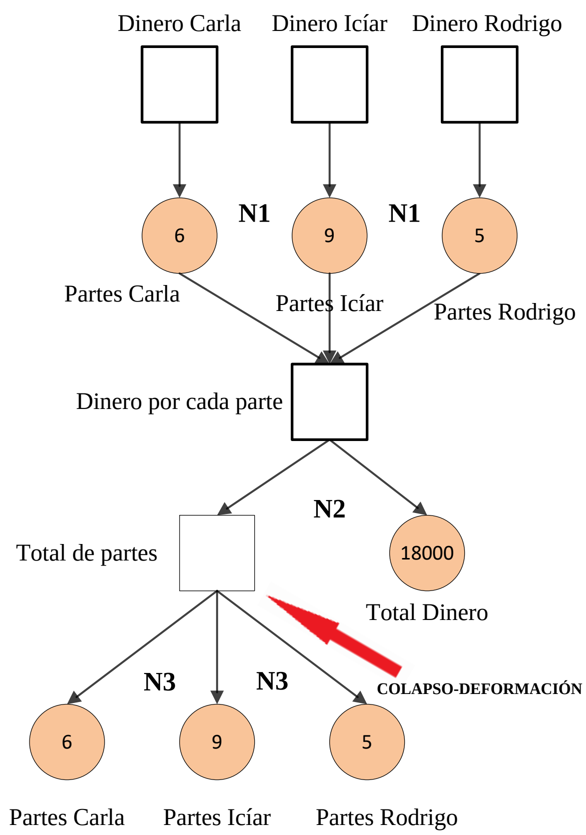


Figura 5.20.

5. Julia: No. (inaudible) A ver. (Lee en el enunciado) "6 partes" … ¿Y si sumamos todas las partes?
6. Andreu: Sí porque así tendremos todas.

Julia lee parte del enunciado de nuevo y propone (ítem 5) sumar todas las partes, lo que podría poner de manifiesto que la primera lectura se centró en algunos elementos clave. Como consecuencia identifica correctamente un esquema de combinación 1 donde las partes son

7. Julia: 6 (introduce [6…; …]) más (introduce [6+9; Pci=15]).
8. Julia: 6 más 9…eh… (lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) “15 partes a Carla e Icíar”. Ahora nos falta el 5 que sería… No, es que lo hemos hecho mal. ¿No sería 6 más 9 más 5? Pues, 6 (introduce [6…; …]) más (introduce [6+…; …]) 9 (introduce [6+9…; …]) más (introduce [6+9+…; …]) 5 (introduce [6+9+5; P=20]).

conocidas y el total es lo desconocido. Esta relación $P = Pc + Pi + Pr$, (resultado de llevar a la situación un esquema de combinación 1) es correcta en las lecturas L1, L2, L3, L4, L8, L9 y L10 del problema. Sin embargo, Julia decide calcular el total de partes de manera fraccionada (ítems 7). La operación 6 más 9 estaría ligada a la relación $Pci=Pi+Pc$ (combinación 1) que también es correcta, pero en las lecturas L5, L12 y L13 del problema y con la que no es suficiente para hallar el total de partes que hay. Aunque la relación introducida es correcta, Julia (ítem 8) al leer el nombre que se asigna a la cantidad que se ha calculado, no queda convencida. Vuelve a verbalizar la relación de combinación 1 entre las tres cantidades e introduce de manera correcta la operación asociada.

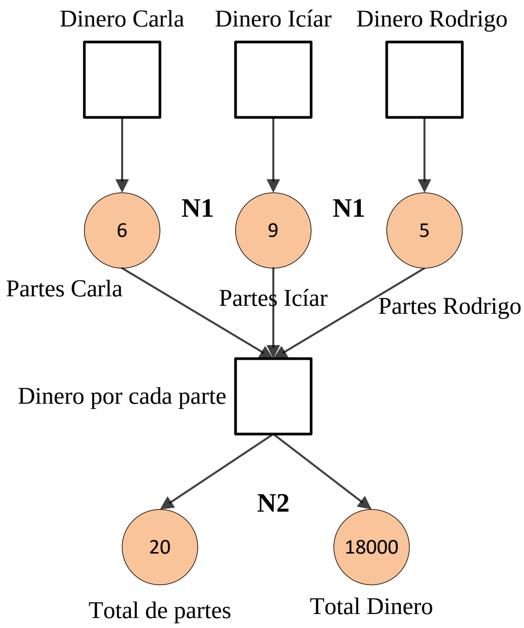


Figura 5.21.

9. Julia: (Lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) “total de partes 20” entre todos. Ahora 6 entre 20 partes ¿no? ¿O 18 000 entre 20?
10. Andreu: Si fuera 6 sería entre 15 ¿no?
11. Julia: Partes… sí. Pues sería… No, porque el total de partes entre todos,

En el ítem 9, Julia lee el nombre y el valor asignado a la cantidad que se acaba de calcular (20) y parece dispuesta a incluirla en una relación derivada de aplicar un esquema de isomorfismo de medidas. Sin embargo, la otra cantidad conocida no parece tenerla tan clara. Así en un primer momento plantea 6/20 y, casi inmediatamente, la correcta 18000/20.

entre los tres, entre Carla, Rodrigo e Itziar son 20.
12. Andreu: Sí.
13. Julia: Y ahora tenemos que hacer 18000, que es el dinero…
14. Andreu: … todo el dinero…
15. Julia: … entre…
16. Andreu: … entre 20.
17. (Julia introduce [18000/20; Dp=900].)

Andreu (ítem 9) se centra en la propuesta 6/20 y la reformula tomando la suma parcial (6/15) que había desechado Julia, pero esta (ítem 11) insiste en su última propuesta y lo justifica diciendo “ahora tenemos que hacer […] dinero”, con lo que parece separar la primera acción donde se relacionaban cantidades que cuantificaban partes. En definitiva, aplica un esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva (ítems 13-17). Es decir, plantea una operación que supondría considerar la relación correcta $D=Dp{\cdot}P$ para calcular “dinero que le toca a una parte (Dp)”.

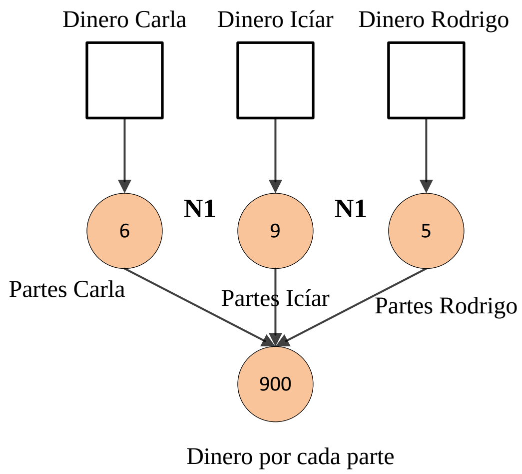


Figura 5.22.

18. Julia: Vale, ahora… (lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) “dinero que le toca a una parte” que son 900 euros que esa le ha tocado a…
19. Julia: …900 que es una parte…
20. Andreu: Espera…
21. Julia: … por 9. 900 por 9 ¿no?
22. Andreu: (Lee el mensaje que aparece cuando señala con el cursor el 900) “dinero que le toca a una parte”
23. Julia: 900 (introduce [900…; …]) por 9 (introduce [900·9; Di=8100]).
24. Julia: (Lee el nuevo dato obtenido de la tabla de cantidades) “dinero que le toca a Itziar”. Ahora hazlo tú. 900 por 5.

Julia (ítem 18) y Andreu (ítem 22) leen la nueva cantidad obtenida en la tabla de cantidades y el mensaje que aparece en el botón de la cantidad al señalarla con el cursor respectivamente. La lectura del nombre de esta cantidad le permite a Julia (ítem 21) aplicar correctamente un esquema de isomorfismo de medidas para averiguar qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno. Para ello propone multiplicar 900 por 9 lo que supone un acierto en la relación $Di=Dp{\cdot}Pi$.

Julia (ítem 24) lee la nueva cantidad obtenida en la tabla de cantidades e identifica correctamente los dos últimos isomorfismos de medida y propone multiplicar 900 por 5 (ítem 24) y 900 por 6 (ítem 26). Primero acierta en la relación $Dr=Dp{\cdot}Pr$ y posteriormente en la relación

25. (Andreu introduce [900·5; Dr=4500].)
26. Julia: Vale. Ahora 900 (introduce [900…; …]) por 6 (introduce [900·6; Dc=5400]).
27. (El sistema da la operación como correcta e indica la finalización del problema correctamente).

Dc=Dp·Pc. El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema con la L1.

5.4.1.3 El caso de la pareja Andreu-Julia en el problema "El Pienso"

Un granjero gasta diariamente 15 kilos de pienso para gallinas y 120 kilos de pienso para vacas. El kilo de pienso para gallinas cuesta 2 € y el de pienso para vacas, 5 €. Si en un año solo puede gastar 250.000 euros. ¿Cuánto dinero le sobra?

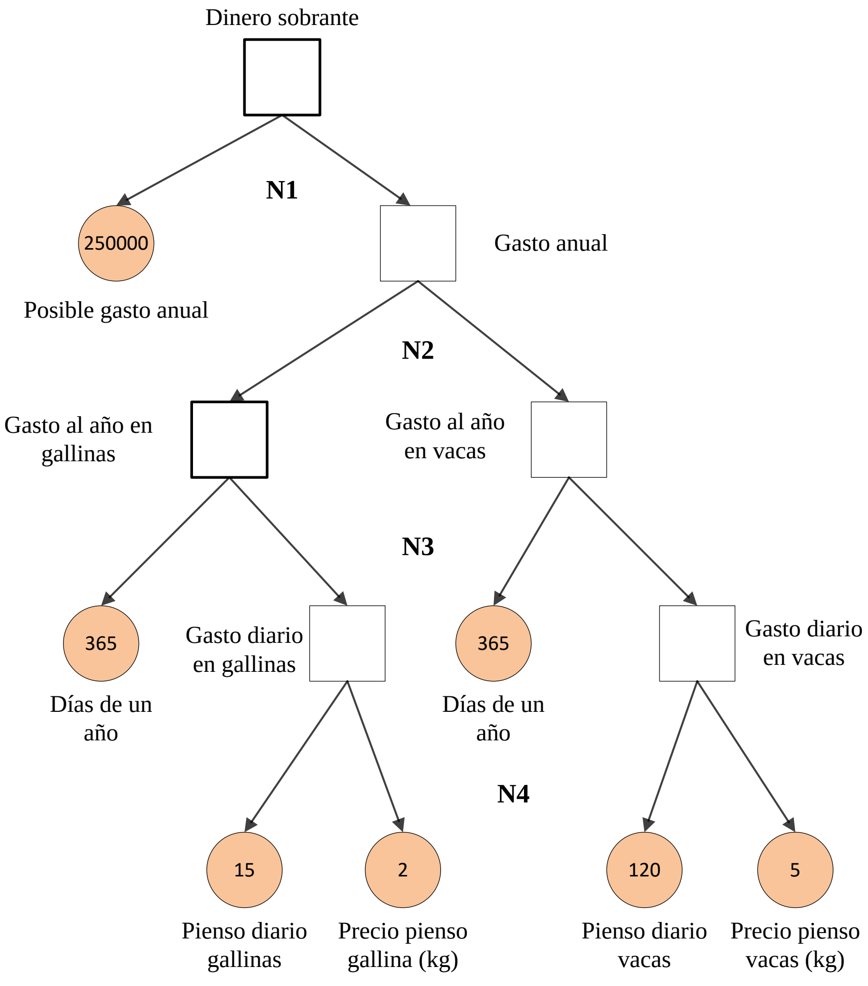


Figura 5.23.

1. (Julia lee el enunciado del problema).
2. Julia: Tenemos que hacer 15 kilos por 2 euros cada uno ¿no? … por 2 (señala el 2 en el enunciado) ¿no? ... ¿O tenemos que hacer 15 por 2 y lo

Tras leer el enunciado, Julia (ítem 2) propone multiplicar 15 por 2, es decir, de manera correcta, propone *Kg·Pug*. (*Pdg=Kg·Pug*) apoyando el razonamiento sobre un esquema de isomorfismo de medidas que le permitirá averiguar "el

que nos diera? ... eh… ¿en un año?... Probemos 15 por 2 (introduce [15·2; Pdg=30]).	dinero gastado en pienso para gallinas en un día (*Pdg*)". Esto implica un proceso analítico en el N4. Tras esto parece proponer obtener el gasto en pienso para gallinas en un año. Esto implicaría utilizar un segundo esquema de isomorfismo de medidas, enlazando dos niveles de análisis (N3 y N4) tal vez pensando en hallar el "dinero gastado en un año en comida para las gallinas (*Pag)"*
3. Julia: Vale. (Lee en la tabla de cantidades el nuevo dato obtenido) "dinero que ha gastado en pienso para gallinas en un día". Y eso por 365 ¿no? por un año. 4. Andreu: Sí. 5. Julia: 365 (introduce [365…; …]) por (introduce [365·…; …]) … 30 (introduce [365·30; Pag=10950]).	Posteriormente, Julia (ítem 3) lee el nombre asignado por el sistema para la cantidad que acaba de determinar y propone multiplicar 30 por 365 lo que supondría aplicar de manera correcta la relación *Pag=Pdg·Da*.

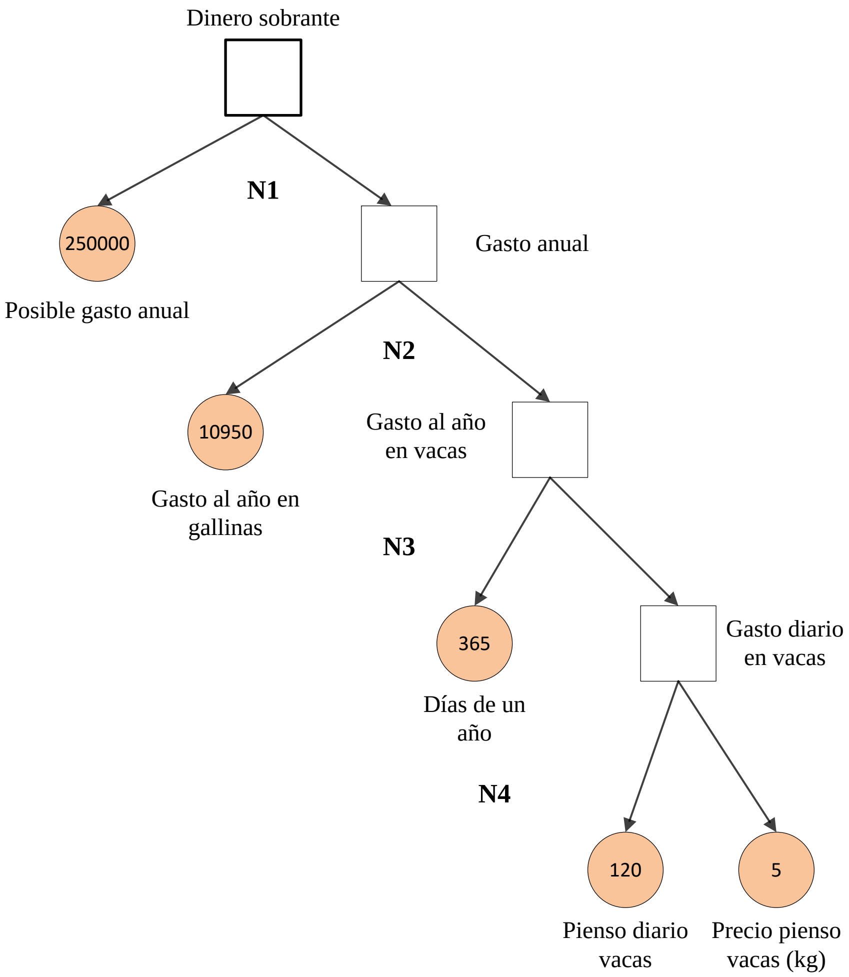


Figura 5.24.

6. Julia: Eso (vuelve a leer en la tabla de cantidades) “dinero que se ha gastado…”. Ahora nos falta el otro. Ahora tú haz … ehhh… 5 euros (Andreu introduce [5…; …]) y ¿cuántos kilos? (vuelve a leer ahora el enunciado) “120 kilos para vacas y 15 de pienso para gallinas”
7. (Andreu introduce [5/…; …].)
8. Julia: Vale. 120… no, 120 (Andreu introduce [5/120…; …]) no, no ([5/120; mensaje de error]).

Julia (ítem 6) vuelve a leer la nueva cantidad obtenida en la tabla de cantidades y parece combinar otra síntesis apoyada de nuevo en dos esquemas de isomorfismo de medidas, pero esta vez con los datos ligados al consumo de pienso de las vacas. En este episodio se pone de manifiesto como Julia vuelve a la semántica del enunciado para asegurarse de cuántos kilos de pienso les corresponde a las vacas.
Andreu (ítems 6-7) introduce la operación 5/120, mientras Julia (ítem 7) manifiesta su oposición. Posiblemente, Andreu parte de la orden de Julia en el ítem 6 (“Ahora tú haz … ehhh… 5 euros”) y la combina con alguno de los datos que Julia verbaliza (“120 kilos para vacas y 15 de pienso para gallinas”) en un esquema multiplicativo fallido.

9. Julia: 120 (Andreu introduce [120/…; …]) no, entre no. 120 por 5 euros cada uno (Andreu borra lo introducido).
10. Julia: 120 (introduce [120·15; mensaje de error]).

Sin embargo, tras la rectificación de Julia (ítem 9), Andreu insiste en dividir. Julia propone multiplicar 120 por 5, pero en lugar de la cantidad 5 introduce la cantidad 15 (ítem 10), “los kilos de pienso asignados a las gallinas *(Kg)*”, por lo que el sistema responde con un mensaje de error.

11. Andreu: Tampoco.
12. Julia: A ver… 15 kilos de pienso para gallinas y 120 (introduce [120·…; …]) por… ehh…5 (introduce [120·5; Pdv=600]).

Finalmente, Julia (ítem 12) introduce correctamente 120 por 5 una relación entre cantidades (*Pdv=Kv·Puv*) soportada por un esquema de isomorfismo de medidas y situada en el N4 de análisis.
Hemos podido apreciar que Julia, a pesar de tener clara la combinación de análisis surgida de los dos isomorfismos de medidas, ha tenido problemas a la hora de identificar las cantidades que tenía que utilizar. Tal vez esto haya sido debido a la cantidad excesiva de datos distintos que tenía el problema que se referían a cantidades de una misma magnitud (por ejemplo, “kilos de pienso diario para las vacas” y “kilos de pienso diarios para las gallinas”). De hecho, Julia ha necesitado refrescar los valores de estas cantidades conocidas releyendo el enunciado.

13. Julia: (Lee la nueva cantidad obtenida en la tabla de cantidades) "… para vacas en un día". Y ahora eso multiplícalo por 365. Seiscientos primero (Andreu introduce [600…; …]) por (Andreu introduce [600·…; …]) 365 (Andreu introduce [600·365; Pav=219000]).	Tras leer el nombre que el sistema ha asignado a la cantidad determinada, Julia (ítem 13) propone multiplicar 600 por 365 apoyando correctamente el razonamiento en el N3 y que materializa la relación *Pav=Pdv·Da*, lo que permite averiguar el "dinero gastado en un año en comida para las vacas (*Pav*)".

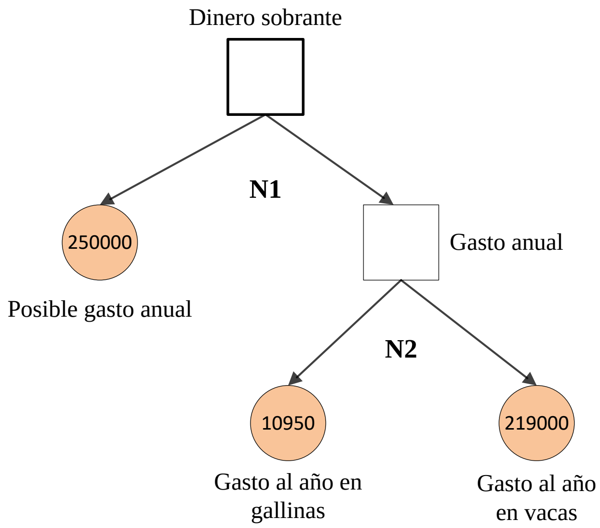


Figura 5.25.

14. Julia: (lee) "Dinero gastado…" Y ahora tienes que sumar eso (señala 219000 en la tabla de cantidades) más eso (señala el 600). Este (señala de nuevo el 219000 y Andreu introduce [219000…; …]) más este (señala el 600), más el 600. 15. (Andreu introduce [219000+600; mensaje de error].)	Ahora, Julia (ítem 14) tras leer el nombre de la nueva cantidad recién calculada en la tabla de cantidades, propone sumar 219000 más 600. Esto supondría añadir al gasto de las vacas de un año el gasto de las vacas de un día. El sistema responde con un mensaje de error (ítem 15). Podríamos interpretar que intenta aplicar un esquema de combinación utilizando como aspectos en común entre las cantidades la coincidencia de la magnitud (dinero) y de los agentes (vacas). Tal vez el error resida en no haber distinguido la distinta adjetivación del sustantivo.
16. Julia: No. Era… no es que ese no era. Era este (señala e introduce [219000…; …]) más este (introduce [219000+600; mensaje de error]).	Julia (ítem 16) insiste en el error. Posiblemente, interpreta que Andreu no había introducido correctamente su verbalización, pero, en cualquier caso, se pone de manifiesto que el error no es un simple despiste.

17. Julia: ¿No? Entonces, veamos… ¡Ah! no, no, no. Que hemos sumado 600 y es 219000 por… ¡ay! más 10 295. Este (introduce [219000…; …]) más (introduce [219000+10950; Pac=229950]).

El segundo mensaje de error produce una reacción en Julia (ítem 17) que le conduce a releer las etiquetas de las incógnitas auxiliares halladas. Hecho esto se da cuenta de su error y propone sumar, correctamente, 219000 más 10950. Esto implica recurrir a un esquema de combinación 1 en el N2 de análisis y le lleva a materializar la relación *Pac=Pav+Pag*. De nuevo parece ser que una relectura de los nombres de las incógnitas auxiliares ha sacado a Julia de su error. Posiblemente la gran cantidad de valores y su paralelismo en cuanto a coincidencias de magnitudes y agentes esté detrás de estos errores.

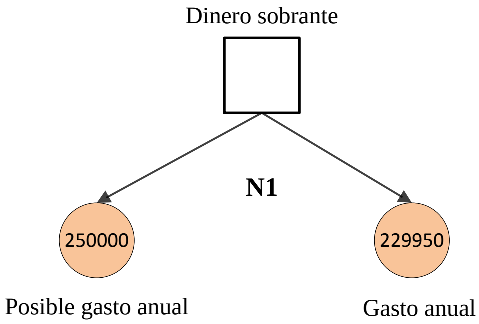


Figura 5.26.

18. Julia: (Lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) “dinero gastado en un año”. Ahora sumar eso (señala el dato 229950) más eso (señala el dato 219000). Este (introduce [229950…; …]) más (introduce [229950+…; …]) doscientos… este (introduce [229950+219000; mensaje de error]).

Julia (ítem 18) lee de nuevo la etiqueta de la nueva cantidad obtenida en la tabla de cantidades y propone sumar 229950 más 219000. El sistema responde con un mensaje de error.

19. Julia: Pues suma este (Andreu introduce [219000…; …]) más 22 (Andreu introduce [219000+…; …]). No 22, 22, espera. 22 más 21… este, es este (Andreu introduce [219000+229950; mensaje de error]).

Posteriormente Julia (ítem 19) vuelve a proponer a Andreu la misma relación entre las cantidades, pero ahora sumando 219000 más 229950. El sistema responde de nuevo con un mensaje de error. Esta insistencia de Julia, llegando al extremo de no atender a la conmutatividad de la suma, sigue la línea del episodio de los ítems 14-16.

Conviene señalar que las propuestas de Julia han venido precedidas de una lectura del nombre asignado a la cantidad recientemente determinada. Esto pone de manifiesto que Julia no ha integrado esta cantidad, ya de N1, en un posible análisis completo inicial.

20. Andreu: ¿No?
21. Julia: A ver. ¡Ah! (lee datos de la tabla de cantidades) “Pienso de las vacas en un día”. No. “Dinero gastado en un año en comida para los animales”. Si esto es el… el…
22. Andreu: … el dinero gastado para los animales no habría que restarle…
23. Julia: ¡Ah! no. Ahora lo tenemos que sumar… no. Tenemos que hacer 229950 menos 250000 euros y después eso, 21000 menos 250. A ver… espera… 22… no. Quienes son…
24. Julia: 250 (introduce [250000…; …]) menos (introduce [250000-…; …]) este (señala e introduce [250000-229950; Ds=20050]).
25. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente)

Julia (ítem 21) tras el nuevo mensaje de error relee todos los datos que aparecen en la tabla de cantidades. Andreu (ítem 22) propone una resta entre “el dinero gastado en un año en comida para los animales (*Pac*)” y otra cantidad que no verbaliza. Es posible que haya establecido una relación correcta. A pesar de esto, Julia (ítem 23) insiste inicialmente en sumar, aunque a continuación propone una secuencia de restas no enlazadas y remata (ítem 24) calculando correctamente la incógnita principal del problema. . Al ser correcta la última relación, el sistema indica la finalización del problema de acuerdo con la L2. Esta finalización, posiblemente inesperada para Julia, impide que justifique las combinaciones de restas que había propuesto.

5.4.2. LA PAREJA CLAUDIA-NATALIA. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON HINTS.

5.4.2.1 El caso de la pareja Claudia-Natalia en el problema “El Mayorista”

Un mayorista compra en un matadero 55 corderos a 46 euros cada uno. Vende a un restaurante33 a 65 euros cada uno y el resto a un supermercado por 58 euros cada uno. ¿Qué beneficio obtuvo?

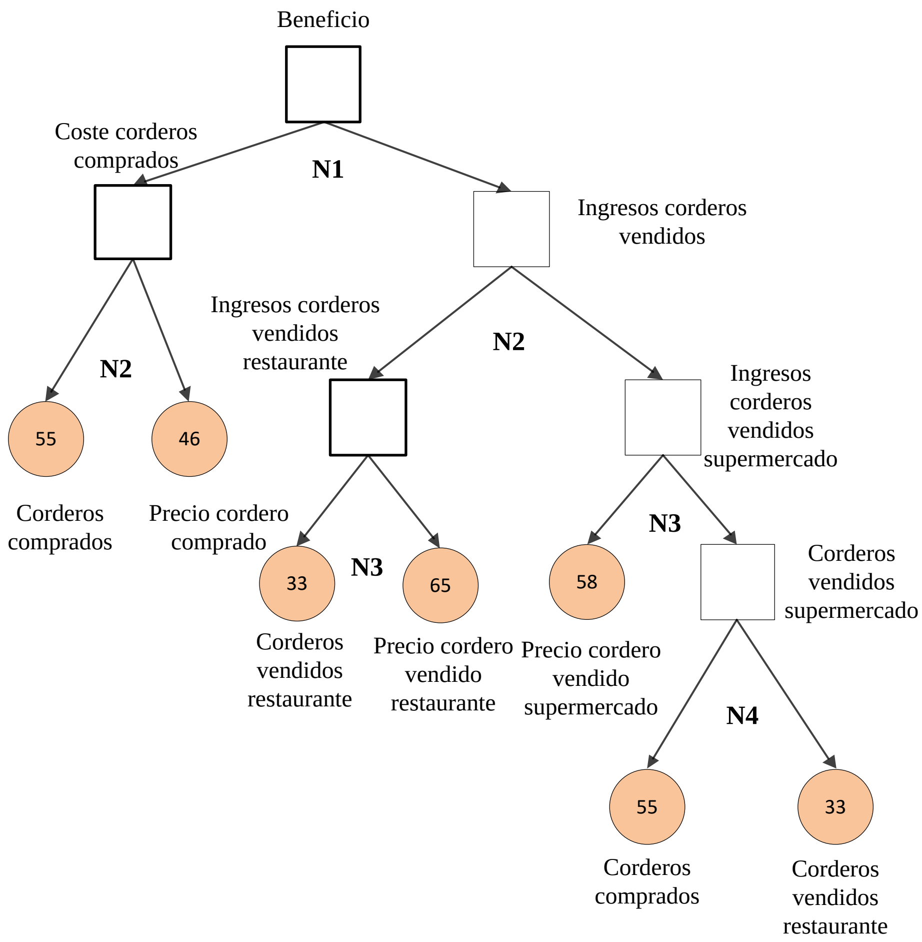


Figura 5.27.

1. (Natalia lee el problema.)
2. Claudia: Vale. Primero, como… a ver… cada cordero vale 46 euros, entonces 55 por 46.
3. Natalia: Sí porque así sabríamos más o menos lo que…
4. Claudia: …lo que cuesta en total.
5. Natalia: Sí.
6. (Claudia introduce [55·46; Pcm=2530].)

Tras leer el enunciado, Claudia (ítem 2) propone multiplicar 55 por 46. Parece que ha identificado correctamente un esquema de isomorfismo de medidas que permite averiguar el precio que paga el mayorista por todos los corderos. Es decir, identifica correctamente la relación *Pcm* = *Ncm·Pucm*.

7. Natalia: Ahora tendríamos que poner 33 corderos…
8. Claudia: ...espera, 33 corderos…
9. Natalia: …por 65, para saber…
10. Claudia: …cuántos euros vende, ¡ay! cuánto dinero le han costado los 33 corderos para el restaurante.

A continuación, Natalia (ítems 7 y 9) plantea multiplicar 33 por 65 y Claudia la apoya. En la verbalización de Claudia (ítem 10) se producen algunas imprecisiones (“cuántos euros vende” y “cuánto dinero le han costado”) en las que se barajan los protagonistas de la venta y de la compra. En definitiva, parece que han identificado la relación

11. Natalia: Sí. 33 por… ¿por qué?...
12. Claudia: …65.
13. (Natalia introduce [33·65; Pcr=2145].)

Pcr=Ncr·Pucr ligada a un esquema de isomorfismo de medidas siguiendo la L1 del problema.
Conviene señalar que ambas alumnas también realizaron estas operaciones correctamente cuando se enfrentaron al problema en el cuestionario Post.

14. Natalia: Ahora tendríamos que saber el dinero del supermercado.
15. Claudia: Y ahora como el resto lo vende al supermercado, tenemos que saber cuántos corderos va a vender al supermercado “Tenía 55 corderos y después 33 corderos” (leyendo parte del enunciado). 55 menos 33.
16. Natalia: Sí. Y creo que lo que nos dé lo deberíamos multiplicar por 58. Vale. Haz tú la resta y yo...
17. Claudia: …55 (introduce [55…; …]) menos (introduce [55-…; …]) …
18. Natalia: ¿55? (Claudia introduce [55-33…; …])
19. Claudia: Sí, que son los corderos.
20. Natalia: ¡Ah! sí, sí.
21. Claudia: (Introduce [55-33; Ncs=22]) sale 22.

Natalia (ítem 14) verbaliza la siguiente cantidad desconocida que debería determinarse. La referencia a dicha cantidad mediante “el dinero del supermercado” es poco precisa, pero parece clara su intención. Hasta el momento, las estudiantes habían realizado secuencias análisis-síntesis de solo un paso, pero la sugerencia de Natalia (ítem 14) lleva a Claudia (ítem 15) a realizar un análisis de dos pasos en el que pone en juego un esquema de combinación y un isomorfismo de medidas en los niveles N4 y N3. La síntesis del proceso de análisis se refleja en que propone restar 55 menos 33. Es decir, plantea una operación que supondría considerar la relación correcta $Ncm = Ncr + Ncs$ consecuencia de aplicar un esquema conceptual de combinación y realizar correctamente la operación del N4 de análisis.

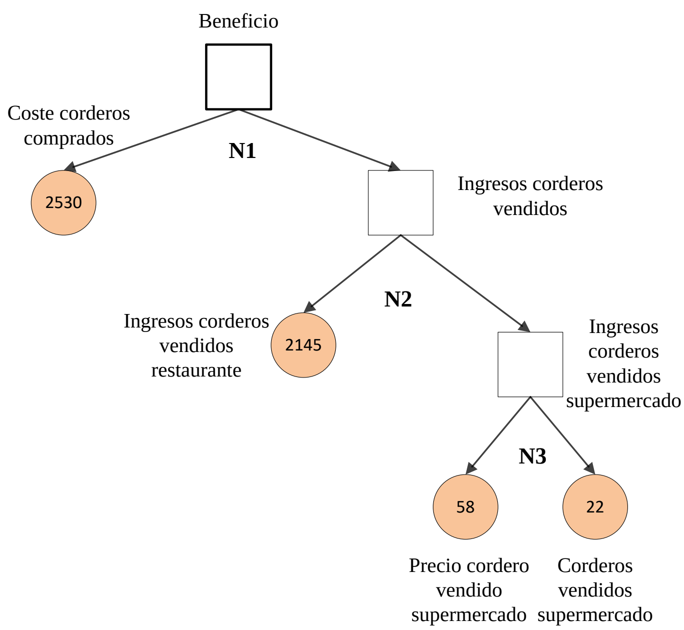


Figura 5.28.

22. Natalia: Ahora 22 por… ¿qué era? 58.
23. Claudia: Sí
24. (Natalia introduce [22·58; Pcs=1276]).

Natalia (ítem 22) continúa el proceso de síntesis y multiplica 22 por 58. Natalia ha identificado correctamente la relación entre las tres cantidades *Pcs=Ncs·Pucs* tras aplicar un esquema de isomorfismo de medidas 1.
Ambas alumnas también habían utilizado correctamente estas relaciones en el cuestionario Post, aunque Natalia cometió un error en el cálculo de una de las incógnitas auxiliares.

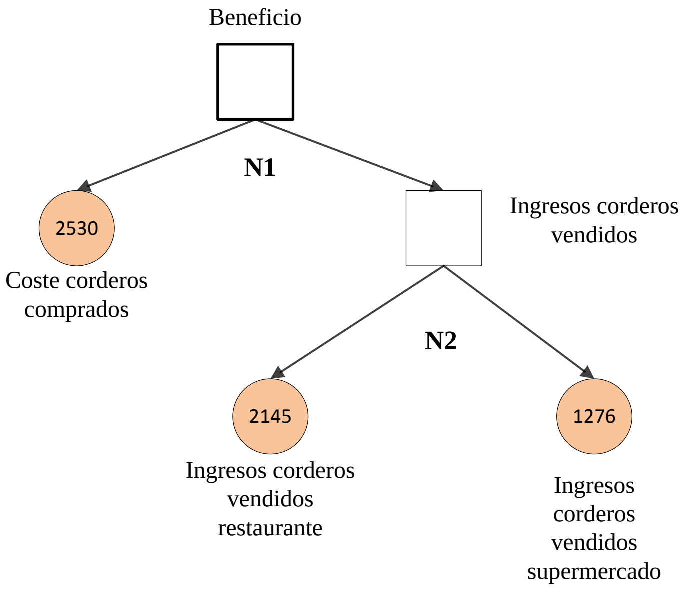


Figura 5.29.

25. Claudia: (Lee la pregunta del enunciado) "¿Qué beneficio obtuvo?". Ahora todo el dinero…
26. Natalia: Sí, lo tenemos que sumar.
27. Claudia: Sí. 1530 (introduce [2530…; …]) que es el dinero...
28. Natalia: Sí.
29. Claudia: …(Lee el globo de texto que se despliega al situar el cursor sobre el botón que representa a la cantidad 2530) "Precio que pagó…", no mentira.
30. Natalia: No, primero, bueno sí.
31. Claudia: No espera. (Borra lo que había escrito.) (Vuelve a leer la pregunta del problema y un dato de la tabla de cantidades.) El que obtuvo,

Claudia (ítem 25) lee la pregunta del enunciado y verbaliza que hay que averiguar todo el dinero. El hecho de que Claudia indique "todo" y Natalia (ítem 26) "sumar", parece sugerir que están pensando en obtener el ingreso total. Sin embargo, Claudia (ítem 27) introduce el valor correspondiente al coste de los corderos, lo que iría en contra del razonamiento anterior, pero rectifica inmediatamente después de leer el nombre asignado a la cantidad (ítem 29). Ambas alumnas proponen (ítem 31 y 34) sumar 2145 más 1276. En definitiva, realizan una operación correcta que les permite calcular el dinero total recibido por la venta de los corderos usando la relación *Dv=Pcr+Pcs* (combinación 1) en el N2 del proceso de análisis.

dinero que recibe, 2145 (introduce [2145…; …]) …

32. Natalia: Sí. El dinero que obtuvo él.
33. Claudia: …dinero…
34. Natalia: …mil doscientos…
35. Claudia: …más (introduce [2145+…; …]) …
36. Natalia: Sí.
37. (Claudia introduce [2145+1276; Dv=3421].)

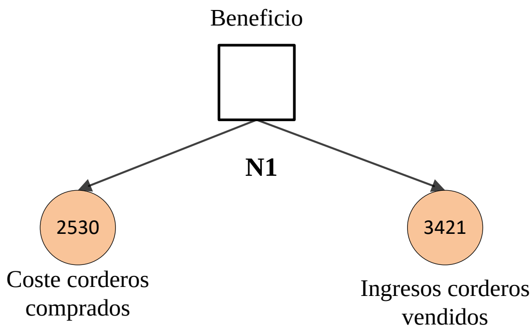


Figura 5.30.

38. Claudia: (Lee la etiqueta del nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades.) Dinero que recibe de la venta de todos los corderos.
39. Natalia: A ver.
40. Claudia: A ver. Sabemos cuántos euros ha pagado por cada cordero (señala el dato 2530 de la tabla de cantidades) ...
41. Natalia: …sí...
42. Claudia: …y el dinero que recibe… el dinero que recibe del restaurante (señala el dato 2145 de la tabla de cantidades) ...
43. Natalia: …sí…
44. Claudia: …y también tenemos (señala el dato 22 de la tabla de cantidades) …
45. Natalia: …lo del supermercado...
46. Claudia: …el dinero que recibe del supermercado (señala el dato 1276 de la tabla de cantidades) y el dinero que recibe de la venta de todos los

Claudia (ítem 38) lee, en la tabla de cantidades, el nombre asignado a la cantidad obtenida y hace una relectura (ítems 40-46) de todas las cantidades que han ido obteniendo anteriormente. En este repaso observamos que ha seguido el orden cronológico de su obtención exceptuando la última hallada, es decir, la que indica los ingresos totales que ha obtenido con la venta de todos los corderos y que será necesaria para realizar el proceso de síntesis del N1.

Tras la relectura, Natalia (ítem 47) propone sumar una serie de cantidades, que inicialmente no verbaliza, y que al final materializa (ítem 53) sumando las cantidades que hacían referencia a los ingresos parciales (ingresos por la venta al supermercado, ingresos por la venta al restaurante) y el coste total (2530). Las tres cantidades se relacionan, efectivamente, de manera aditiva, pero lo hacen mediante dos relaciones, una de las cuales ya había sido utilizada ($Dv=Pcr+Pcs$). Se podría interpretar que corderos (señala el dato 1421 de la tabla de cantidades) ...

47. Natalia: …tendremos que sumarlo. ¿Lo sumo?
48. Claudia: Ahora, todo esto… espera. Esto (introduce [2145…; …]) más (introduce [2145+…; …]) …
49. Natalia: … ¿tantos más?...
50. Claudia: …mil doscientos (Natalia introduce [2145+1276…; …]) más (Natalia introduce [2145+1276+…; …]) …
51. Natalia: …más 23 ¿no?...
52. Claudia: …no, más 3421.
53. Natalia: ¡Ah sí! tienes razón (introduce [2145+1276+2530…; …]).
54. Claudia: No, ahí no.
55. Natalia: ¡Ah! Es aquí (señala con el cursor el botón con el dato 3421).
56. Claudia: No espera (borra todo lo que habían introducido) desde el principio.
57. Claudia: (introduce [2145+1276…; …]) A ver. Ahora esto más (introduce [2145+1276+…; …]) …
58. Natalia: …22…
59. Claudia: …3421 (introduce [2145+1276+3421…; …]).
60. Natalia: ¡Ayyy! Pues entonces antes lo hemos hecho mal (Claudia introduce [2145+1276+3421; mensaje de error]).

Natalia aún no contempla 3421 como el resultado de suma 2145 y 1276.

Sin embargo, Claudia sustituye parte de la propuesta de Natalia (ítems 54-59) e introduce en el sistema 2145 más 1276 más 3421, lo que implicaría combinar cantidades que forman parte de una relación (*Dv*=*Pcr*+*Pcs*) ya utilizada, a lo que el sistema responde con un mensaje de error (ítem 60). Este error puede resultar hasta cierto punto sorprendente porque están a un solo paso de resolver el problema.

61. Claudia: Pues lo hemos hecho mal. ¿Es más 22?
62. Natalia: Creo que sí. Sí (señala en la tabla de cantidades el dato 22).
63. Claudia: (Lee el dato 22 en la tabla de cantidades) “número de corderos que vende al supermercado”.

Natalia (ítem 58 y 62) y Claudia (ítem 61) se plantean introducir en la relación anterior la incógnita auxiliar 22 (“número de corderos que vende al supermercado”). Sin embargo, cuando Claudia (ítem 63) lee el nombre de la cantidad en la tabla de cantidades, Natalia (ítem 64) niega a emplearla porque parece vislumbrar que las cantidades no son de la misma naturaleza.

64. Natalia: ¡Ahhh! Pues no. Tenemos que saber precio… vale ya sé. Sumar 2530…
65. Claudia: …2530 (Natalia introduce [2530…; …]) …
66. Natalia: …más (introduce [2530+…; …]) …
67. Claudia: …2530 ¿por qué?
68. Natalia: Pues porque esto es el precio.
69. Claudia: No, el precio que paga él.
70. Natalia: ¡Ahhh! entonces no. Si lo ha pagado él.
    Claudia: (Borra lo que había escrito) Vale, sería…

Natalia (ítem 64) propone sumar 2530 a otra cantidad o cantidades que representen precio, lo que indica que, ante la falta de una idea mejor, organiza la resolución con la certeza de que es necesario usar una relación aditiva con magnitudes de naturaleza precio. En principio, la idea de Natalia era acertada, pero Claudia (ítem 67) le pregunta por qué utiliza la cantidad 2530. Natalia (ítem 68) le responde que esa cantidad indica precio, que es lo que están buscando, a lo que Claudia (ítem 69) le contesta que es el precio que paga el mayorista. De alguna manera, esto convence a Natalia que abandona la línea que parecía estar articulando (ítem 70).

71. Natalia: ¿Pedimos una ayuda?
72. Claudia: Mejor que sí (pide ayuda al sistema).
73. Natalia: (Lee la ayuda) “puedes calcular el beneficio”.
74. Claudia:(Vuelve a apretar el botón de ayuda y lee la nueva ayuda) “precio que paga el mayorista por todos los corderos, 2530, y dinero que reciben de la venta de todos los corderos, 3421”.
75. Natalia: Creo que ya sé lo que tenemos que hacer.
76. Claudia: 2530 más 3421. Es 2530…
77. Natalia: ¿No sería restarlo?
78. (Claudia introduce [2530+…; …].)
79. Natalia: …menos, menos…
80. Claudia: …3421.
81. Natalia: Sí.
82. (Claudia introduce [2530+3421; mensaje de error].)

Natalia (ítem 72) y Claudia (ítem 73) deciden pedir una ayuda al sistema. El sistema les proporciona una ayuda de nivel 1 para la próxima relación que Natalia lee (ítem 74). La primera ayuda como vemos solamente les informa sobre la cantidad que pueden averiguar (el beneficio).
Inmediatamente después de leer la ayuda Claudia (ítem 75) vuelve a apretar el botón de ayuda y el sistema proporciona una ayuda de nivel 2. Esta segunda ayuda les indica las dos cantidades que pueden utilizar para realizar un cálculo correcto. La combinación de las dos ayudas les dice exactamente las tres cantidades que pueden relacionar. El hecho de que pida una segunda ayuda, junto a las dudas que están manifestando en este último paso, nos hace pensar que las estudiantes pueden desconocer el significado de beneficio o el esquema conceptual que relaciona beneficio con dinero inicial y dinero final.
Tras esta segunda ayuda Claudia propone sumar 2530 más 3421 (ítem 77), mientras que Natalia (ítem 78) se pregunta si no se deberían restar las cantidades. Sin embargo, Claudia introduce la operación

suma (ítem 83) y el sistema proporciona un mensaje de error.

83. Natalia: Era restar.
84. Claudia: ¡Ah! pues.
85. Natalia: A ver, déjame. ¿Qué era? ¿dos mil…?
86. Claudia: …2530...
87. Natalia: …2530 (introduce [2530…; …]) … y dos mil…
88. Claudia: No. Sería al revés porque...
89. Natalia: ¡Ahh! Sí (borra lo introducido)
90. Claudia: …porque el 3421…
91. Natalia: ¿Dónde está?
92. Claudia: Ahí, ahí debajo (señala el dato en la pantalla).
93. Natalia: ¿Aquí?
94. Claudia: ¡Natalia! ahí (señalando).
95. Natalia: ¡Ah! (introduce [3421-2530; B=891]).
96. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente)

Natalia (ítem 84) le indica a Claudia que la operación era una resta y propone restar 3421 menos 2530 lo que supone un acierto en la última relación. Apuntar también que Natalia (ítem 88) introduce primero el sustraendo pensando que la cantidad 2530 era mayor a lo que Claudia responde advirtiéndola del error (ítem 89).
El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema con la L1.

5.4.2.2 El caso de la pareja Claudia-Natalia en el problema "El Bautizo"

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

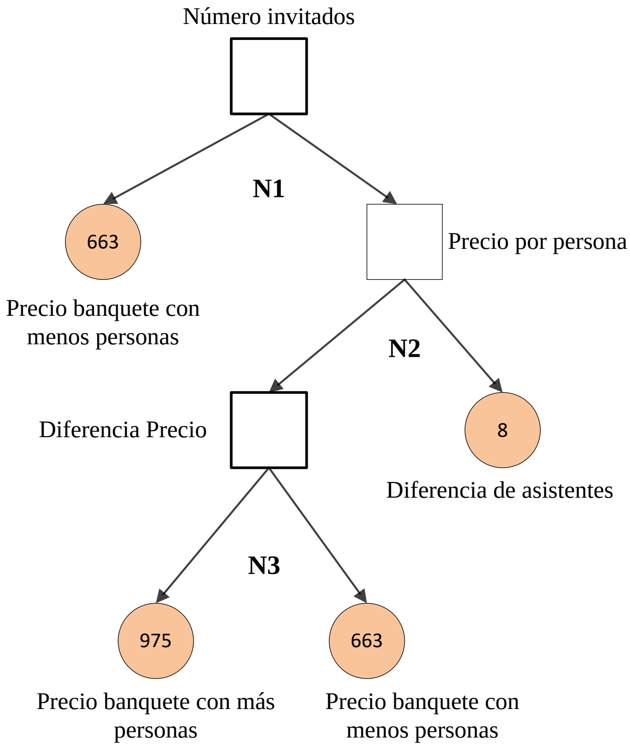


Figura 5.31.

1. (Claudia lee el enunciado del problema).
2. (Silencio de seis segundos.)
3. Natalia: Pero, 663… (señala el dato en el enunciado).
4. Claudia: …es el coste...
5. Natalia: …el coste de todos los invitados.
6. Claudia: No, espera. Del banquete. El coste del banquete, de toda la comida, es 663 (lee otra vez parte del enunciado del problema) “si hubiesen asistido 8 personas más en el banquete hubiese costado 975 euros”. Entonces ponemos…
7. Natalia: Creo que será restar ¿no?
8. Claudia: ¿975 menos 8?
9. Natalia: Sí…no.
10. Claudia: ¿Sí o no?
11. Natalia: No. 975 menos…
12. Claudia: No. 975 (señala el botón con el cursor y lee el mensaje que se

Después de leer el enunciado y repasar lo que conectarlos valores 663 y 975 con las cantidades a las que representan (ítems 3-6), Natalia (ítem 7) propone restar, aunque no verbaliza qué cantidades. Claudia le pregunta si quiere restar 975 menos 8 a lo que Natalia contesta inicialmente que sí, pero acaba rectificando de manera inmediata (ítem 9). Posiblemente, Natalia está articulando el análisis usando el esquema correcto de cambio 4 necesario en el N3 para averiguar la diferencia de precio entre los dos banquetes. Nuevamente, podemos atribuir la vacilación a la dificultad ligada a la profundidad del análisis. Sin embargo, Claudia propone restar 975 menos 8 tras señalar la cantidad 975 y leer el mensaje que despliega (ítem 12). Natalia (ítem 13) da el visto bueno a la operación. Al introducir la operación el sistema proporciona un mensaje de error (ítem 14)

Posiblemente, Claudia centra la atención en el texto “8 persona de más”. Parece que está basado en que el precio del banquete mayor (975) es debido a la despliega) es “el coste total del banquete con 8 personas más”.

13. Natalia: ¡Ah! Pues entonces sí.
14. (Claudia introduce [975-8; mensaje de error].)
15. Natalia: A ver si es restar, ¡ay!, sumar.

presencia de 8 personas más y por tanto concluye de manera incorrecta que si resta esas 8 personas obtendrá un precio sin esas 8 personas. El error pone de manifestó una falta de control en dos aspectos: (1) resta cantidades que no son de la misma naturaleza (precio menos personas) y (2) la cantidad que pretenden calcular con esta resta, es una cantidad conocida en el problema (663, precio del banquete sin las 8 personas de más).

Al ver el mensaje de error, Natalia (ítem 15) parece insistir en usar estas dos cantidades y mantiene la necesidad de relacionaras de manera aditiva mediante una suma. Claudia le pide un poco de tiempo (ítem 16).

16. Claudia: Espera. A ver que me aclare yo. ¡Ah! 975 dividido entre 8 para saber cada persona cuanto ha pagado.
17. Natalia: Sí vale. Entonces sí (Claudia introduce [975/…; …]). ¿Cuántos invitados…? (Claudia introduce [975/8…; ...]) vale.
18. (Claudia introduce [975/8; mensaje de error].)

Tras reflexionar, Claudia (ítem 16) propone dividir 975 entre 8. Natalia acepta la propuesta y el sistema proporciona un mensaje de error (ítem 18). Parece que Claudia y Natalia consideran un esquema conceptual de isomorfismo de medidas de división partitiva. Este esquema es necesario en el N2, pero no en el N3. Es decir, en lugar de determinar la cantidad “diferencia de precio”, lo que hacen, en primer lugar (Figura 5.32), es asignarle a esa cantidad desconocida el valor de la cantidad conocida “precio del banquete con más personas” (975). De nuevo aparece el fenómeno al que hemos llamado colapso-deformación que, posiblemente, refleja la dificultad de las alumnas para realizar un análisis completo del problema que sería necesario para alcanzar el N3. Como ya hemos señalado anteriormente, esta dificultad puede verse potenciada por el carácter aditivo de la relación de N3, pues conecta cantidades de la misma naturaleza (precio medido en dinero). Otra interpretación podría ser haber considerado el 975 como el total de lo que han pagado las 8 personas de más o bien haber supuesto que al banquete sólo habían asistido 8 personas. Sin embargo, esta última explicación contrasta con las primeras acciones realizadas por los miembros de la pareja que parecían gobernadas por eliminar un exceso.

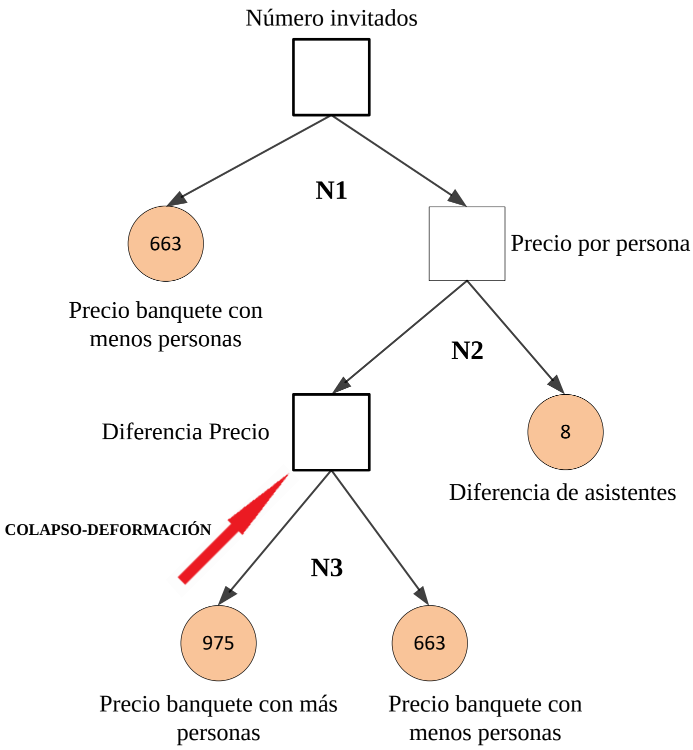


Figura 5.32.

19. Claudia: ¿No?
20. Natalia: No, pero es que eso sería el coste y quiere decir cuántos invitados. A ver si es… ¿Habíamos probado 975 menos 663? (señala la operación con el cursor)
21. (Claudia niega con la cabeza.)
22. (Natalia introduce [975-663; Dp=312].)

Natalia (ítem 20) recupera el esquema empleado en el primer intento (ítems 7-15) y propone una operación correcta. Su razonamiento se apoya sobre una verbalización no centrada en el N3 (“eso sería el coste y quiere decir cuántos invitados”). Es interesante resaltar que Claudia (ítem 21) se opone a la propuesta de su compañera. En definitiva, identifica correctamente una relación entre tres cantidades *Ctm*=*Ct*+*Dp* correspondiente a un esquema conceptual de cambio que le permite hallar la “diferencia de precio entre los dos banquetes (*Dp*=312)”.

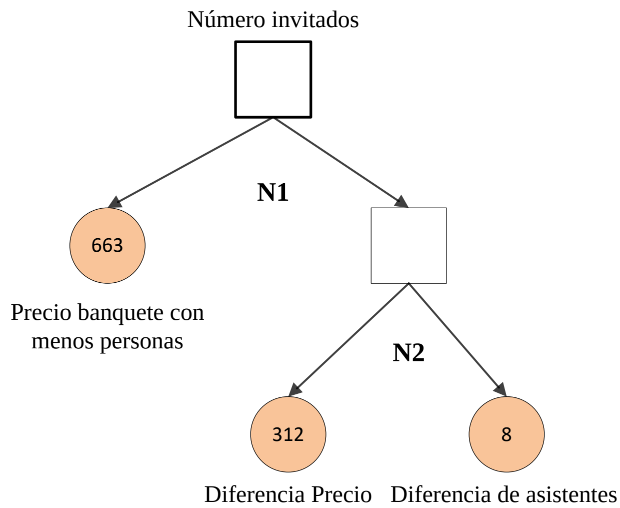


Figura 5.33.

23. Claudia: Sí (lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades).312 es la “diferencia de precio entre los dos banquetes”.
24. Natalia: Vale. (Lee la pregunta del problema en voz baja) “¿Cuántas personas asistieron al banquete?”. (inaudible) Porque ya hemos… a ver. Hemos calculado… si asistieran 8 personas más.
25. Claudia: Entonces…
26. Natalia: Ahora creo que sí que sería dividirlo entre 8.
27. Claudia: ¿Seguro? (introduce [312/…; …])
28. Natalia: No sé. Creo que sí.
29. (Claudia introduce [312/8; Pm=39].)

Claudia (ítem 23) lee el nombre asignado por HINTS a la nueva cantidad representada en la tabla de cantidades. Natalia (ítem 24) lee la pregunta del problema en lo que parece un intento de actualizar el plan a la luz de la nueva cantidad obtenida y propone dividir 312 entre 8 (ítem 26). Identifica correctamente la relación $Dp=Pm\cdot Pa$ (isomorfismo de medidas de división partitiva) que permite hallar el “precio del menú de una persona (*Pm*)”. Claudia (ítem 23, 25 y 26) tiene dificultades para integrar la cantidad recientemente determinada en el plan de resolución. De hecho, contrasta su reticencia a efectuar la división (ítem 27) entre 8, cuando ella había propuesto esa operación de manera incorrecta previamente. De todo esto parece deducirse que Claudia podría haber interpretado en todo momento el valor 8 como el número de invitados en una de las dos situaciones y no como la diferencia del número de invitados entre ambas situaciones. Esto restaría validez a la interpretación del error del ítem 18 centrada en la deformación y colapso como consecuencia del nivel de profundidad del análisis.

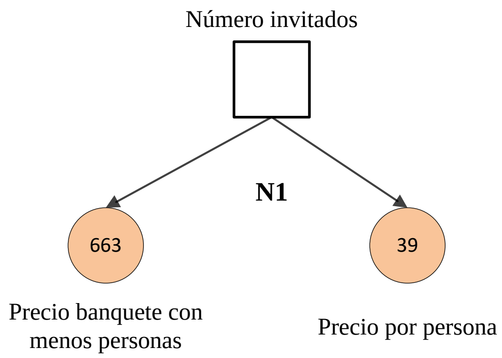


Figura 5.34.

30. Claudia: Sí (lee la etiqueta del nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) "39, precio del menú de una persona". Entonces, 663 euros divididos entre 39. No, mentira.
31. Natalia: Espera, espera.
32. Claudia: (Lee parte del enunciado del problema) "el precio total del banquete es de 663 euros". Y cada persona paga 39 euros, entonces, 663 dividido entre 39 para saber las personas (introduce [663…; …]).
33. Natalia: ¿Pero esos eran las personas del primero? Sí vale. Entonces creo que sí.
34. (Claudia introduce [663/39; P=17].) (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente).

Claudia (ítem 30) vuelve a leer el nuevo dato representado en la tabla de cantidades e identifica una relación entre tres cantidades. Así, propone dividir 663 entre 39, lo que parece señalar que es capaz de integrar la nueva cantidad en el análisis. Sin embargo, al final parece dudar y decide no introducir la operación. Claudia (ítem 32) relee el enunciado e insiste en plantear la relación anteriormente verbalizada: dividir 663 entre 39 para averiguar las "personas que asistieron al bautizo (*P*)". Parece que la relectura del enunciado y de las cantidades desconocidas determinadas permite a Claudia proponer la relación correcta para el N1.

Las intervenciones de Natalia (ítems 31 y 33) ponen de manifiesto que tiene dificultades para hacer una integración automática de la nueva situación, aun cuando era ella la que estaba llevando adelante el plan. Esto se puede interpretar como una dificultad para mantener a nivel mental el análisis completo o, sencillamente, podría señalar que en ningún caso se realizó un análisis completo de manera explícita.

No obstante, Natalia (ítem 33), y tras la vacilación inicial, da por buena la operación propuesta por Claudia. Como consecuencia, identifican correctamente la relación $Ct=Pm{\cdot}P$ resultado de aplicar un esquema de isomorfismo de medidas de división cuotitiva para hallar "el número de personas (*P*)".

El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización de la resolución del problema para la que las estudiantes han seguido la L1.

5.4.2.3 El caso de la pareja Claudia-Natalia en el problema "Los Billetes"

Ayer fui al banco y saqué 13 billetes y hoy he sacado 9. Si todos los billetes eran de 5 euros, ¿cuánto dinero he sacado del banco en total

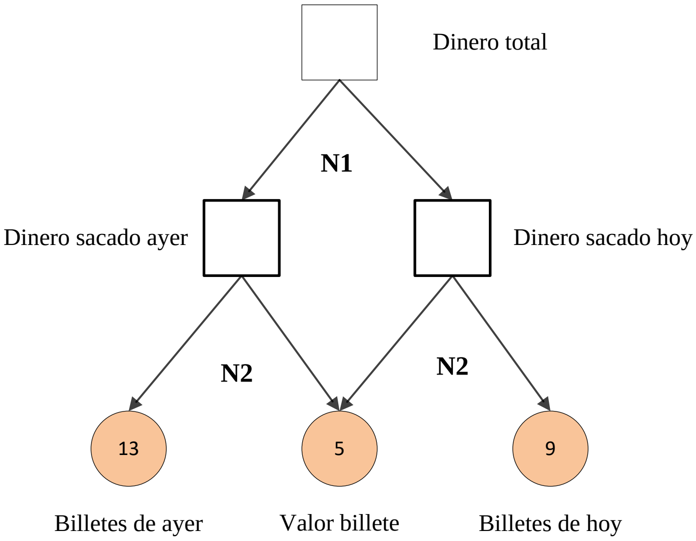


Figura 5.35.

1. (Natalia lee el enunciado del problema.)
2. Claudia: 13 billetes…(inaudible)
3. Natalia: Espera, espera. 13 por 5.
4. Claudia: No. (Vuelve a leer de nuevo el problema en voz baja) "Cuánto dinero ha sacado hoy". ¡Ah! en total, en total. 13 por 5 (introduce [13·5; Da=65]).

Tras leer el enunciado, Natalia (ítem 3) propone multiplicar 13 por 5, lo que supone aplicar un esquema de isomorfismo de medidas en el N2, pero Claudia se opone (ítem 4). Claudia prefiere volver a leer el enunciado del problema. Al leer la pregunta del enunciado, concluye que se pregunta por un total y da por buena la relación propuesta por Natalia. Introduce la expresión 13 por 5, materializando la relación *Da=Nba·Vb* y averiguando el valor la cantidad de "dinero sacado ayer (*Da*)".

5. Natalia: Y ahora…
6. Claudia: 13 por 9.
7. Natalia: Sí. Nooo.
8. Claudia: ¡Ay! mentira.
9. Natalia: Y 9 por 5.
10. Claudia: 5 por 9. Bueno es lo mismo (introduce [9·5; Dh=45]).

Ahora Claudia (ítem 6) propone multiplicar 13 por 9. Inmediatamente Natalia (ítem 7) y Claudia (ítem 8) rectifican. Es posible que el error de Claudia simplemente se deba a no haber confundido la asignación de valor a las cantidades conocidas ya que lo que sí que tenía claro era la necesidad de aplicar un isomorfismo de medidas de tipo multiplicación. Natalia (ítem 9) propone multiplicar 9 por 5, lo que supone materializar correctamente la relación $Dh=Nbh \cdot Vb$ para averiguar el "dinero sacado hoy (Dh)".

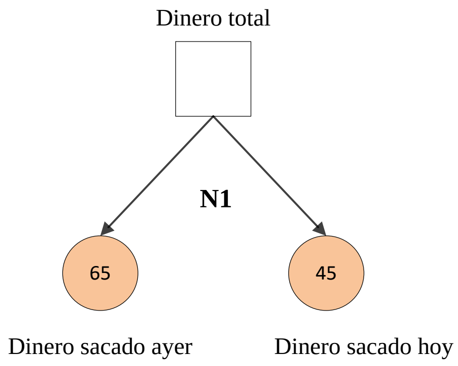


Figura 5.36.

11. Claudia: Y ahora lo sumas…
12. Natalia: ...sí…
13. Claudia: …para el precio total.
14. (Natalia introduce [65+45; D=110].)
15. (El sistema da la operación como correcta e indica la finalización del problema correctamente.)

Claudia (ítem 11) identifica correctamente la última relación para hallar lo que ella llama el precio total (ítem 13) y propone sumar 65 más 45. Esto supone un acierto en la aplicación de un esquema de cambio mediante la relación $D=Da+Dh$ que permite averiguar D.
El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema con la L1.
Creemos que es interesante apuntar que en el post test Natalia no había seguido esta lectura del problema sino una lectura menos usual (L2) donde aplicó correctamente primero el esquema de cambio , pero no aplicó correctamente el isomorfismo de medidas final ya que realizó una división partitiva.

5.4.2.4 El caso de la pareja Claudia-Natalia en el problema "La Empresa"

Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000 €. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

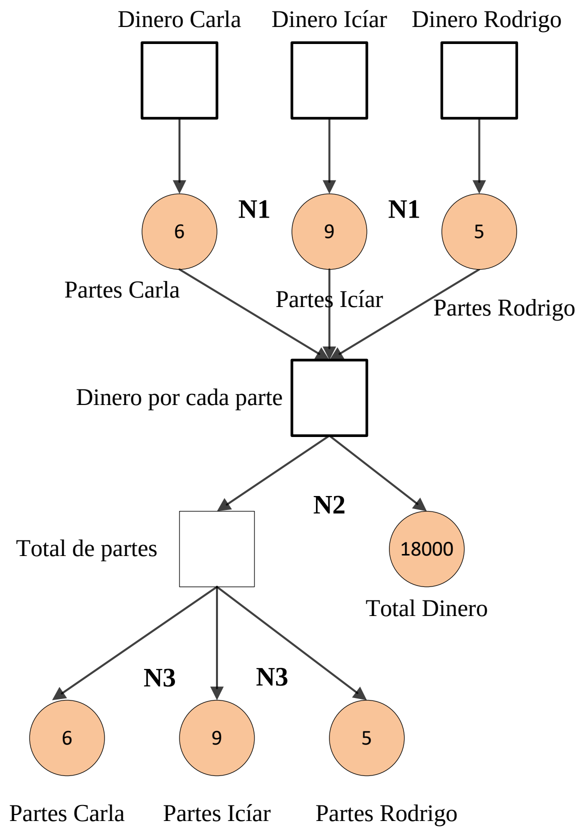


Figura 5.37.

1. (Claudia lee el enunciado del problema.)
2. Claudia: Este nunca me salía a mí. A ver 18000 euros…
3. Natalia: Espera, espera.
4. Claudia: ¿Sería 18 000 dividido entre 6? No. Es primero sumar 6 más 9 más 5.
5. Natalia: Sí, así más o menos ya lo tendrías todo.
6. (Claudia introduce [6+9+5; P=20].)

Tras leer el enunciado, Claudia manifiesta sus dificultades a la hora de abordar el problema (ítem 2). Sin embargo, en el ítem 4, Claudia tras aplicar inicialmente un esquema de isomorfismo de medidas “Sería 18 000 dividido entre 6”, cambia de opinión y aplica correctamente un esquema de combinación para calcular el total de partes. Aunque Natalia resolvió este problema en el post test aplicando inicialmente y de manera incorrecta un esquema de isomorfismo de medidas, no muestra resistencia (ítem 5). En definitiva, Claudia ha identificado correctamente un esquema de combinación donde las partes son conocidas y el total desconocido y establece la relación $P=Pc+Pi+Pr$ en el N3 de análisis.

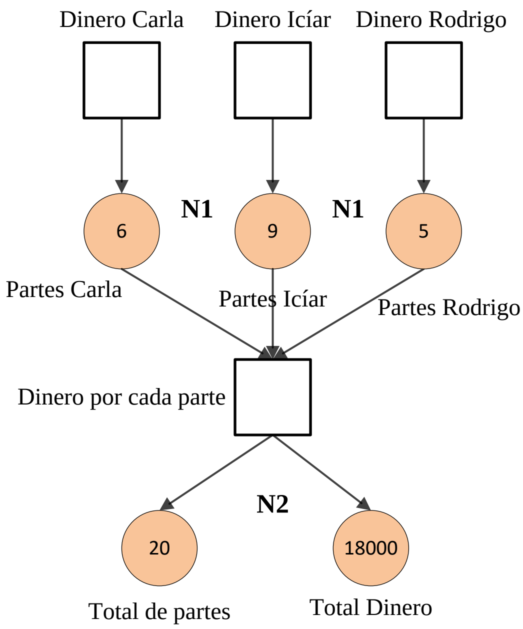


Figura 5.38.

7. Claudia: (Lee la etiqueta del nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) 20, total de partes entre los tres.
8. Natalia: Y ahora sería 18000 dividido entre 20.
9. Claudia: Sí (introduce [18000/20; Dp=900]).

Claudia (ítem 7) lee la cantidad que acaban de determinar en la tabla de cantidades. Natalia (ítem 8) propone dividir 18000 entre 20. Esto supone considerar la relación correcta de isomorfismo de medida de división partitiva $D=Dp·P$ para calcular “el dinero que le toca a una parte (Dp)”.

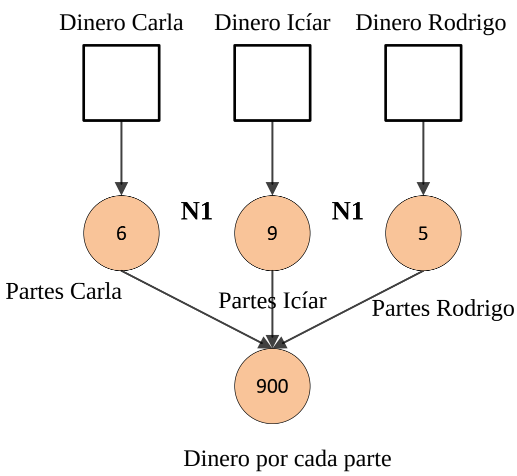


Figura 5.39.

10. Claudia: (Lee el nuevo dato en la tabla de cantidades) “900, dinero que le toca a una parte” … Vale.

Claudia (ítem 10) lee la cantidad recientemente determinada y que el sistema ha representado en la tabla de cantidades. Natalia (ítem 11) llama la

11. Natalia: Espera. Mira. Fíjate en la primera frase (señala la primera frase del enunciado en la pantalla).
12. Claudia: (Lee la frase) “Carla, Rodrigo e Itziar son propietarios de una empresa que este año ha ganado…”
13. Natalia: ¡Este año! Podría ser algo así.
14. Claudia: Este año…
15. Natalia: Pero saldría la cifra ahí.
16. Claudia: (Sigue leyendo el problema) Ya. Pues… “ha ganado 18000 euros y deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes a Icíar 9 partes y a Rodrigo 5”.
17. Natalia: ¿Pedimos ayuda?
18. Claudia: Vale.
19. (Natalia pide ayuda al sistema)
20. Claudia: (Lee en voz baja la ayuda) “puedes calcular el dinero que le corresponde a Rodrigo”.
21. Claudia: A Rodrigo… 5 partes.
22. Natalia: 900 dividido entre 5 (introduce [900/5; mensaje de error]).

atención de Claudia sobre la primera frase del enunciado enfatizando las palabras “este año” (ítem 13). Claudia (ítem 16) sigue leyendo el enunciado del problema. Parece que en este momento las alumnas no saben qué hacer por lo que Natalia (ítem 17) pregunta a Claudia si solicitan una ayuda a lo que Claudia (ítem 18) da el visto bueno. El sistema proporciona el primer nivel de ayuda que Claudia lee en voz baja (ítem 20). Esta ayuda solo establece que existe una relación entre el “dinero que le corresponde a Rodrigo”, el “número de partes que le corresponden a Rodrigo” y el “dinero que corresponde a cada parte”. Natalia (ítem 22) establece una relación entre estas tres cantidades, pero plantea dividir 900 entre 5 en lugar de multiplicar. El sistema responde con un mensaje de error (ítem 22) al que por el tiempo que está abierta la ventana parece que las estudiantes no prestan atención. Han aplicado un esquema de isomorfismo de medidas, pero no han interpretado correctamente el papel de cada cantidad, relacionando incorrectamente las cantidades que intervienen en la relación $Dc=Dp \cdot Pr$. Probablemente han centrado su atención en la palabra “repartir” y en su significado típico de división. Esta misma estrategia fue la utilizada por Claudia para intentar acabar el problema en el post test.

23. Natalia: ¡Uy! ¿no? A ver, espera.
24. Claudia: Es que yo había pensado…
25. Natalia: ¡¡Ahhh!! 900, no, (Claudia introduce [900…; …]) entonces no sería…
26. Claudia: Había pensado yo esto (introduce [900-5…; …]).
27. Natalia: No sé, prueba a ver.
28. (Claudia introduce [900-5; mensaje de error].)

Claudia (ítem 24 y 26) persiste en utilizar las cantidades 900 y 5 proporcionadas por la ayuda y propone restarlas. El sistema responde con un mensaje de error (ítem 28). Posiblemente, detrás de la elección de la operación resta se encontraría nuevamente la idea de reparto y de la disminución habitual de la cantidad que se reparte. Para las estudiantes no parece significativo el hecho de que las cantidades restadas no son de una misma magnitud.

29. Natalia: ¿Y si es multiplicar?

Tras este error, Natalia propone sin demasiado convencimiento si habría que multiplicarlas, mientras Claudia (ítem 30)

30. Claudia: Espera, no vamos a probar. Pensemos. A ver.
31. Claudia: (Vuelve a leer el problema) En total son 20 partes y el dinero que le toca a una parte son de 900 euros.
32. Natalia: Yo creo que sí que sería 900 por 5 ¿no? ¿o pedimos más ayuda?
33. Claudia: Es que yo pienso que es esto señala el botón 900 con su etiqueta e introduce [900-20…; …]) porque 900 que es el dinero menos 20 que son todas las partes (introduce [900-20; mensaje de error]).

indica a Natalia que piensen y no realicen probaturas sin más. Esto podría confirmar que Claudia espera obtener un resultado más pequeño a 900 euros como correspondería si estos se repartieran. De igual modo, podría considerarse que Natalia se limita a combinar las cantidades ofrecidas en la ayuda, en lo que podría interpretarse como un episodio de *gaming the system*. Sin embargo, Natalia, tras la relectura del enunciado, insiste en multiplicar, pero de forma no rotunda (ítem 32). Claudia propone (ítem 33) restar 900 menos 20, lo que reforzaría la explicación de que ha centrado la atención en el hecho de que se realiza un reparto. Podríamos concluir que Claudia no considera las magnitudes de las cantidades que pone en juego, ya que está proponiendo relaciones aditivas con cantidades de distinta naturaleza.

34. Natalia: A ver. Voy a probar a ver si es así (introduce [900·5…; …]).
35. Claudia: Es que no.
36. (Natalia introduce [900·5; Dr=4500].)
37. Claudia: Pues sí. Y yo diciendo que no. Que tonta soy (Lee el nuevo dato en la tabla de cantidades) “4500, el dinero que le corresponde a Rodrigo”. Pues igual en todas ¿no?
38. Natalia: Espera a ver. Por si acaso. (Claudia introduce [900…; …]).
39. Claudia: Ahora 9000 por 9.
40. Natalia: ¿9000?
41. Claudia: ¡Ayyy! 900 por 9.
42. Natalia: Espera, 900, dinero que le toca a una parte. ¡Ahhh! Sí (Claudia introduce [900·…; …]). Así sabríamos las partes que tiene Itziar (Claudia introduce [900·9; Di=8100]).
43. Natalia: Ahora nos toca a Carla que tiene 6.
44. (Claudia introduce [900·6; Dc=5400].)

Al final Natalia (ítem 34) decide establecer la relación que había propuesto anteriormente y multiplica 900 por 5 lo que supone un uso correcto de la relación $Dr=Dp\cdot Pr$ correspondiente a un esquema de isomorfismo de medidas. Claudia (ítem 37) lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades e identifica y propone seguir el mismo patrón que con la relación anterior para determinar las cantidades desconocidas restantes.

Claudia (ítem 41) recurre a otro esquema de isomorfismo de medidas multiplicativo entre 900 y 9 para averiguar lo que le corresponde a Icíar (lo que supone establecer la relación $Di=Dp\cdot Pi$) mientras que Natalia (ítem 43) identifica correctamente la última relación entre tres cantidades y propone multiplicar 900 por 6 para averiguar el “dinero que le toca a Carla (*Dc*)”usando la relación $Dc=Dp\cdot Pc$.

El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema. La pareja ha resuelto el problema siguiendo la L1.

45. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente).

5.4.2.5 El caso de la pareja Claudia-Natalia en el problema "El Pienso"

Un granjero gasta diariamente 15 kilos de pienso para gallinas y 120 kilos de pienso para vacas. El kilo de pienso para gallinas cuesta 2 € y el de pienso para vacas, 5 €. Si en un año solo puede gastar 250.000 euros. ¿Cuánto dinero le sobra?

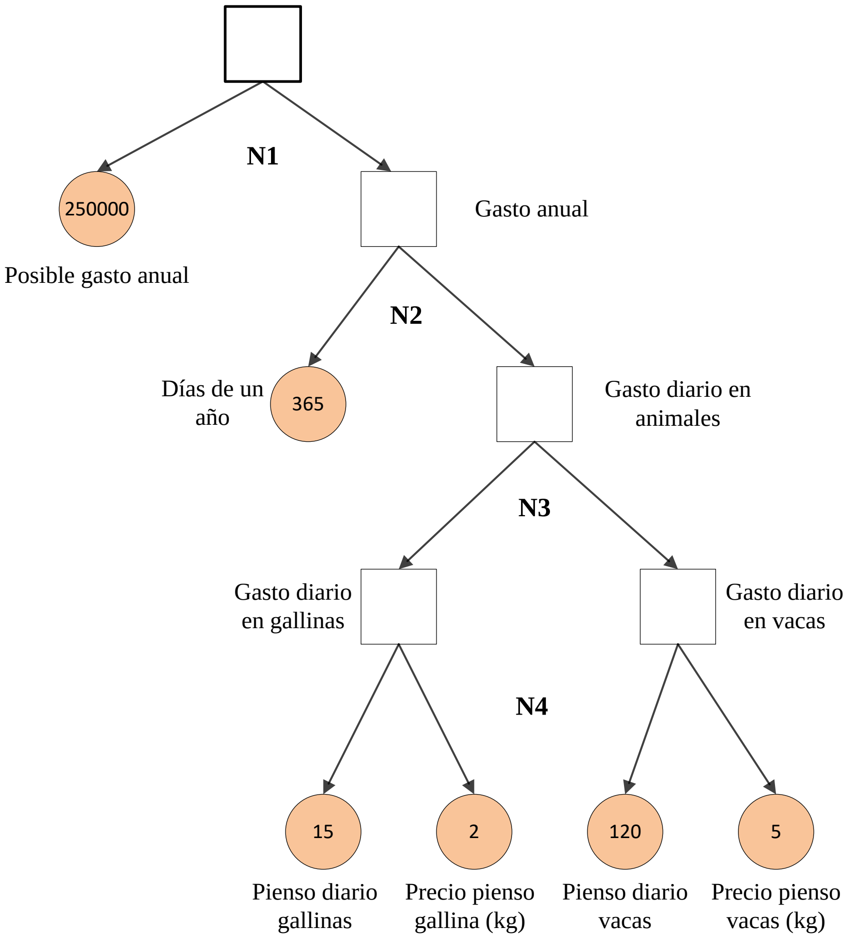


Figura 5.40.

1. (Natalia lee el enunciado del problema)
2. Claudia: A ver. 15 kilos… 15 por 2.
3. Natalia: Vale. Eso primero (introduce [15·2…; …]).
4. Claudia: No, espera. No, no, no.
5. Natalia: Está bien.
6. Claudia: ¡Ahh! Sí. Vale.
7. (Natalia introduce [15·2; Pdg=30].)

Tras leer el enunciado, Claudia (ítem 2) propone multiplicar 15 por 2. Esto supone aplicar correctamente un esquema de isomorfismo de medidas para materializar la relación *Pdg=Kg·Pug*, que le permitirá averiguar "el dinero gastado en pienso para gallinas en un día (*Pdg*)". Sin embargo, Claudia (ítem 4) se arrepiente de haber propuesto esta operación. Natalia confirma su propuesta inicial (ítem 5) y esto parece tranquilizarla (ítem 6).

8. Claudia: (Lee el dato obtenido en la tabla de cantidades) “30, dinero gastado para… en un día”.
9. Natalia: 120 por 5, porque eso son los euros.
10. Claudia: Sí.
11. (Natalia introduce [120·5; Pdv=600].)

Claudia (ítem 8) lee el nombre asignado a la cantidad que acaban de calcular y Natalia (ítem 9) propone de nuevo otra operación apoyada en un isomorfismo de medidas equivalente al anterior, pero utilizando las cantidades correspondientes a las vacas. De esta forma consigue averiguar “el dinero gastado en pienso para vacas en un día (*Pdv*)” usando la relación *Pdv=Kv·Puv*.. Ninguna de las dos alumnas tuvo problemas para identificar estos dos isomorfismos multiplicativos en el post test y por tanto han aplicado correctamente las dos relaciones propias del N4.

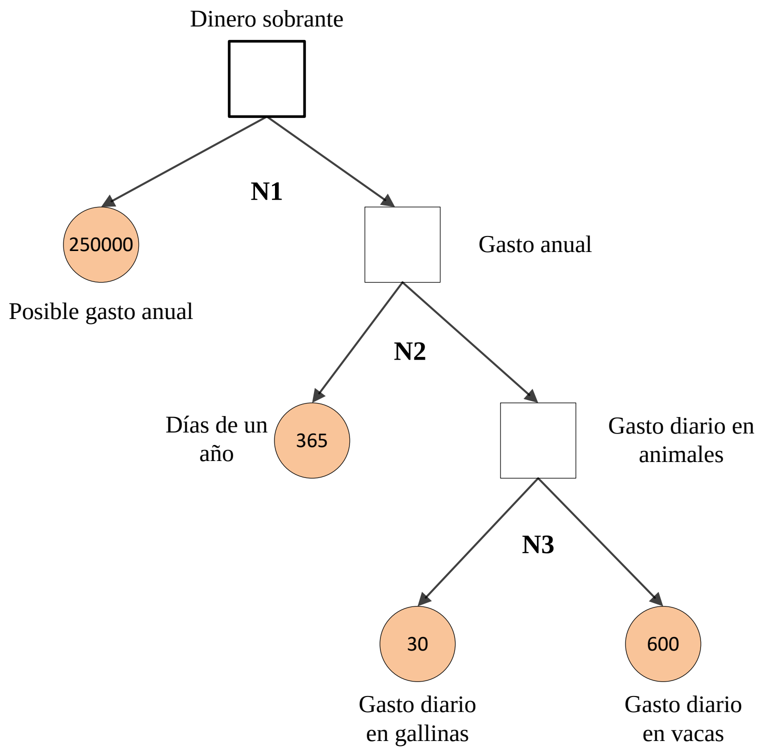


Figura 5.41.

12. Claudia: Ahora lo sumas para saber cuánto dinero se ha gastado en total.
13. Natalia: Espera. Y luego…, espera, a ver.
14. Claudia: 600 más 30.

Claudia (ítem 12) identifica correctamente la relación que se deriva del esquema de combinación y propone sumar 600 más 30 para averiguar cuánto dinero se gasta en total. Aunque Natalia al principio duda (ítem 13), acepta la propuesta. En definitiva, han aplicado la

15. Natalia: Sí (introduce [600+30; Pdc=630]).

relación *Pdc=Pdv+Pdg* correspondiente a un esquema conceptual de combinación.
Este esquema también lo habían aplicado correctamente en el post test y se corresponde a una lectura diferente a la que habían utilizado la pareja de Andreu y Julia anteriormente. Claudia y Natalia están utilizando el análisis descrito en la lectura L1 del problema donde se averigua el "gasto diario en pienso de todos los animales" mientras que Julia y Andreu utilizaron sus primeros cálculos en averiguar el gasto anual en pienso de cada uno de los animales sin pasar por el gasto conjunto al día y que se corresponde con la lectura L2 del problema.

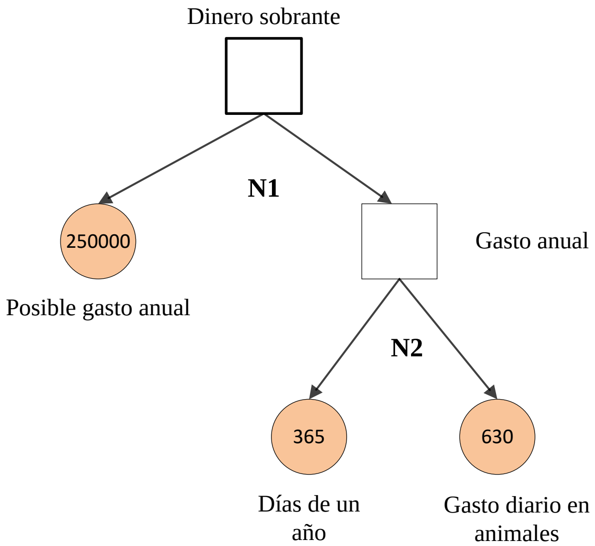


Figura 5.42.

16. Claudia: (Lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) "Dinero que se ha gastado en un día"
17. Natalia: Entonces en un año que tiene 365 días (señala con el cursor el botón con el dato 365 con su mensaje "días de un año"), multiplicamos ¿no?
18. Claudia: Solo puede gastar 250 euros.
19. Natalia: Pero esta cifra (señala el 630 de la tabla de cantidades) sería para un día.

Claudia (ítem 16) lee el nombre de la cantidad que acaban de determinar en la tabla de cantidades. A continuación, Natalia (ítem 17) identifica que ahora tiene que averiguar el gasto en un año (señalando el dato) y propone multiplicar 630 por 365. Esto supone aplicar la relación *Pac=Pdc·Da* consecuencia de aplicar un esquema de isomorfismo de medidas multiplicativo para hallar "el dinero gastado en un año en comida para los animales (*Pac*)".

20. Claudia: Sí.
21. Natalia: Pues entonces multiplicarlo…
22. Claudia: Y en el año solo puede gastar 250.
23. Natalia: Vale, creo que ya sé lo que hay que hacer… tenemos que hacer…630 multiplicarlo por 365 porque 365 tiene un año y si eso lo ha gastado en un día nos saldrá la cifra ¿no? ¿Pruebo a ver?
24. Claudia: Vale.
25. Natalia: (introduce [630·365; Pac=229950].) Sí

Las dos alumnas no realizaron esta operación en el post test. Posiblemente esto fue debido a que no aparecía explícitamente el dato 365 en el enunciado. En este caso, aunque el valor tampoco se ofrece en el enunciado, sí que aparece precargado el botón con dicha cantidad.

Durante la exposición del razonamiento anterior, Claudia insiste en dos ocasiones (ítems 18 y 22) que solo puede gastar "250". Es posible que ya esté pensando en la siguiente relación, en el N1, que le permitirá finalizar el problema, pero también es posible que no dude en qué momento debe realizarse la resta.

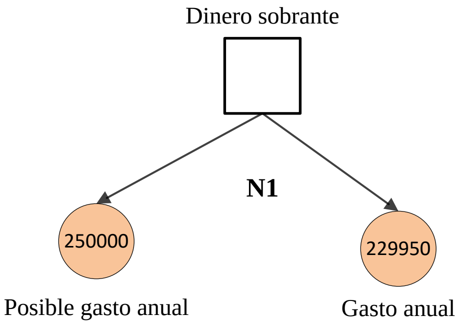


Figura 5.43.

26. Claudia: (Lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) "dinero que ha gastado en un año en comida para los animales". Pues ahora, eso menos 250 para saber cuánto le sube.
27. Natalia: Sí porque… (introduce [229950-250000…; …]).
28. Claudia: Espera, espera, es al revés.
29. Natalia: No, está bien. ¡Ahhh! no, sí (borra lo introducido anteriormente e introduce [250000-229950; Ds=20050]).
30. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente).

Una vez más Claudia (ítem 26) lee el nombre de la cantidad recién calculada en la tabla de cantidades y propone restar 229950 menos 250000 lo que supone materializar correctamente un esquema de cambio en la relación $Dt=Pac+Ds$ para averiguar cuánto dinero le sobra (Ds). Natalia introduce al revés la operación propuesta (ítem 27), pero Claudia (ítem 28) se da cuenta y ofrece a Natalia rectificar. Al principio, Natalia (ítem 29) es reacia, lo que indicaría que no era un despiste, pero, inmediatamente, se da cuenta y accede.

El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema con la L1.

5.4.3. LA PAREJA CÉSAR-NEREA. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON HINTS.

5.4.3.1 El caso de la pareja César-Nerea en el problema "Las Pelotas de tenis".

En un club de tenis tienen dos carros con 105 y 287 pelotas, respectivamente. Las van a poner en botes de 7 pelotas para utilizarlas en un torneo. ¿Cuántos botes serán necesarios?

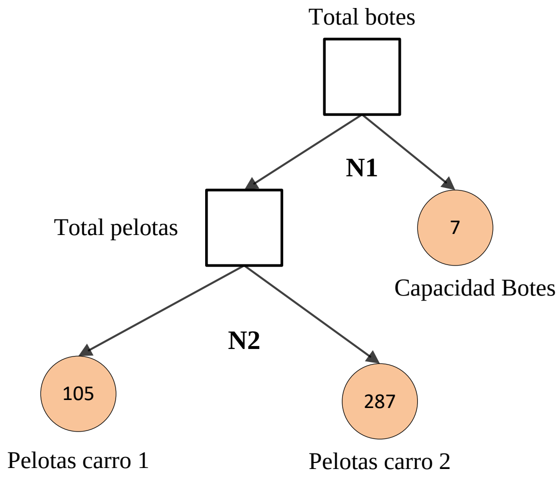


Figura 5.44.

1. (César lee el enunciado del problema.)
2. Nerea: (Inaudible) (señala con el dedo la palabra necesarios en el enunciado y el botón 105.)
3. César: Una multiplicación entre 105 por los 7 (Nerea asiente con la cabeza y César introduce [105·7; mensaje de error]).

Tras leer el enunciado César (ítem 3) y tras unas señas de Nerea (ítem 2) propone multiplicar 105 por 7. Es decir, propone $Pp \cdot Pb$. El sistema ofrece un mensaje de error (ítem 3).
Parece que ha identificado la relación $Pp=Bp \cdot Pb$ exclusiva de la lectura L2 y propia de un esquema conceptual de isomorfismo de medidas. Sin embargo, para hallar la cantidad *Bp*, la única desconocida en la relación, se necesitaría realizar una división cuotitiva entre las cantidades *Pp* y *Pb*. El hecho de que tras verbalización introduzca él mismo la operación sugiere que no se trata sólo de un despiste, sino que tiene su origen en el proceso de conversión del texto a la relación entre cantidades o en el paso de la relación entre cantidades a una operación matemática.

4. Nerea: Yo lo sé. Yo creo…
5. César: En voz alta ¿eh?
6. Nerea: Sí…105… (introduce [105+287…; …])
7. César: …105 más 285...

Nerea (ítem 6) propone sumar 105 más 287. Es decir, plantea una operación que supondría considerar la relación correcta $P=Pp+Pg$ para calcular *P*. En consecuencia, Nerea abandona la línea de resolución L2 que había propuesto César

8. (Nerea pulsa aceptar [105+287; P=392].)
9. Nerea: Ves.

hacia un esquema conceptual de combinación e inicia la resolución siguiendo L1 y realizando el primer proceso de síntesis en el N2.

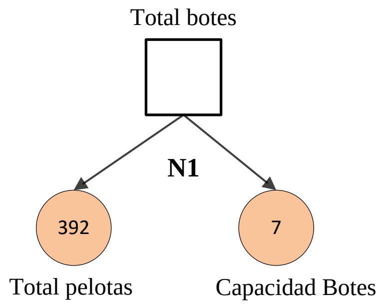


Figura 5.45.

10. César: Y el resultado (introduce [392/…; ...]) habrá que dividirlo o multiplicarlo (señala con el cursor los botones de dividir y multiplicar) entre 5.
11. Nerea: No, entre 7 (señala el botón 7).
12. César: ¡Ayyy! entre 7. Yo creo que es una división para repartir entre las pelotas dividido entre los 7 botes (introduce [392/7…; …]) y nos daría, creo, que el cálculo (introduce [392/7; B=56]).
13. (El sistema da como correcta la última operación e indica la finalización del problema correctamente.)

César (ítem 10) comienza a introducir la expresión “392/”. Sin embargo, manifiesta duda entre si hay que dividir o multiplicar. Nuevamente ha sido capaz de identificar una relación entre cantidades ligada a un isomorfismo de medidas. Sin embargo, a diferencia del ítem 3, y tras la consideración de Nerea (ítem 11), César propone (ítem 12), de manera correcta, una división.
Posiblemente el mensaje de error anterior le ha llevado a dudar entre multiplicar o dividir. Además, propone multiplicar o dividir el total de pelotas (392) entre un dato que no existe en el problema (ítem 10).
Por tanto, plantea correctamente la relación $P=Pb \cdot B$ (isomorfismo de medidas de división cuotitiva) en la L1 del problema.
El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema con la L1.

5.4.3.2 El caso de la pareja César-Nerea en el problema “El Mayorista”.

Un mayorista compra en un matadero 55 corderos a 46 euros cada uno. Vende a un restaurante 33 a 65 euros cada uno y el resto a un supermercado por 58 euros cada uno. ¿Qué beneficio obtuvo?

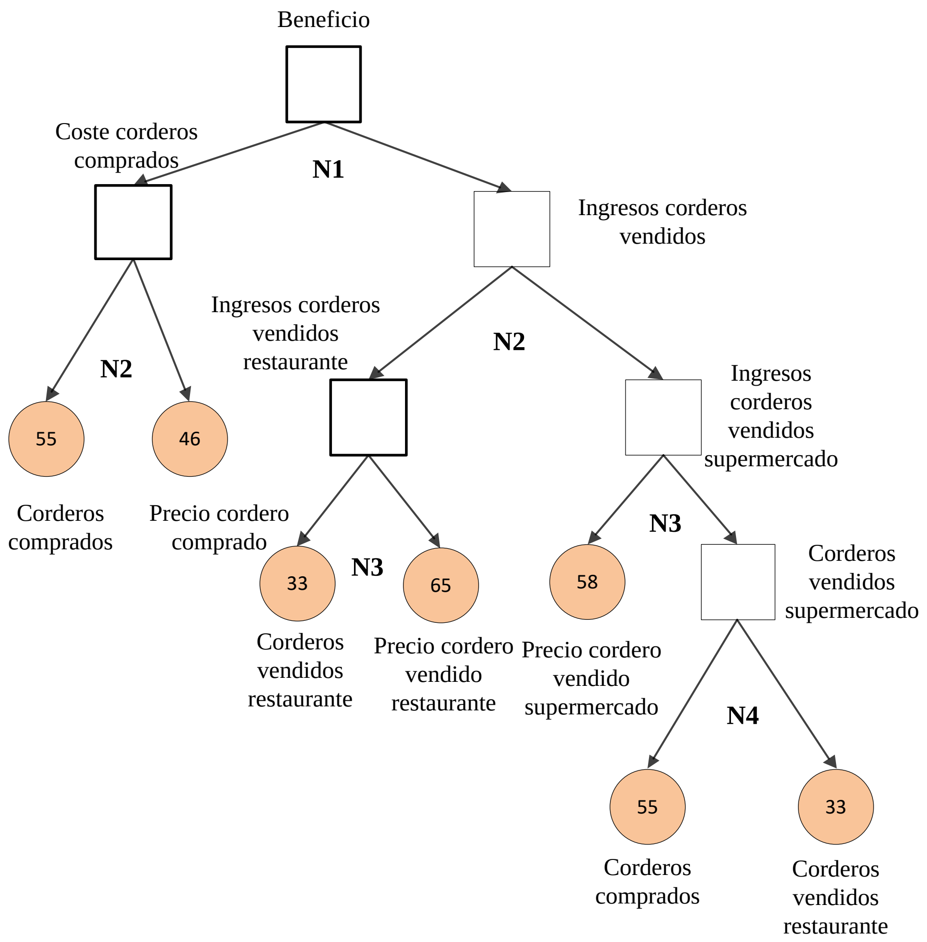


Figura 5.46.

1. (Nerea lee el enunciado del problema)
2. Nerea: Vale. Pues multiplicar los 55 corderos (introduce [55…; …]).
3. César: … por…
4. Nerea: …por… (introduce [55·…; …]).
5. César: …por lo que ha cobrado.
6. Nerea: ¡No!, los 46 euros.
7. Nerea y César: …por los 46 euros.
8. (Nerea introduce [55·46; Pcm=2530].)

Tras leer el enunciado Nerea (ítem 1-7) propone multiplicar 55 por 46. Es decir, propone *Ncm·Pucm*. Parece que ha identificado correctamente un esquema conceptual de isomorfismo de medida 1 que permite averiguar el precio que paga el mayorista por todos los corderos. Es decir, identifica correctamente la relación *Pcm=Ncm·Pucm*. Sin embargo, César había propuesto multiplicar 55 por lo que había cobrado el mayorista (ítem 5). No sabemos si es un error de verbalización o que realmente había relacionado 55 con otra cantidad que indicase el precio de venta de los corderos (*Pucr* o *Pucs*). En el Post, César identifico correctamente esta relación por lo que pensamos que ha sido un error de verbalización. De todos modos, cuando Nerea le indica cual es la cantidad que hay que relacionar con 55

9. César: Y te daría el primer resultado. Y después, 33 (señala con el cursor el botón 33 cuya etiqueta se despliega) y con que vendió a un restaurante (introduce [33…; …]) por (introduce [33·…; …]) los 65 euros (señala el botón 65) ¿no?
10. Nerea: Sí, sí.
11. (César introduce [6533·…; …].)
12. Nerea: ¿Uy?
13. César: Me ha salido…
14. (Al introducir mal la operación anterior, César decide borrarla y empezar de nuevo.)
15. César: 33 (introduce [33…; …]) por (introduce [33·…; …]) …
16. Nerea y César: …65 (César introduce [33·65; Pcr=2145]).

(ítem 6), César verbaliza, correctamente, el dato 46 (ítem 7).

Una vez obtenida la nueva cantidad (ítem 8), César (ítem 9) propone aplicar correctamente otro esquema de isomorfismo de medida 1, en este caso relacionado con la venta de los corderos al restaurante y propone multiplicar *Ncr·Pucr*. Parece que ha identificado la relación *Pcr=Ncr·Pucr* en la L1 del problema. Al igual que en el Post, parece ser que no han tenido demasiados problemas para identificar los dos isomorfismos de medidas multiplicativos del N2 y N3 de análisis.

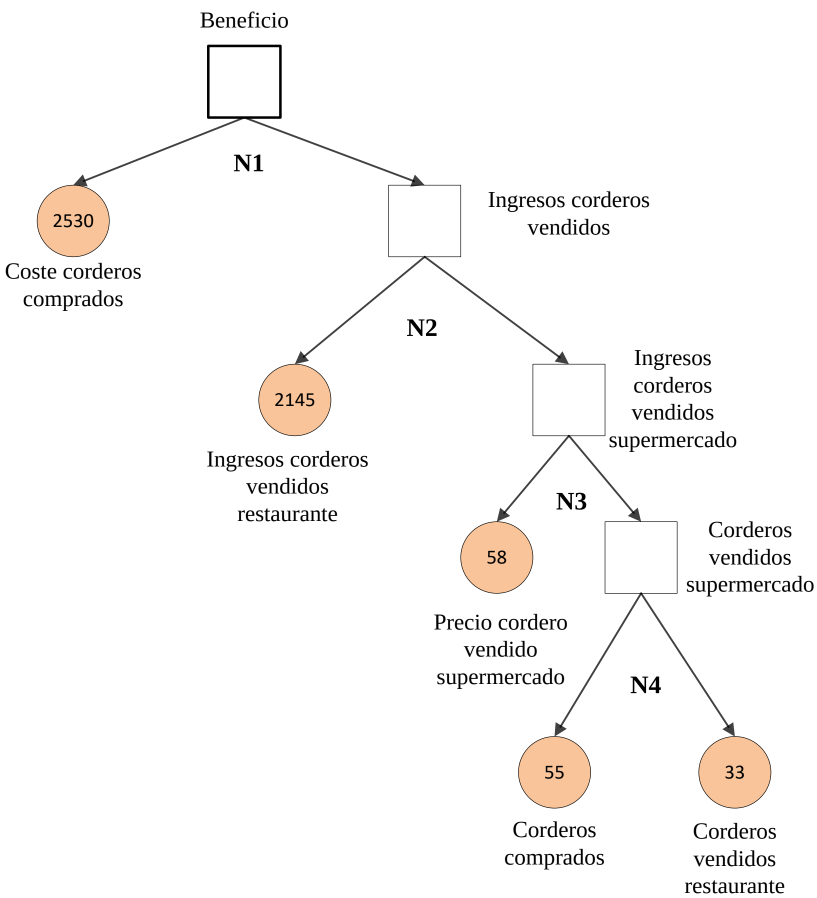


Figura 5.47.

17. César: Y ahora, habrá que sumar las cantidades (señala con el cursor el 2530) para saber cuántos tenía, cuántos ha vendido.

Ahora César (ítem 17) propone, erróneamente, sumar 2530 más 2145. Es decir propone sumar las cantidades *Pcm* y *Pcr*. Estas cantidades solo tienen en común el hecho de ser magnitudes del mismo tipo, pero una cantidad representa un coste y la otra un ingreso (*Pcm*=2530 es "el dinero que paga el mayorista" y *Pcr*=2145 es "el dinero que recibe de la venta de los corderos al restaurante").

18. Nerea: Yo creo que primero esto (señala en la tabla de cantidades el dato 2145) multiplicado entre los 58 (lo señala en el enunciado del problema).

Nerea (ítem 18) propone multiplicar las cantidades 2145 (el ingreso de los corderos vendidos al restaurante) por 58 (precio de cada cordero vendido al supermercado), es decir, *Pcr·Pucs*. Posiblemente Nerea intenta calcular el ingreso de la venta de los corderos al supermercado, pero tiene dificultades para organizar los dos niveles de este análisis provocando una deformación (Figura 5.48) del significado de la cantidad "corderos vendidos al supermercado" por "ingresos de los corderos vendidos al restaurante". Tal vez, el desconocimiento de una de las cantidades necesarias le ha obligado a elegir otra conocida que no tiene sentido en ese esquema.

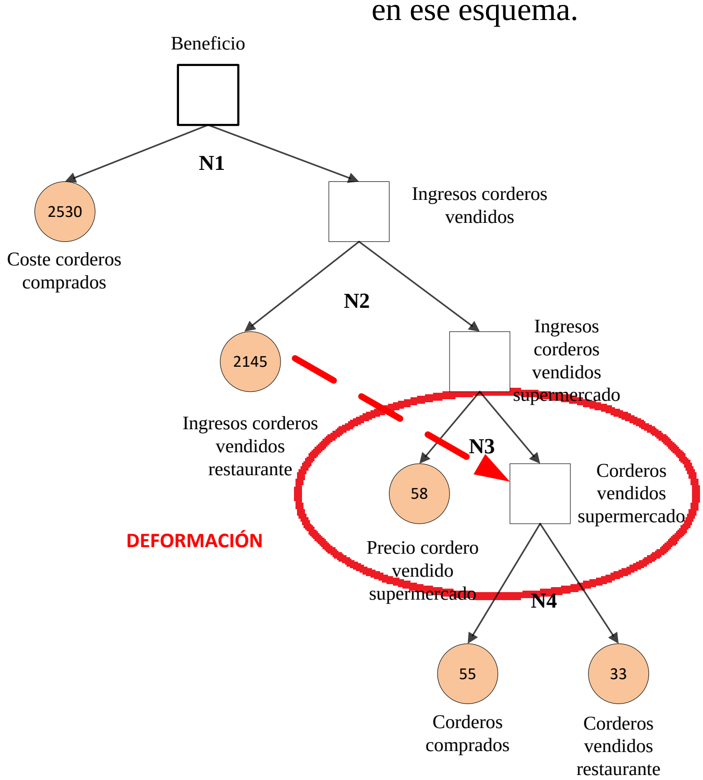


Figura 5.48.

19. César: No porque estos (señala con el cursor el dato 2145 de la tabla de cantidades) los ha vendido, esto (vuelve a señalar el dato anterior) ha sido el dinero que ha recibido en los corderos del supermercado. Ahora tendríamos que averiguar cuántos corderos le sobraron. Por eso sería mejor hacer (introduce [2530...; ...]) todo lo que ha obtenido (introduce [2530+...; ...])…
20. (César señala el 2145.)
21. Nerea: No.
22. César: …los corderos…
23. (Silencio de diez segundos.)
24. (César borra lo que había introducido.)

César (ítem 19) sí que se da cuenta del error y le advierte que *Pcr*=2145 es “el precio recibido por la venta de los corderos al restaurante” e identifica y verbaliza correctamente la cantidad desconocida que se debería determinar (“cuántos corderos le sobraron”). Sin embargo, inicia la introducción de una operación errónea en la que usa el coste de los corderos comprados. Nerea (ítem 21) responde negativamente a esta propuesta y, tras un silencio (ítem 23), César (ítem 24) abandona el intento. César, en el cuestionario Post, sí que calculó, en este punto, el número de corderos vendidos al supermercado.

25. César: A ver, los corderos que se ha gastado (introduce [55+...; ...]) lo sumaríamos todo (introduce [55+33; mensaje de error].)
26. (Nerea niega con la cabeza.)

Tras el silencio, César (ítem 25) propone sumar 55 más 33, es decir, $Ncm+Ncr$. El sistema responde con un mensaje de error que parece que no leen. Parece que César ha encontrado qué dos cantidades se combinan en la relación verbalizada correctamente antes ($Ncm=Ncr+Ncs$) pero, no ha conseguido materializar la relación correctamente.

27. (Silencio de siete segundos.)
28. Nerea: Yo creo que sumar esto (señala 2530 en la tabla de cantidades) y esto (señala 2145 en la tabla de cantidades), pero no tiene sentido.
29. César: (Introduce [2145...; ...]). Esto es el dinero que ha obtenido. No, ¡sí que tiene sentido! (introduce [2145+…; …]) cuánto dinero obtuvo. Sí que tiene sentido (Nerea introduce [2145+2530; …]), cuánto dinero obtuvo. Pero nos faltaría el cordero (Nerea pulsa aceptar [2145+2530; mensaje de error]).

Nerea (ítem 28) propone de nuevo sumar las cantidades 2530 y 2145 obteniendo por respuesta un mensaje de error del sistema. César (ítem 29) parecía de acuerdo y lo justificaba diciendo que tienen que averiguar el dinero que obtuvo el mayorista. Así y todo, manifiesta que le faltan los corderos por lo que parece que se sigue centrando en el esquema correcto de combinación para intentar averiguar “el número de corderos que se venden al supermercado”.

30. Nerea: No.

31. César: Pedimos una pista (pulsa el botón de ayuda).
32. César: (lee la ayuda) “Número de corderos que vendió al supermercado”. El número de corderos que vendió al supermercado fue…han sido 33.
33. Nerea: ¿Y sumar el 58 (señala en el enunciado) y el 33 (señala el botón 33)?
34. César: Hay que averiguar cuánto (señala la palabra supermercado en el enunciado del problema) …
35. Nerea: O sumar 33 (señala el botón 33) más 58 euros (señala 58 en el enunciado).
36. César: No, eso ya lo hemos hecho.

César solicita ayuda (ítem 31). El sistema proporciona una ayuda de nivel 1 (es decir, contiene el nombre de una cantidad desconocida que podría calcularse con los datos disponibles) y la lee (ítem 32). Sin embargo, afirma (ítem 32) que la cantidad que se pide calcular, los corderos que se venden al supermercado, es una cantidad ya conocida y que vale 33. Parece que no se ha percatado de que el 33 son los corderos que se venden al restaurante.

Por su parte, Nerea (ítem 33) propone sumar 58 más 33, es decir *Pucs+Ncr* (ítem 35), pero César se opone diciendo que ya lo han hecho (ítem 36). César parece que confunde la relación propuesta por Nerea con otra planteada anteriormente que era 55+33. En su propuesta, Nerea comete el error de relacionar aditivamente dos cantidades de distinta naturaleza (dinero por cordero y corderos).

La pareja no parece capaz ni de articular análisis a partir de cantidades de la misma naturaleza y, por supuesto, no han realizado un análisis completo del problema.

37. Nerea: O multiplicarlo.
38. César: 33…
39. Nerea: Pues multiplicarlo.
40. César: … 33 (introduce [33…; …]) por 58 (introduce [33·58; …]) ¿o será dividirlo?
41. (Nerea se encoge de hombros y niega con la cabeza.)
42. (Al apretar aceptar [33·58; mensaje de error].)

Nerea propone (ítem 37) multiplicar 33 por 58 mientras que César se pregunta si será dividirlas (ítem 40). Los alumnos introducen la multiplicación (ítem 42) y el sistema contesta con un mensaje de error. Posiblemente estén teniendo dificultades para organizar un análisis de dos niveles y hayan colapsado/deformado la relación de N4 usando el valor de los corderos vendidos al restaurante como corderos vendidos al supermercado.

43. César: Creo que es dividirlo. A ver, 33 (introduce [33…; …]) dividido entre 58… (inaudible) (introduce [33/58; mensaje de error]).
44. César: No.

Tras el mensaje de error, César (ítem 43) propone dividir las cantidades y el sistema responde con un mensaje de error. Posiblemente César, tras colapso/deformación que ha hecho desaparecer la relación en N4, intenta organizar la resolución en torno a una relación multiplicativa asumiendo, erróneamente, que el valor de los corderos vendidos al supermercado es como corderos vendidos al restaurante.

45. Nerea: (Nerea niega con la cabeza) Yo creo que será (introduce [2530…; …]) …
46. César: 950 más… (Nerea introduce [2530+…; …].) Eso ya lo hemos puesto antes y nos decía que no.
47. Nerea: No (Nerea introduce [2530+2145; …]).
48. César: …más… (Nerea introduce [2530+2145+33; mensaje de error].)

Nerea propone ahora (ítems 45-48) sumar 2530 más 2145 más 33, donde combina cantidades de distinta naturaleza en una relación aditiva errónea.

49. Nerea: No. ¿Ponemos otra pista?
50. César: Vale.
51. (César pide ayuda al sistema.)
52. César: (Lee parte de la ayuda en voz alta) “Los corderos que se vendieron en el restaurante…”
53. Nerea: Ya lo sé, ya lo sé… yo… eran…
54. César y Nerea: … el 55 (Nerea introduce [55…; …]) …
55. Nerea: … por (introduce [55·…; …]) … ¿33 eran?
56. César: 33 que se vendieron (Nerea introduce [55·33; …]), y lo que te dieran…
57. (Al pulsar aceptar [55·33; mensaje de error].)
58. César: No.

Nerea le propone a César pedir otra ayuda (ítem 49). El sistema proporciona una ayuda de nivel 2 que César lee parte de ella en voz alta (ítem 52). En este nivel de ayuda el sistema ya proporciona las cantidades que tienen que utilizar para construir una operación correcta. Tras leer la ayuda, Nerea y César proponen (ítem 54-56) multiplicar, incorrectamente, 55 por 33. De esto podemos interpretar que los nombres de las cantidades que han aparecido en las ayudas (corderos comprados al restaurante y corderos comprados) no les han sugerido la necesidad de utilizar un esquema de combinación.

59. Nerea: No. A lo mejor es dividirlo.
60. César: No (introduce [55…; …]) igual es sumarlo. Sumar (introduce [55+…; …]) …
61. Nerea: …sí…
62. César: …las cantidades de cordero…
63. Nerea: Ahí (señala la pantalla el 33).
64. (César introduce [55+33; mensaje de error].)

Nerea propone (ítem 59) dividir 55 entre 33, *Ncm*/*Ncr*, aunque César propone sumarlas (ítem 60). César acaba introduciendo 55+33 y el sistema proporciona un mensaje de error (ítem 64).

La ayuda proporcionada por el sistema les ha clarificado a ambos qué cantidades conocidas intervienen y que se relacionan, pero siguen sin tener claro cómo materializar la operación correcta.

65. Nerea: No. Pues será dividir (introduce [55/…; …]). A ver si es restar…
66. (Nerea introduce [55/33…; …].)
67. César: Sí, es restar, es restar, es restar… es restar… (Nerea borra [55/33…; …]) los 55 corderos menos los 33 corderos (Nerea introduce [55-…; …]) y te dará los corderos que faltan (Nerea introduce [55-33; Ncs=22]).

Conviene señalar que César realizó correctamente esta operación en el cuestionario Post. Nerea propone de nuevo dividirlas (ítem 65), en lo que podría interpretarse como una estrategia de *gaming the system*, pero antes de pulsar aceptar propone con duda si habría que restarlas. César afirma con contundencia que hay que restarlas (ítem 67) argumentando, correctamente, que de esta manera averiguarían los corderos que faltan, es decir los que tienen que vender al supermercado. Este mismo razonamiento lo había hecho anteriormente (ítem 19) aunque no había sido capaz de establecer la relación correcta entre estas cantidades.

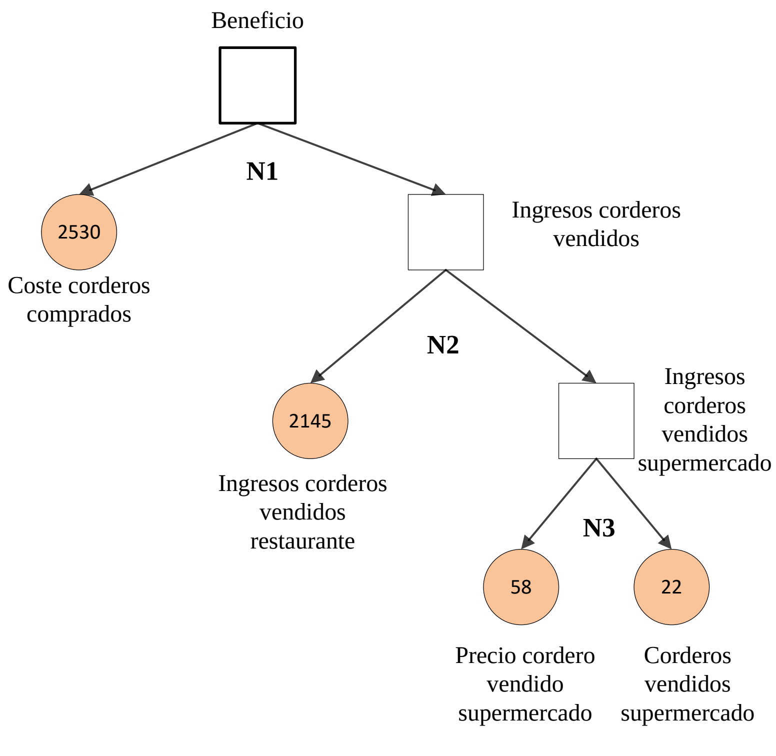


Figura 5.49.

68. César: (lee el nuevo dato de la tabla de cantidades): “Número de corderos que se vendieron al supermercado” Ahora me pregunta: “¿cuánto dinero obtuvieron?”
69. Nerea: ¿Cuánto beneficio?

Una vez obtenida la nueva cantidad, César (ítem 68) lee su nombre y la pregunta del enunciado del problema y propone, incorrectamente, (ítem 70) sumar 2530 (coste de los corderos) más 2145 (ingresos de la venta al restaurante) más 58 (precio de cada cordero vendido al supermercado).

70. César: (Introduce [2530…; …]) una suma (introduce [2530+…; …]) entre todo (Introduce [2530+2145…; …])
71. César: (Introduce [2530+2145+…; …]) …
72. Nerea: (Inaudible.)
73. César: … 58 que es el… (introduce [2530+2145+58; mensaje de error].)

74. César: ¿Noo?
75. (César parece que vuelve a leer parte de la pregunta del problema y la tabla de cantidades acompañándose del cursor) "¿Cuánto dinero obtuvo?" "Precio que paga el mayorista por todos los corderos".
76. Nerea: Yo…
77. César: ¡Ahhh! ¡Precio que paga! A ver. Por cada uno paga…
78. Nerea: No. A ver, y si restáramos estos dos números (señala el 2530 y el 2145) ¿puede ser?...
79. César: (Niega con la cabeza) no tiene mucha lógica.
80. Nerea: ¿Y si pedimos una pista?
81. César: Una pista, vale (solicita una ayuda al sistema).
82. César: (Empieza a leer la ayuda proporcionada) "para calcular el dinero que ha recibido de los corderos al supermercado tienes que realizar la siguiente operación" (Nerea señala en la pantalla lo que va a leer César ahora) "primero vende cada cordero al supermercado por número de corderos que se venden al supermercado sabiendo el precio al que vende cada cordero al supermercado…"
83. Nerea: Era…
84. César: … 58 (introduce [58…; …]) por 22 (introduce [58·22; Pcs=1276]).

César (ítem 75), sorprendido ante el mensaje de error del sistema, vuelve a leer la pregunta del problema y a recorrer con el cursor las cantidades obtenidas en la tabla de cantidades del problema.

Ahora, Nerea propone, con cierta duda (ítem 78), restar 2530 y 2145. La propuesta de Nerea supone adoptar la lectura L3, una línea de resolución menos habitual en nuestro estudio. La operación propuesta supondría usar un esquema conceptual correspondiente a un cambio 3 para averiguar las pérdidas que tendríamos antes de vender los corderos al supermercado. Sin embargo, César se opone a la propuesta (ítem 79).

Tras la negativa, Nerea propone solicitar una ayuda (ítem 80) y el sistema proporciona una ayuda de nivel 1. Pero Nerea aprieta dos veces más en la ayuda y el sistema les proporciona una ayuda de nivel tres. Recordemos que en este nivel de ayuda el sistema proporciona las cantidades y la relación entre las tres cantidades que hay que utilizar

César lee la ayuda (ítem 82) y propone multiplicar 58 por 22, *Pucs·Ncs* (ítem 84). César ha identificado correctamente la relación entre las tres cantidades *Dcs=Ncs·Pucs* que supondría materializar un esquema de isomorfismo de medidas multiplicativo siguiendo la L1 del problema.

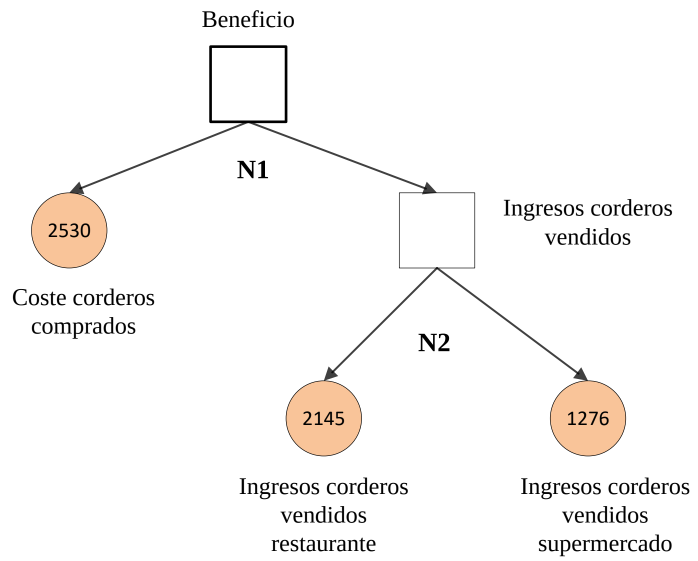


Figura 5.50.

85. César: Y ahora ese dinero que recibes, ahora sí, una suma (introduce [2145…; …])…
86. Nerea: Ya veremos…
87. Cesar: (introduce [2145+1276+2530; …]) tiene que ser una suma.
88. (César pulsa aceptar [2145+1276+2530; mensaje de error].)
89. (El investigador invita a abandonar el problema sin resolverlo correctamente en su totalidad).

Ahora César propone sumar 2145 más 1276 más 2530 (ítem 87). El sistema responde con un mensaje de error (ítem 88). César ha sumado las cantidades que hacían referencia a los ingresos parciales (ingresos por la venta al supermercado e ingresos por la venta al restaurante) y el coste total (2530). Las tres cantidades se relacionan, efectivamente, de manera aditiva, pero lo hacen mediante dos relaciones, una de las cuales ya había sido utilizada (*Dv*=*Pcr*+Pcs). Se podría interpretar que César aún no contempla que las cantidades 2145 y 1276 sean ingresos mientras que 2530 son costes. Otra interpretación podría ser que César no entienda el significado de la palabra beneficio vista como ingresos menos costes.

Tras la finalización del tiempo establecido por el investigador para resolver correctamente el problema se invita a los alumnos a abandonarlo sin resolverlo en su totalidad (ítem 89).

5.4.3.3 El caso de la pareja César-Nerea en el problema "El Bautizo".

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más, el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

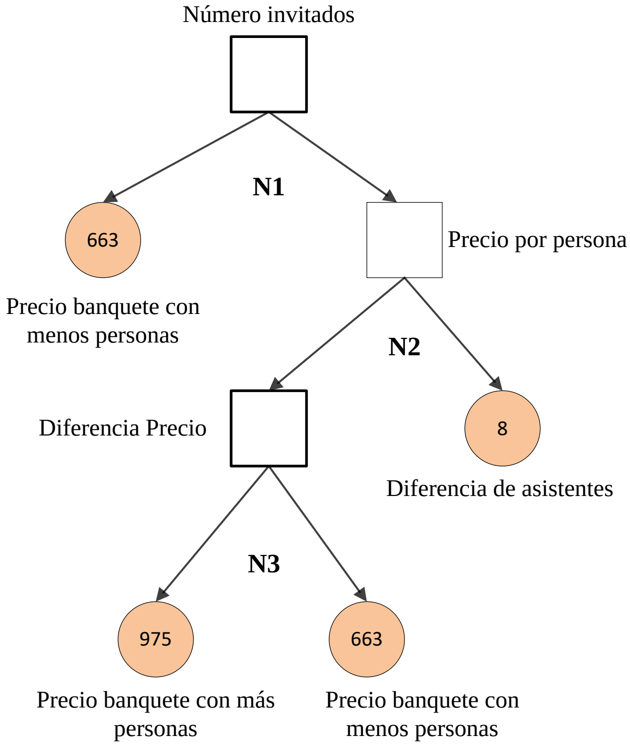


Figura 5.51.

1. (César lee el enunciado del problema.)
2. (Silencio de seis segundos.)
3. César: (inaudible.)
4. Nerea: Vale yo. Primero… esto… primero… el coste total del banquete...
5. César: …663… (Nerea introduce [663…; …])
6. César y Nerea: … por… (Nerea introduce [663·…; …])
7. Nerea: …los euros en total que son 975 (Introduce [663·975…; …]).
8. César: No, eso es si hubiesen sido 8 personas más.
9. Nerea: No. No porque hay punto (señala el primer punto y seguido del enunciado).
10. César: Ya, punto. "Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiera costado…" (lee el problema señalando el enunciado en la pantalla del ordenador).

Después de leer el enunciado, Nerea (ítems 4-7) propone multiplicar 663 por 975, es decir, *Ct·Ctm*. Podemos deducir que (1) o bien Nerea está realizando un análisis en el nivel más profundo del análisis (N3), o (2) se ha limitado a conectar cantidades conocidas con la esperanza de reducir la incertidumbre. En el primer caso, Nerea habría utilizado un esquema de isomorfismo de medidas 1 para generar la relación. Es decir, sabría qué cantidades tiene que utilizar, pero tiene dificultades a la hora de insertarlas en el esquema conceptual adecuado. En este caso, además, podríamos concluir que Nerea no pone en juego procesos de control sobre la decisión como el hecho de que multiplica cantidades de la misma especie.

Por su parte, César (ítem 8), aunque parecía estar de acuerdo con Nerea (ítem 6), desestima la relación establecida y argumenta que no se puede multiplicar por 975 ya que esta cantidad "es si hubiesen sido 8 personas más". Posiblemente, César sí que tiene en

11. Nerea: ¡Ay! Sí (borra la operación que había introducido anteriormente).

cuenta el hecho de que ambas cantidades son de la misma especie.
Nerea (ítem 9) no se convence y sustenta su afirmación en un punto y seguido que hay en el enunciado. César (ítem 10) vuelve a leer el enunciado remarcando que el 975 es para 8 personas más. Esto parece convencer a Nerea (ítem 11) y deja de insistir en la validez de relación anteriormente propuesta. Parece que ahora César y Nerea ven una diferencia entre las dos cantidades que expresan el precio del banquete en las dos situaciones.

12. César: Yo creo que deberíamos hacer… una… multiplicación de lo que costó el banquete (señala el botón 663) por las 8 personas (señala los botones * y 8 e introduce [663…; …]) por las 8 personas más si hubieran venido (introduce [663·8; mensaje de error]).

Esto lleva a César (ítem 12) a proponer una multiplicación entre 663 y 8. Es decir, realizar la operación $Ct{\cdot}Pa$. El sistema proporciona un mensaje de error. La propuesta de César puede ser debida al hecho de centrar la atención en la proposición “8 personas más”, pero resulta difícil encontrar una explicación al porqué plantea una multiplicación. Posiblemente, el recurso a la multiplicación sea consecuencia de la propuesta en la que multiplicaban 663 y 975.

13. (Silencio de siete segundos.)
14. César: (Recorre con el cursor el final del enunciado) ¡Ah! claro, es una división (introduce [663…; …]) esto dividido (introduce [663/8…; …]) entre 8 ([663/8; mensaje de error]).
15. Nerea: No.
16. César: A ver. Tenemos que saber el dinero del menú (señala parte del enunciado). Por eso…y después lo dividiríamos esto (señala en el enunciado el 663) dividido entre las personas… tenemos que saber cuántas personas han ido.
17. Nerea: ¿Y dividir esto (señala el botón 663) entre 8 (señala el botón 8)?

Tras un silencio (ítem 13), César (ítem 14) vuelve a relacionar 663 y 8, pero ahora propone dividir. Al introducir la operación el sistema proporciona un mensaje de error.
En este caso, podríamos interpretar que ha cambiado el significado de las cantidades 663 u 8 para integrarlas dentro del esquema de isomorfismo de medida. Así, considera (1) 663 como el total que han pagado las 8 personas; o (2) considera que al banquete han asistido solo 8 personas. En el primer caso, en lugar de determinar la cantidad “diferencia de precio”, lo que hace (Figura 5.52) es asignarle a esa cantidad desconocida el valor de la cantidad conocida “precio del banquete con menos personas” (663). Esto podríamos ligarlo al fenómeno que hemos llamado colapso-deformación y que refleja la dificultad de

18. César: No. Primero tenemos que averiguar cuántas personas han asistido.
19. Nerea: Ya, ya lo sé.

los alumnos para realizar un análisis completo a medida que se incrementa la profundidad del nivel de análisis. No obstante, el hecho de que plantee en primer lugar 663/8, y no 975/8, junto al historial de acciones parece respaldar más bien que están llevando a cabo pruebas con escasa conexión.

Tras el mensaje de error, César verbaliza (ítem 16) de manera inconexados procesos analíticos incorrectos de niveles N1 y N2, ya que plantea la necesidad de saber el precio del menú (N2), pero no parece utilizar esta cantidad en el N1. Nerea (ítem 17) propone dividir 663 entre 8 posiblemente con lo que parece reafirmar la idea expresada por César al final del ítem 16. Sin embargo, César (ítem 18) responde que necesitan averiguar primero cuántas personas han asistido, lo que difícilmente podría servir para desmontar el razonamiento de Nerea ya que esta es la cantidad por la que se pregunta en el enunciado.

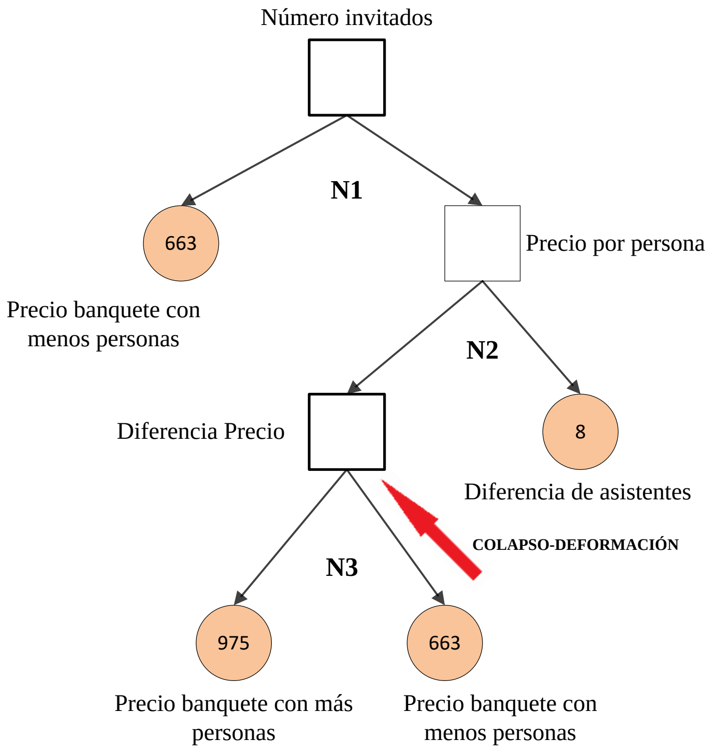


Figura 5.52.

20. (Silencio de siete segundos.)

Tras un breve silencio, César (ítem 21) propone realizar una resta entre 975 y 663,

21. César: Voy a probar una resta (introduce [975-663…; …]) entre el dinero que hubieran gastado por… ([975-663; Dp = 312]).

es decir, identifica correctamente una relación entre tres cantidades *Ctm*=*Ct*+*Dp* correspondiente a un esquema conceptual correcto de cambio que le permite hallar la "diferencia de precio entre los dos banquetes (*Dp*=312)" y superar el N3 de análisis del problema. La ausencia de verbalización nos impide poder sugerir qué le ha llevado a proponer este cambio de orientación.

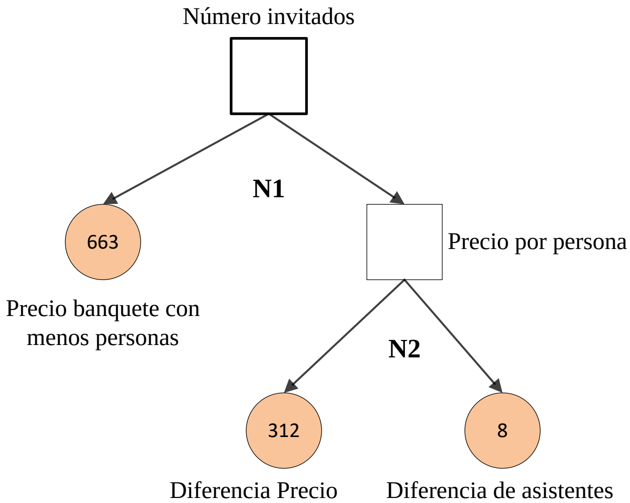


Figura 5.53.

22. César: Bien. La diferencia de precio entre los dos banquetes (lee el nuevo dato en la tabla de cantidades).
23. Nerea: Ahora yo creo que sería nueve (señala con el cursor el botón 975) …
24. César: …975…
25. Nerea: …eso (introduce [975…; …]), por (introduce [975·663…; …]) …
26. César: …seiscientos…
27. Nerea: Creo que no.
28. César: No. Perdona.
29. (Nerea introduce [975·663; mensaje de error].)
30. César: Ahora tendríamos que averiguar la diferencia entre el banquete de los dos, esto (introduce [312…; …]) si…eh… no (borra el dato que ha introducido).

César (ítem 22) lee el nombre asignado por el sistema a la nueva cantidad. Con la participación más o menos directa de ambos miembros de la pareja proponen multiplicar 975 por 663 con poca convicción en esta relación (ítem 23-29). Al introducir la operación el sistema proporciona un mensaje de error (ítem 29) que parece que no leen por la celeridad con que cierran la ventana. Esta relación es la que había propuesto Nerea al principio de la resolución, lo que parece indicar que siguen teniendo dificultades y que el hecho de reducir el número de cantidades desconocidas no ha despejado sus dudas.
César (ítem 30) propone averiguar "la diferencia de precio entre los dos banquetes" utilizando el nuevo dato obtenido (*Dp*=312) pero parece que se da cuenta que justamente es esa acción la que acaban de realizar.

31. César: ¿Pedimos una ayuda?
32. Nerea: Sí (asiente con la cabeza).
33. César: (Aprieta el botón de ayuda y la lee) “El precio del menú…”.
34. Nerea: (acaba de leer) “…del menú de una persona”. Vale, pues ya sé. (inaudible.)
35. César: ¿Qué te parece una división entre (introduce [312…; …]) el dinero que hubo entre los dos banquetes (introduce [312/…; …]) dividido por las ocho personas que deberían haber venido? (introduce [312/8; Pm = 39])
36. Nerea: Vale.

César ítem 33) solicita una ayuda al sistema y este le proporciona como ayuda la relación *Dp=Pm·Pa*. Después de leer la ayuda César (ítem 35) identifica correctamente una relación entre tres cantidades y propone dividir 312 entre 8. Es decir, identifica correctamente la relación *Dp=Pm·Pa* (isomorfismo de medidas de división partitiva) donde hallamos el “precio del menú de una persona (*Pm*)” en la L1 del problema. Parece que la ayuda de nivel 1 ha permitido a César aclarar el significado de las cantidades 312 y 8.

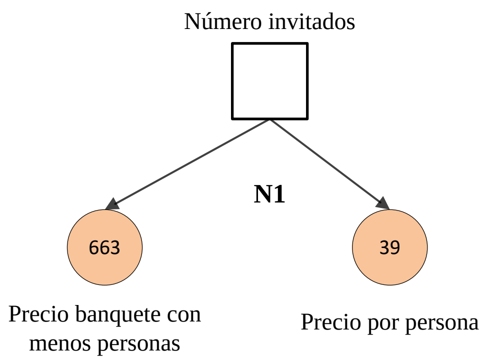


Figura 5.54.

37. César: “Precio del menú de una persona” (lee la nueva cantidad en la tabla de cantidades). Vale. Ahora ya sabemos el menú de una persona. Ahora… cuántas personas… tenemos que saber cuántas personas asistieron. Pues los 39 euros (introduce [39…; …]) por (introduce [39·…; …]) lo que se gastaron en el banquete (introduce [39·663…; …]). Y creo que… ([39·663; mensaje de error]). No.

César (ítem 37) vuelve a leer la nueva cantidad obtenida en la tabla de cantidades y propone multiplicar 39 por 663, es decir *Pm·Ct*. Al introducir la operación el sistema proporciona un mensaje de error. César comete un error al aplicar un esquema de isomorfismo de medidas multiplicativo entre las cantidades *Ct* y *Pm*, en lugar de un isomorfismo de medidas de división cuotitiva

38. Nerea: Pues entonces… a lo mejor es dividir.
39. César: Ya, pero he probado dividir.

Tras el mensaje de error, Nerea (ítem 38) propone dividir mientras que César (ítem 39) responde que ya ha dividido. Nerea (ítem 40) con extrañeza le pregunta que

40. Nerea: A ver. ¿Has dividido o multiplicado?
41. César: Multiplicar. Pero yo creo que dividir…
42. Nerea: (Introduce [312…; …]) vamos a probar (introduce [312/39…; …]).
43. César: En realidad. A ver. Lo que cuestan los dos banquetes dividido…
44. ([312/39; mensaje de error].)

si había dividido o multiplicado. César (ítem 41) contesta que había multiplicado, pero no parece muy convencido de que una división funcione. Nerea (ítem 42), manifestando dudas, introduce una división entre 312 y 39. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 44), indicando que esa relación ya había sido utilizada previamente. Sin embargo, parecen no leer por la celeridad en que cierran la ventana.

45. Nerea: ¿Pedimos una pista?
46. César: Vale.
47. Nerea: (Aprieta el botón de ayuda y la lee) "Personas que asisten al bautizo". A ver.
48. César: Si por una persona se gastan… si por una persona en el menú se gastan 39 euros…
49. Nerea: ¡Ah! Claro.
50. César: Lo que se gastan en el banquete, o sea con el menú (introduce [663…; …]), dividido (introduce [663/39…; …]) por lo que se gastan con una persona ([663/39; P = 17].)
51. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente.)

El mensaje de error lleva a Nerea (ítem 45) a proponer a César pedir una ayuda al sistema obteniendo respuesta afirmativa (ítem 46). César acepta. Nerea lee en voz alta. César (ítem 48) identifica correctamente una relación entre tres cantidades y propone dividir 663 entre 39, es decir *Ct/Pm*. Ha identificado la relación *Ct=Pm·P* (isomorfismo de medidas de división cuotitiva). El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema con la L1.

La pareja ha tenido grandes dificultades para aplicar los esquemas de isomorfismo de medidas a la situación descrita en el problema. Esta dificultad no parecía reducirse a medida que se iban calculando cantidades desconocidas. Sin embargo, las ayudas (puramente verbales) sí que les permitían desencadenar los procesos de análisis-síntesis. Por lo tanto, más que una dificultad a la hora de integrar los esquemas en la situación, podemos concluir que las dificultades aparecían a la hora de asignar nombres a las cantidades suficientemente precisos que permitieran integrarlas de manera precisa en los esquemas.

5.4.3.4 El caso de la pareja César-Nerea en el problema "La Empresa".

Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000 €. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

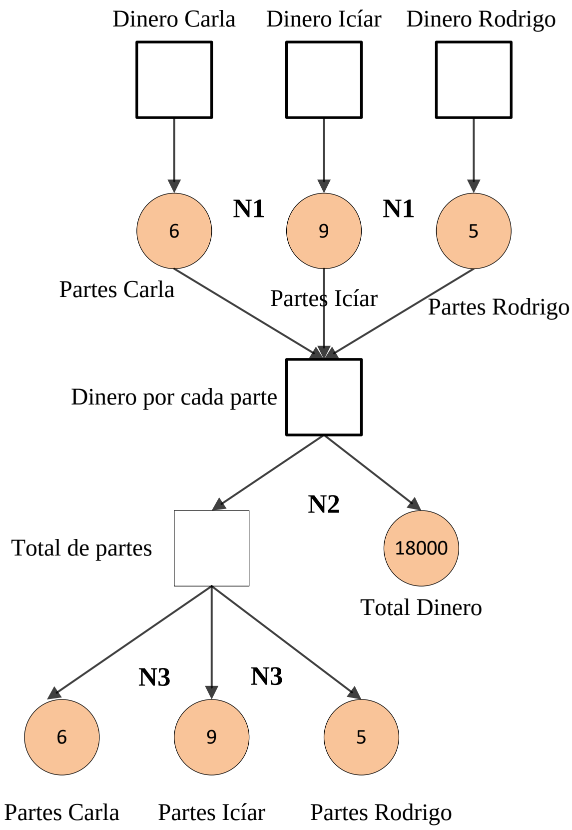


Figura 5.55.

1. (Nerea lee el enunciado del problema.)
2. César: Una multiplicación entre el dinero de todos (introduce [18000…; …]) dividido (introduce [18000/…; …]) por las partes (introduce [18000/6…; …]) de…de… ([18000/6; mensaje de error].)
3. Nerea: No. Yo tengo una idea.
4. César: ¿Qué quieres multiplicarlo?
5. Nerea: Yo creo que (introduce [18000…; …]) 18 dividido entre 3 porque…
6. César: 18 000 ¿dividido entre 3?
7. Nerea: Sí.
8. César: No hay ningún 3.

Tras leer el enunciado César (ítem 2) propone inicialmente multiplicar "el dinero de todos", pero inmediatamente cambia de criterio y divide 18000 entre 6. El sistema responde con un mensaje de error (ítem 2). César ha aplicado de manera errónea, un esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva, lo que podría poner de manifiesto la creencia de que al dividir 18000 entre 6 podrá averiguar la "cantidad de dinero que le toca a Carla". Posiblemente, esto sea consecuencia de una lectura del enunciado en la que centrado la atención en el hecho de repartir. Otra posibilidad, pero a nuestro criterio menos probable, es que haya deformado la cantidad "partes de Carla"

9. Nerea: Ya, no hay ningún 3. ¡Ayyy!... no.

(Figura 5.56) en "total de partes" provocando un colapso en el N3 del proceso de análisis.
Tras el mensaje de error, Nerea (ítem 5) propone dividir 18000 entre 3. César (ítem 8) le hace ver que en el problema no hay ningún dato que valga 3. Posiblemente, Nerea ha planteado un reparto equitativo (erróneo). Este mismo procedimiento ya lo aplicó al resolver este mismo problema en el post test. César apoya su argumentación únicamente en que no es posible porque no existen ninguna cantidad con el valor 3.

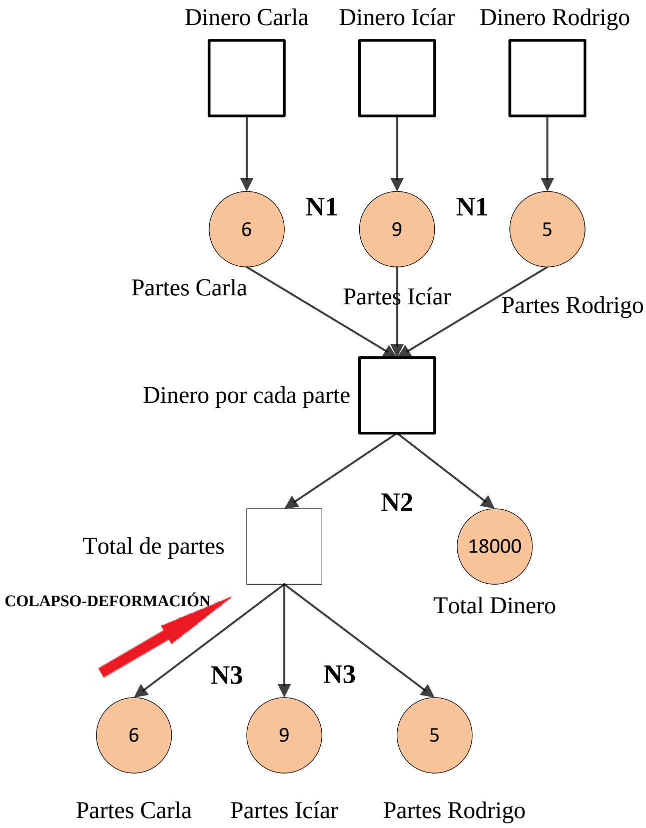


Figura 5.56.

10. César: Querrás decir multiplicado entre 6. Dividirlo ya he probado.
11. Nerea: ¿Dividirlo? (introduce [18000/…; …]).
12. César: No, no. No te va a salir.
13. (Nerea borra el "18 000/".)
14. Nerea: Pues multiplicado (introduce [18000·6…; …]) (De repente

César (ítem 10) parece proponer multiplicar 18000 por 6, pero Nerea (ítem 11) insiste en dividir e introduce "18000/" (ítem 11). César le indica que su propuesta no es correcta (ítem 12) y Nerea abandona (ítem 13) e introduce 18000 por 6 (ítem 14). Al hacerlo comente un error que proporciona una respuesta del sistema que les confunde.

desaparece “18000·6” al pulsar dos veces aceptar).

15. Nerea: ¿Uy?
16. César: No. Has apretado dos veces y te se ha desaparecido. A ver.
17. (Nerea introduce [18 000·9…; …].)
18. César: No. Te va a salir lo mismo.
19. ([18000·9; mensaje de error].)
20. César: Hay un problema.

Nerea (ítem 17), en un segundo intento, multiplica 18000 por 9. El sistema responde con un mensaje de error (ítem 19) que parece ser que no leen por el tiempo que está abierta la ventana.
Estos dos intentos han venido precedidos por la sugerencia de César de multiplicar (ítem 10), pero las combinaciones que se establecen no parecen dirigidas por un criterio claro.

21. Nerea: ¿Una pista?
22. César: Vale.
23. (Nerea pulsa el botón de ayuda.)
24. Nerea: (Nerea lee la ayuda) “Total de partes entre los tres”.
25. César: A ver.
26. César y Nerea: Claro…
27. César: … (introduce [6…; …]) sumarlos todos (introduce [6+9…; …]) y después (introduce [6+9+…; …]) dividirlos para saber cuántos (introduce [6+9+5…; …]) le tocan a cada uno.
28. Nerea: ¿Lo divido yo luego?
29. (César introduce [6+9+5; P = 20].)

Nerea (ítem 21) plantea la posibilidad de solicitar una ayuda y César (ítem 22) acepta. El sistema les proporciona el primer nivel de ayuda para una relación. La ayuda la lee Nerea (ítem 24) en voz alta. Tras leerla, Cesar (ítem 27) identifica correctamente la relación entre cuatro cantidades y propone sumar 6 más 9 más 5, es decir $Pc+Pi+Pr$ usando la relación $P=Pi+Pc+Pr$ (esquema de combinación) en el N3 de análisis.

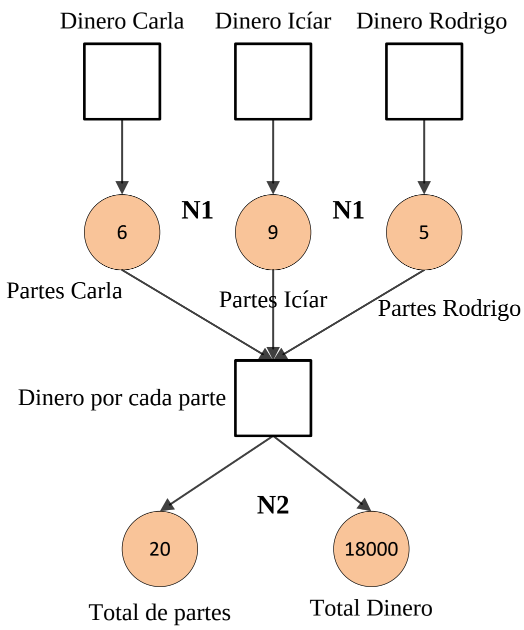


Figura 5.57.

30. César: Vale (lee la nueva cantidad en la tabla de cantidades). "Total de partes entre los tres".
31. Nerea: Ahora esto (señala el 18000 en el enunciado) dividido entre esto (señala el 20 en la tabla de cantidades). 18 000 dividido entre 20 (introduce [18000…; …]). Yo creo que es multiplicar, pero bueno (introduce [18000/20; Dp=900]) …

César (ítem 30) lee, en la tabla de cantidades, el nombre de la cantidad que acaban de determinar. Nerea (ítem 31) insiste en efectuar una división, algo que ya había anticipado (ítem 28) desde que César había planteado la suma de las partes (ítem 27). Podemos decir que Nerea utiliza un esquema de isomorfismo de medidas, pero parece dudar a la hora de materializarlo mediante una operación aritmética. Así, en el ítem 31 expresa sus dudas sobre si debe dividir o multiplicar, aunque finalmente se decanta por un isomorfismo de división partitiva y propone dividir 18000 entre 20, es decir, establece correctamente la relación $D=Dp\cdot P$ para hallar Dp.

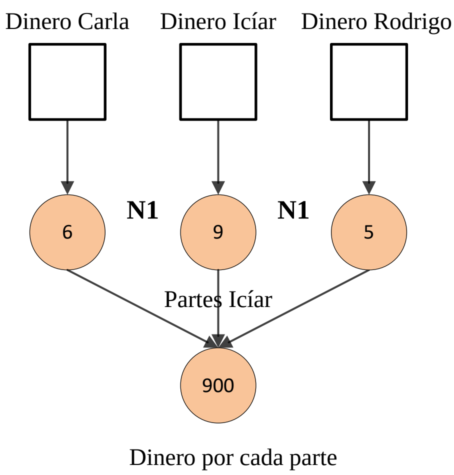


Figura 5.58.

32. Nerea: Sí.
33. César: Vale (lee la nueva cantidad en la tabla de cantidades). Dinero que le toca a una parte.
34. Nerea: (Lee la pregunta del problema en el enunciado). "¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?"
35. César: Pues sí... (vuelve a leer la nueva cantidad en la tabla de cantidades). "Dinero que le toca a una parte". Pues claro. El dinero que

César (ítem 33) lee el nombre de la cantidad cuyo valor acaban de determinaren la tabla de cantidades; mientras que Nerea (ítem 34) lee de nuevo la pregunta del enunciado.
César (ítem 35) vuelve a leer el nombre de la cantidad recientemente obtenida y propone, de una manera confusa, multiplicar el dinero de una parte por cada parte. Nerea (ítem 36), pregunta a César si su propuesta es multiplicar 900 por 20 (que son todas las partes). César (ítem 37) le dice que no y propone multiplicar 900 por 6 que son las partes

hay en una parte por los trozos que, los…los (introduce [900…; …]) …

36. Nerea: O sea, ¿900 (señala el 900) por 20?
37. César: Sí. No, no (Introduce [900·…; …]), 900 (introduce [900·…; …]) que es lo que pagan por una parte por las 6 partes (introduce [900·6…; …]) y te dará las partes de Carla ([900·6; Dc=5400]).
38. Nerea: ¡Ah! Claro. Es que no había visto esto (señala el 6 en el enunciado del problema).
39. César: Así sería todo el rato. No, aquí ahora como uno (señala el 5400) tiene más partes que otro sería 900 (introduce [900…; …]) por (introduce [900·…; …]) 9 (introduce [900·9; Di=8100]) …y 900 (introduce [900…; …]) por (introduce [900·…; …]) 5 (introduce [900·5; Dr=4500]).
40. (El sistema da la operación como correcta e indica la finalización del problema correctamente)

de Carla. En definitiva, ha identificado correctamente la relación $Dc=Dp\cdot Pc$ consecuencia de aplicar un isomorfismo de medidas multiplicativo.

César (ítem 39) identifica el patrón a seguir y ahora propone multiplicar 900 por 9 (relación $Di=Dp\cdot Pi$ correcta, isomorfismo de medidas) e identifica correctamente la última relación entre tres cantidades y propone multiplicar 900 por 5 (relación $Dr=Dp\cdot Pr$ correcta, isomorfismo de medidas).

La pareja finaliza de manera correcta la resolución del problema siguiendo la L1.

5.4.3.5 El caso de la pareja César-Nerea en el problema "El Granjero".

Un granjero se dedica a la venta de los huevos que ponen sus gallinas. En la granja tiene 12 corrales grandes y 28 corrales pequeños. Cada corral grande produce 140 huevos diarios y cada corral pequeño, 45. Si el granjero comercializa los huevos en cajas donde caben 60 huevos, ¿cuántas cajas necesita diariamente?

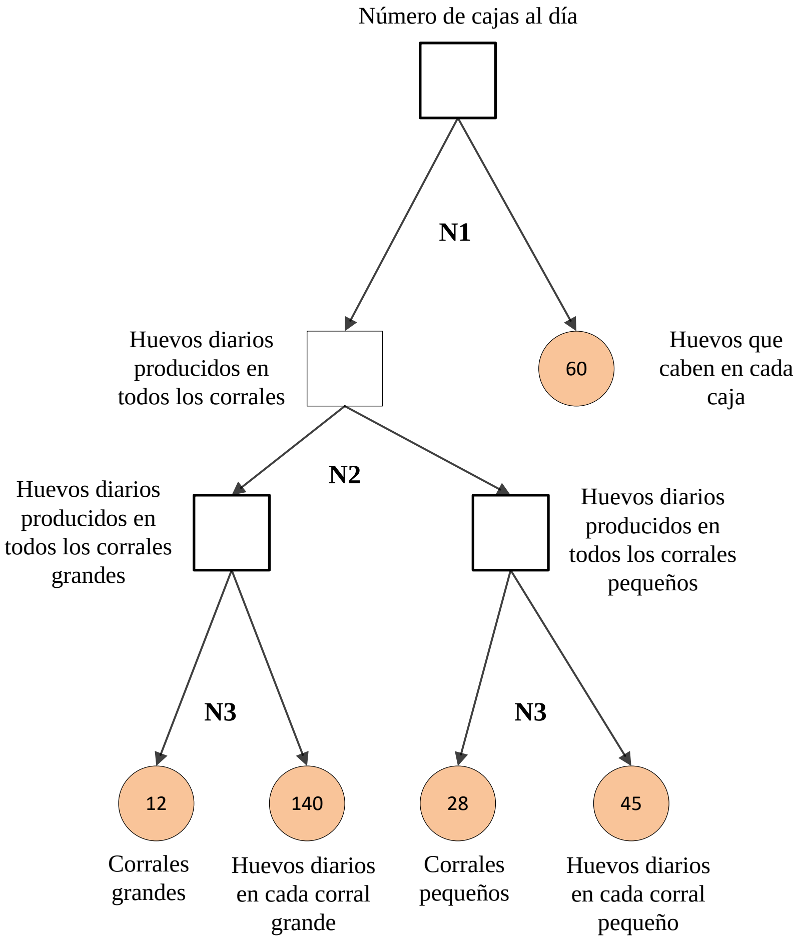


Figura 5.59.

1. (César lee el enunciado del problema.)
2. Nerea: Yo ya sé una.
3. César: ¿Cuál?
4. Nerea: Pues como son corrales (señala los datos del enunciado), 28 más 12.
5. César: Y te saldría el corral total.
6. Nerea: (Introduce [12+28…; …]) el total de corrales.
7. César: Entre los dos corrales.
8. (Nerea introduce [12+28; mensaje de error].)
9. César: ¡Ah! Pues no.
10. Nerea: No.

Tras leer el enunciado, Nerea (ítem 4) propone sumar 28 más 12. El sistema responde con un mensaje de error (ítem 8). La relación no es útil en este problema, aunque la relación de sumar corrales grandes y corrales pequeños permite determinar una cantidad con sentido en la situación consecuencia de aplicar un esquema de combinación: el total de corrales. Esto podría poner de manifiesto que ambos realizan un análisis que no parte de la cantidad por la que se pregunta el enunciado. Nerea ya había utilizado este argumento en el post test.

11. César: No te pregunta cuántos son entre los dos (señala con el cursor el final del enunciado). Habría que

Posteriormente, César (ítem 11) propone dividir 140 entre 12, es decir *Hucg*/*Ncg*. Es evidente que existe una relación multiplicativa entre estas cantidades, hacer una división entre los huevos que ponen cada día (introduce [140…; …]) el corral grande dividido (introduce [140/…; …]) por 12 (introduce [140/12…; …]) que son los corrales ([140/12; mensaje de error]).

12. Nerea: No.
13. César: ¿No?

pero no permite la materialización propuesta, ya que $Hcg=Hucg\cdot Ncg$. El sistema responde con un mensaje de error que los estudiantes parece que no leen. Posiblemente, está confundiendo la cantidad la cantidad huevos diarios que produce cada corral grande con el total de huevos diarios que producen los corrales grandes ($Hucg$=140). Con esta relación parece que está intentando averiguar qué produce cada corral grande sin darse cuenta que ésta ya es una cantidad conocida.

14. (Silencio de once segundos.)
15. César: (Nerea introduce [140…; …]) 140 por (Nerea introduce [140·45…; …]) 45 ([140·45: mensaje de error]). ¿De dónde se saca los 45?

Tras el error, Nerea (ítem 15) identifica, sin verbalizar, una relación entre tres cantidades y propone multiplicar 140 por 45. El sistema responde con un mensaje de error. En este caso, la operación propuesta supondría multiplicar dos cantidades intensivas.

16. Nerea: ¿Pista?
17. César: Pista.
18. (Nerea solicita ayuda al sistema.)
19. César: (Lee la ayuda) “Huevos diarios que produce el corral grande”.
20. Nerea: ¡Ay! Lo que has hecho tú antes.
21. César: 140.
22. Nerea: ¡Ay! 140 (el cursor señala el dato en el enunciado) por 12 (señala el dato en el enunciado). ¡Ay! Lo que has hecho tú antes ¿no?
23. César: No. Yo he hecho 140 dividido por 12 (introduce [140·12…; …]).
24. Nerea: ¡Ay! Vale, vale, vale.
25. (César introduce [140·12; Hcg=1680].)

Ante los últimos errores, Nerea y César (ítems 16 y 17) deciden solicitar ayuda al sistema. El sistema les proporciona un nivel de ayuda 1, donde solo se indica el nombre de una cantidad que se puede calcular, y César (ítem 19) la lee en voz alta.
Tras leer la ayuda, Nerea (ítem 22) identifica correctamente la relación entre dos cantidades y propone multiplicar 140 por 12. Esto supone un acierto en la relación $Hcg=Hucg\cdot Ncg$ correspondiente a un esquema de isomorfismo de medidas. Este episodio podría poner de manifiesto que la reflexión sobre el nombre preciso de la cantidad que deben calcular les ha permitido articular un análisis correcto.

26. Nerea: Ahora sí.
27. César: Y ahora 45 por (introduce [45·…; …]) los corrales pequeños (introduce [45·28; Hcp=1260]) y sabríamos los dos corrales.

Una vez averiguada la primera relación, César (ítem 27) identifica correctamente la relación isomorfa en los corrales pequeños y propone multiplicar 45 por 28. Ha identificado correctamente la relación $Hcp=Hucp\cdot Ncp$

correspondiente de nuevo a un isomorfismo de medidas.

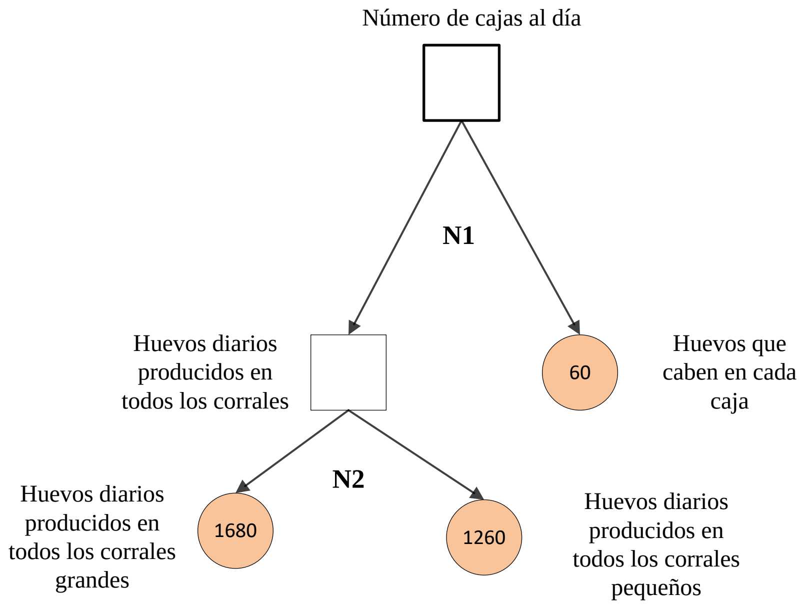


Figura 5.60.

28. Nerea: Y ahora sumarlos ¿no? (señala el 1680 y 1260 en la tabla de cantidades).
29. César: Y ahora tendríamos… a ver… (lee el enunciado) “si el granjero los pone en cajas…” Claro una división entre los huevos que salen (señala con el cursor el 1680 y 1260) …
30. Nerea: Ya. Pero primero tendríamos que sumarlos ¿no? para …
31. César: No. Porque si los sumamos, no queremos el total entero de los huevos.
32. Nerea: ¡Ay! Pues por eso, si lo sumamos (César introduce [1680…; …]) esto más esto (señala el 1680 y 1260) ...
33. César: Pero si lo sumamos, tendríamos los huevos totales.
34. (César introduce [1680+1260…; …].)
35. Nerea: … ¡ay! y luego lo…
36. César: … ¿dividiríamos?
37. ([1680+1260; H=2940].)

Una vez obtenidos los dos datos, Nerea (ítem 28) identifica correctamente la relación entre las dos incógnitas auxiliares encontradas y propone sumar 1680 más 1260. Pero César (ítem 29) propone realizar una división entre las dos cantidades y el 60 ya que afirma que no necesitan el total de huevos. Nerea (ítem 30) intenta hacerle ver que su relación es la correcta justamente porque tienen que averiguar el número total de huevos diarios que producen los dos corrales.

La propuesta de los dos alumnos respecto al esquema conceptual es distinta. Nerea propone aplicar correctamente un esquema de combinación a las cantidades *Hcg* y *Hcp* y establecer la relación $H=Hcg+Hcp$ propia de la L1 del problema mientras César, podríamos pensar que intenta trasladarse a la lectura L2 del problema intentando aplicar dos esquemas de división cuotitiva entre los huevos de cada corral y los huevos que caben por caja. Pero parece que no es este el razonamiento ya que señala con el cursor las dos cantidades (*Hcg* y *Hcp*) y no la cantidad 60. Esto nos hace intuir

que igual está pensando en dividir las dos cantidades.
Finalmente, César (ítem 37) introduce correctamente la relación entre cantidades y suma 1680 más 1260. Han identificado la relación $H=Hcg+Hcp$ materializando un esquema de combinación y siguiendo la lectura que hemos llamado L1.

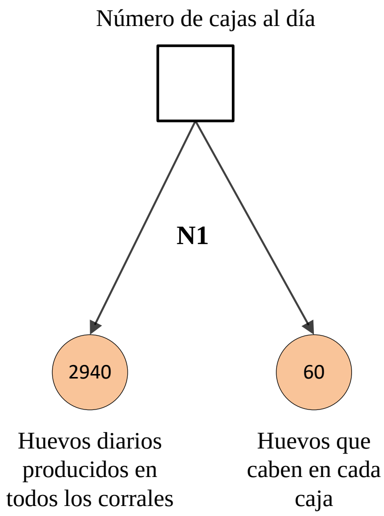


Figura 5.61.

38. César: Vale.
39. César: Ahora el total de todo (introduce [2940…; …]) lo tenemos que dividir (introduce [2940/…; …]) entre cajas de 60 huevos (introduce [2940/60; C=49]).
40. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente).

Ahora sí, César (ítem 39) identifica correctamente la última relación entre cantidades y propone dividir 2940 entre 60. Es decir. utilizan la relación $H=C \cdot Hcp$ (isomorfismo de medidas de división cuotitiva). El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema. La pareja ha seguido la línea de resolución L1.

5.4.3.6. El caso de la pareja César-Nerea en el problema "Los Disfraces".

Se disponen de 450 m de tela para hacer 25 disfraces de león que necesitan 6 metros de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer disfraces de elefante. Si para hacer un disfraz de elefante se necesitan 15 m de tela, ¿cuántos disfraces de elefante podrán hacerse?

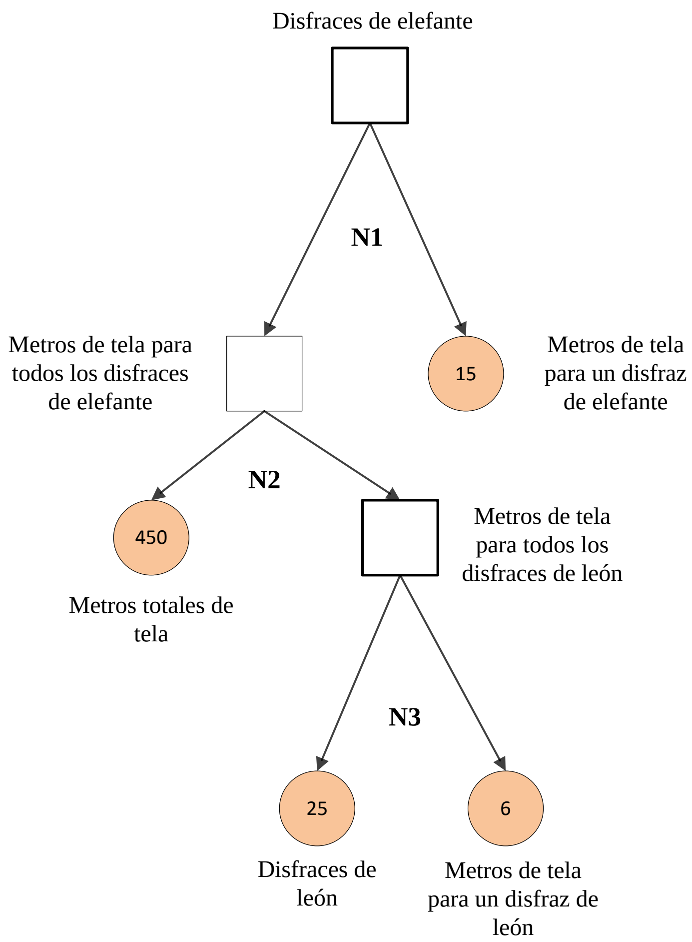


Figura 5.62.

1. (Nerea lee el enunciado del problema).
2. César: Si son… claro 15 disfraces… de león que son…
3. César y Nerea: No, son 25.
4. Nerea: (señala el dato 450 del enunciado) 450 por 25.
5. César: (Introduce [450…; …]) y nos daría cuánta tela gastaría (introduce [450·25; mensaje de error]). No

Tras leer el enunciado, Nerea (ítem 4) propone multiplicar 450 por 25 para obtener, según César (ítem 5) la cantidad de tela que se gastaría en total. El sistema responde con un mensaje de error.
El razonamiento de la pareja se apoya sobre un isomorfismo de medidas que será necesario, pero usan el valor de la cantidad conocida “metros de tela para un disfraz de león” como valor de la cantidad desconocida “metros de tela para todos los disfraces de león”. Esta acción podríamos calificarla como un colapso-deformación del último nivel de análisis y podría ser consecuencia de la compleja adjetivación de las cantidades.

6. Nerea: Pues será dividir. Pero no creo.
7. César: No. Es una multiplicación entre (introduce [25…; …]) 25 disfraces que son por 6 (introduce

Tras el mensaje de error, Nerea (ítem 6) quiere utilizar las mismas cantidades, pero propone dividirlas. Nerea ya había tenido un mismo comportamiento en situaciones similares: cuando no

[25·6…; …]) que es en cada uno ([25·6; Ml=150]) y nos daría cuánta tela gastaría.

funciona multiplicar, realiza una división. Esto podría poner de manifiesto, que la certeza desde la que articula los razonamientos no es muy alta, y que se apoya sobre las dos posibles operaciones ligadas a un esquema dado.
César (ítem 7) le advierte del error e identifica correctamente una relación entre las cantidades y propone multiplicar 25 por 6. Es decir, plantea una operación que supondría considerar la relación correcta $Ml=L \cdot Mul$ para calcular Ml a partir de un esquema de isomorfismo de medidas 1.

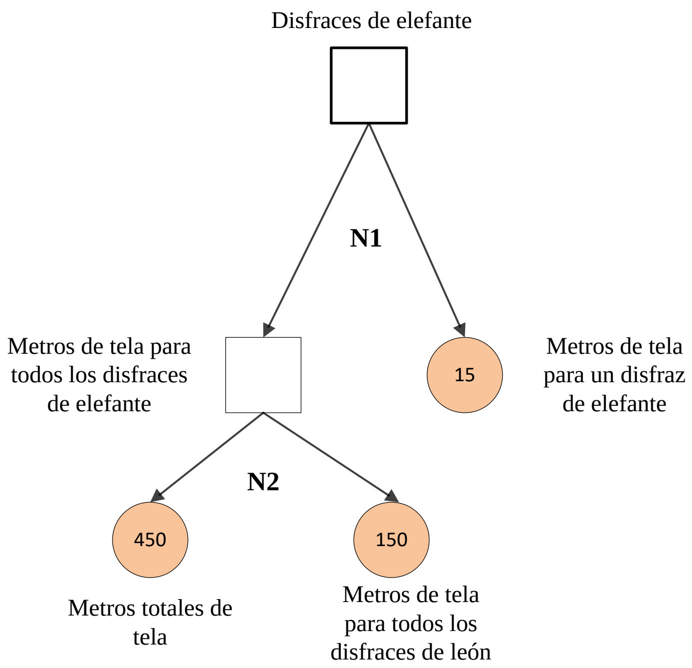


Figura 5.63.

8. César: (Lee la nueva cantidad calculada) “Metros de tela para disfraces de león”. Vale. Y dice que el resto, o sea, una resta de 450 (introduce [450…; …]) de tela que hay en total menos (introduce [450-…; …]) lo que se ha gastado en los leones (introduce [450-150; Me=300]) y nos dará (lee) “los metros de tela para los disfraces de elefante”.

César (ítem 8) lee la nueva cantidad obtenida en la tabla de cantidades y propone restar 450 menos 150. Identifica correctamente la relación $Mp=Ml+Me$ resultado de un esquema de combinación 2 donde hay que hallar Me. Esta vez sí, César ha identificado la palabra “resto” del enunciado del problema con la relación.

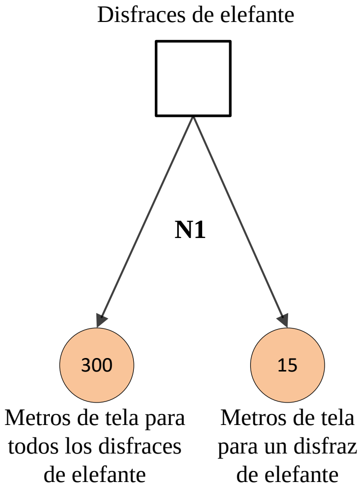


Figura 5.64.

9. César: Ahora, (lee del enunciado) “si para hacer un disfraz de elefante se gastan 15 metros de tela ¿cuántos disfraces de elefante se podrán hacer?”. Una multiplicación o una división entre 15 metros (introduce [15…; …]), no 15 de… no (borra lo introducido). Antes de todo tenemos que saber cuántos disfraces de león, ¡ay! de elefante se hacen, si dice que 25 de león (señala el 25 en el enunciado) deberíamos hacer 300 (Nerea introduce [300…; …]) multiplicado o dividido (Nerea señala los botones / y · e introduce [300·…; …]) entre los 15 metros ([300·15; mensaje de error]).

Ahora César (ítem 9) lee el final del enunciado del problema donde están los datos correspondientes a los disfraces de elefante y establece que debe haber una relación entre las cantidades 300 y 15. Parece que ha identificado una relación multiplicativa entre las cantidades, pero no sabe si utilizar una multiplicación o una división, aunque al final se declina por la división al decir “entre”.
Nerea (ítem 9) introduce una multiplicación entre esas dos cantidades y el sistema responde con un mensaje de error. El sistema responde con un mensaje de error. La relación de Nerea no es correcta ya que estas cantidades, a pesar de relacionarse en un esquema de isomorfismo de medidas, no se relacionan de manera multiplicativa en la relación $Me=Mue·E$, sino que para averiguar E hay que realizar una división cuotitiva.

10. César: No, entonces era dividido.
11. Nerea: ¿Pista? ¡Uy! Espera… (introduce [300…; …]) …pues 300 dividido (introduce [300/…; …]) ...
12. César: …entre 15 que son los metros que gastan.
13. (Nerea introduce [300/15; E=20].)
14. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente).

Finalmente, César (ítem 10) por descarte, identifica una relación entre esas cantidades y propone dividir 300 entre 15 para determinar el valor de E mediante una división cuotitiva a partir de la relación $Me=Mue·E$. El sistema indica la finalización del problema. Los estudiantes han seguido la lectura que hemos identificado como L1.

5.4.3.7 El caso de la pareja César-Nerea en el problema "El Pienso".

Un granjero gasta diariamente 15 kilos de pienso para gallinas y 120 kilos de pienso para vacas. El kilo de pienso para gallinas cuesta 2 € y el de pienso para vacas, 5 €. Si en un año sólo puede gastar 250.000 euros. ¿Cuánto dinero le sobra?

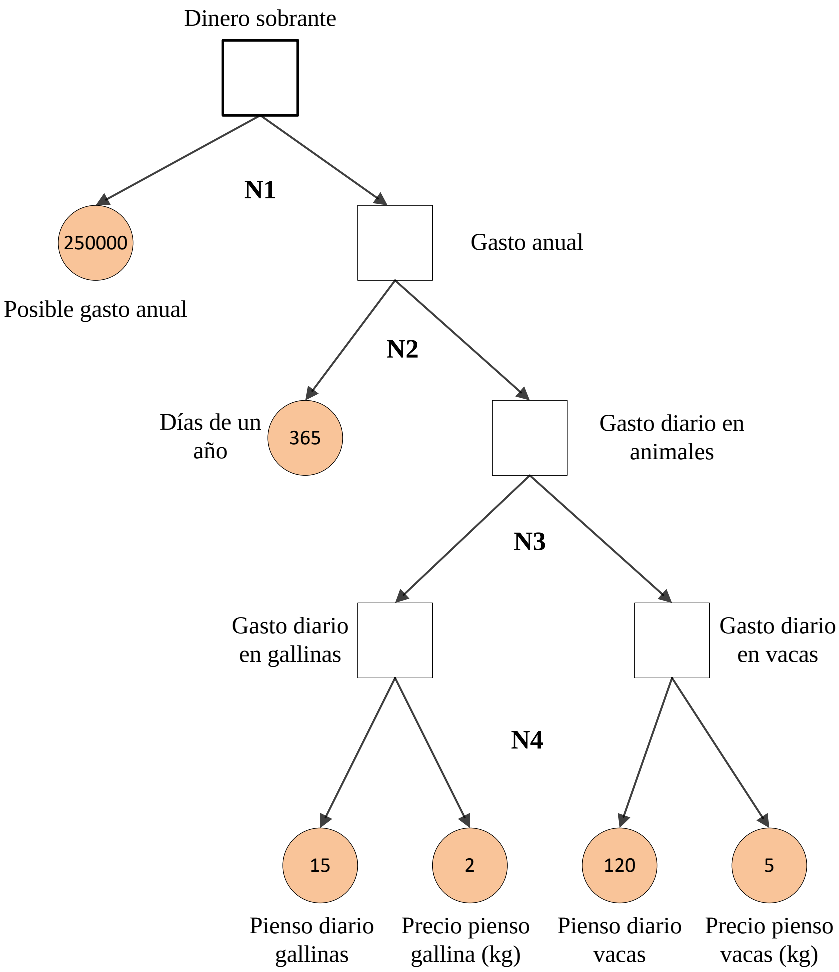


Figura 5.65.

1. (César lee el enunciado del problema).
2. (Silencio de once segundos.)
3. César: Primero, el dinero que se gasta (introduce [250000…; …]) por cuántos kilos de pienso (introduce [250000·…; …]) … no, no, no… sí, sí, sí, por un kilo (señala el 2).

Tras leer el enunciado, César (ítem 3) propone multiplicar el 250000 por otra cantidad de magnitud peso. Nerea (ítem 4) le propone establecer la operación 250000 por 120 (pienso diario para las vacas, *Kv*). Al final César (ítem 6) propone multiplicar 250000 por 15 (pienso diario para gallinas, *Kg*). El sistema responde con un mensaje de error que parece que los estudiantes no

4. Nerea: Será por 120 ¿no? (señala el120).
5. (César borra lo introducido hasta ahora.)
6. César: No. A ver. Se gasta 15 kilos de pienso en gallinas, o sea, 2500 (introduce [250000…; …]) ¡ay! 250000 por (introduce [250000·…; …]) lo que se gastan en un kilo…lo que cabe en un kilo de gallinas ¿no? (introduce [250000·15; mensaje de error]).

leen por la celeridad con que se cierra la ventana.

Tanto la operación propuesta por César como la de Nerea son incorrectas ya que las cantidades que involucran no se encuentran relacionadas en ninguna de las lecturas del problema. Parece que son conscientes de que deben obtener el total de dinero gastado como consecuencia del gasto diario de un número de kilos de pienso, pero no parecen establecer una adecuada inclusión jerárquica entre las cantidades.

7. Nerea: (inaudible.)
8. César: (lee el enunciado) No. O 2 euros (introduce [2…; …]) por (introduce [2·…; …]) el kilo de pienso (introduce [2·15…; …]) por un kilo de pienso ([2·15; Pdg=30]).

Ahora César (ítem 8), y tras una relectura no verbalizada de los datos, identifica correctamente una relación entre cantidades y propone multiplicar 15 por 2. Parece que ha utilizado la relación $Pdg=Pug·Kg$ para averiguar Pdg apoyándose correctamente en un isomorfismo de medidas.

9. César: Vale (lee) “El pienso que gasta…30 euros”. Ahora deberíamos hacer 120 (introduce [120…; …]) …
10. Nerea: …por 2.
11. César: No por…
12. Nerea: Pero por 2…
13. César: …por (introduce [120·…; …]) lo que se gasta en las vacas…
14. Nerea: ¡Ay! Por 2.
15. César: …y una vaca 5 euros (introduce [120·5; Pdv=600]).

César (ítems 9 y 11) propone multiplicar 120, los kilos de pienso para las vacas que se consumen en un día, por una cantidad que parece intentar localizar en la pantalla. Nerea propone multiplicarla por 2, el precio de un kilo de alimento para las gallinas. César (ítem 15) le advierte de su error e identifica correctamente la cantidad que buscaba y propone multiplicar 120 por 5 materializando correctamente la relación $Pdv=Kv·Puv$ resultante de aplicar un isomorfismo de medidas.

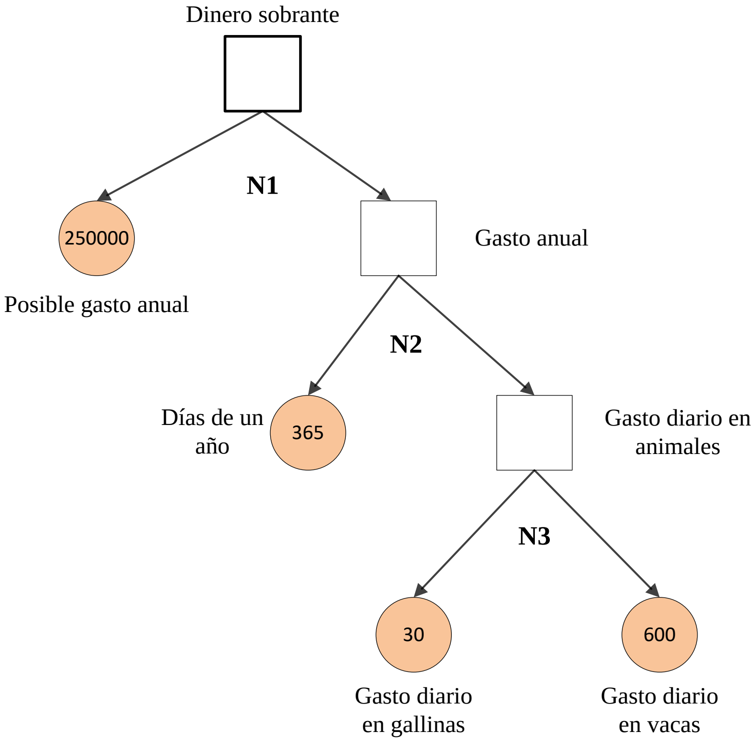


Figura 5.66.

16. César: (Lee de la tabla de cantidades) "El dinero que se gasta en un día en vacas". (Lee y señala con el cursor una parte del enunciado)"Si en un año suele gastarse 250000 euros". Claro, 250 (introduce [250000…; …]) dividido (introduce [25000/…; …]) entre lo que hay en un año (introduce [250000/365; mensaje de error]).

César (ítem 16) lee el nombre que el sistema le asigna a la cantidad obtenida y, también, lee parte del enunciado. Ahora César propone dividir 250000 entre 365. El sistema responde con un mensaje de error.
Estas dos cantidades podrían tener alguna relación en una nueva lectura del problema para intentar ver cuánto dinero se puede gastar al día el granjero. Pero las cantidades no son divisibles y, por tanto, no tienen relación entera en ninguna de las lecturas del problema.

17. César: No.
18. Nerea: ¿Pista?
19. César: Es que una multiplicación no puede ser (introduce [250000…; …]) a ver (introduce [250000·365; mensaje de error]).

Nerea (ítem 18) propone solicitar una ayuda al sistema mientras que César (ítem 19) propone, sin demasiada convicción multiplicar 250000 por 365. El sistema vuelve a responder con un mensaje de error.

20. César: No. Una pista.
21. (César pide ayuda al sistema y la lee) "El dinero que se ha gastado en comida para…" ¡Ah! los dos juntos. Las gallinas y las vacas, 30 más 600.

Ahora sí, solicitan una ayuda al sistema. El sistema les proporciona una ayuda de nivel 1 donde solo se incluye el nombre una cantidad que pueden calcular. Tras esto Cesar (ítem 21) identifica correctamente una relación entre las

22. Nerea: 30 más 600 (introduce [30+600; Pdc=630]).

cantidades y propone sumar 30 a 600. Es decir, establece la relación *Pdc=Pdv+Pdg* apoyada en un esquema de combinación 1.

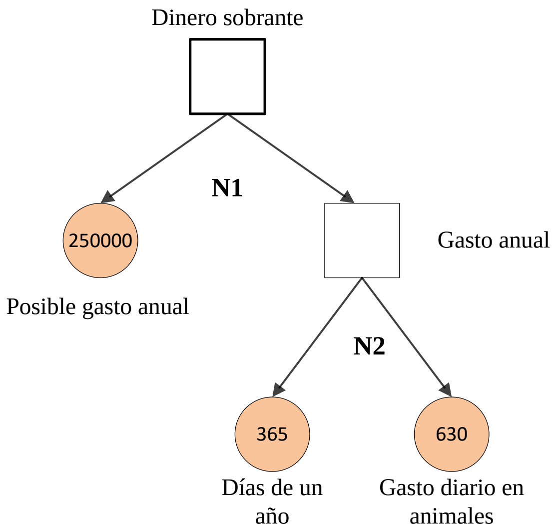


Figura 5.67.

23. César: Ahora nos sale (lee el mensaje del 630) “el dinero que se ha gastado en comida para los animales”. Pero eso en un día. Pues lo que se gasta en un día (introduce [630·…; …]) por (introduce [630·365…; …]) un año ([630·365; Pac=229950]).

Como es costumbre César (ítem 23) lee el nombre de la nueva cantidad obtenida. De manera inmediata, identifica correctamente una relación y propone multiplicar 630 por 365. Esto supone aplicaren la relación *Pac=Pdc·Da*, derivada de aplicar un esquema de isomorfismo de medidas 1.

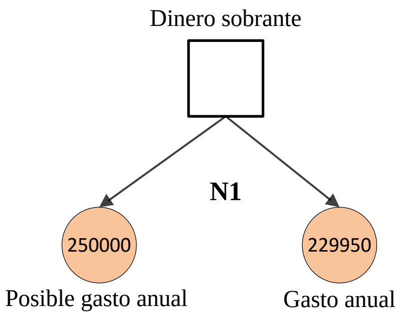


Figura 5.68.

24. César: ¡Ah! Ya está. (Lee el 229950 de la tabla de cantidades y la pregunta del enunciado)“Dinero que se gasta en un año en comida para animales” y nos pregunta “¿Cuánto le sobra?”.

Una vez más César (ítem 24) lee el nuevo nombre de la cantidad cuyo valor han obtenido y la pregunta del problema e identifica correctamente la última relación del problema. Así propone restar 250000 menos 229950 para averiguar cuánto le sobra. En definitiva,

Una resta entre esto (introduce [250000…; …]) ...
25. César y Nerea: …menos…
26. (César introduce [250000-229950; Pag=10950].)
27. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente)

ha usado la relación $Dt=Pac+Ds$ consecuencia de aplicar un esquema aditivo de cambio 4.
El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema. Los estudiantes han seguido la lectura marcada como L1.
En el post test, tanto Nerea como César no tuvieron problemas en identificar los dos primeros isomorfismos de medidas. César también aplicó bien el esquema de combinación y el isomorfismo de medidas con la cantidad 365 pero fue en el esquema de cambio donde tuvo problemas para relacionar las cantidades. Sin embargo, Nerea tuvo problemas en identificar el esquema de combinación y el resto de etapas del problema en adelante.

5.4.4. LA PAREJA PABLO-PAU. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SIN HINTS.

5.4.4.1. El caso de la pareja Pablo-Pau en el problema "Las Pelotas de tenis"

En un club de tenis tienen dos carros con 105 y 287 pelotas, respectivamente. Las van a poner en botes de 7 pelotas para utilizarlas en un torneo. ¿Cuántos botes serán necesarios?

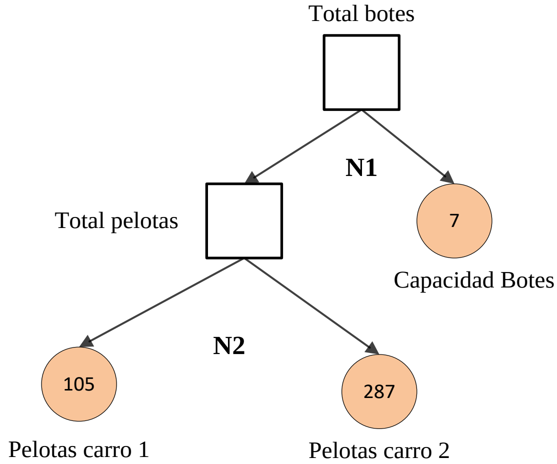


Figura 5.69.

1. (Pablo y Pau leen el enunciado del problema.)
2. (Pablo y Pau vuelven a leer de nuevo el enunciado, pero ahora en voz baja)
3. Pau: Sumamos eso y eso (señala en el enunciado los datos 105 y 287)

Tras leer dos veces el enunciado, Pau (ítem 3) propone sumar 105 más 287. Es decir, plantea una operación que supondría considerar la relación correcta $P=Pp+Pg$ para calcular P apoyada en un esquema de combinación donde se conocen las partes y se desconoce el

4. Pablo: Vale. Sumamos 105 más (Pau introduce [105+…; …]) 287 (Pau introduce [105+287…;…]…
5. Pau: …y después lo dividimos entre 7 (introduce [105+287; P=392])

total. Mientras Pau introduce la operación muestra evidencias de haber realizado un proceso de análisis-síntesis completo (ítem 5) ya que propone de manera correcta la solución del problema apoyada en el esquema de combinación y en un isomorfismo de medidas de división cuotitiva.

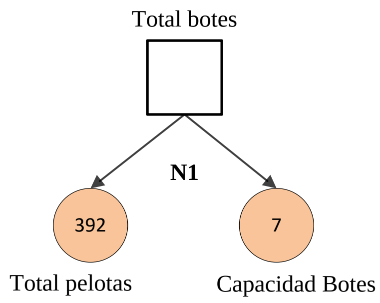


Figura 5.70.

6. Pablo: Y después 392 (Pau introduce [392…; …]) lo dividimos entre 7 (Pau introduce [392/7; B=56]).
7. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente)

Posteriormente, Pablo (ítem 6) propone dividir 392 entre 7 lo que supone considerar la relación correcta $P=Pb \cdot B$ para hallar *el* "número de botes que se necesitan (B)" apoyado en un esquema conceptual de isomorfismo de medidas de división cuotitiva.

El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema. Los estudiantes han seguido la lectura L1.

Destacar que Pablo había resuelto mal el problema en el post test ya que había incluido una relación más en el problema en la que había incluido la cantidad número de carros de pelotas (2). Esta forma de resolver podría indicar que había pretendido utilizar todos los datos numéricos que aparecen en el enunciado. En este caso, la cantidad 2 no tenía asignado un botón, lo que podría haber ayudado al estudiante.

5.4.4.2. El caso de la pareja Pablo-Pau en el problema "El Mayorista"

Un mayorista compra en un matadero 55 corderos a 46 euros cada uno. Vende a un restaurante 33 a 65 euros cada uno y el resto a un supermercado por 58 euros cada uno. ¿Qué beneficio obtuvo?

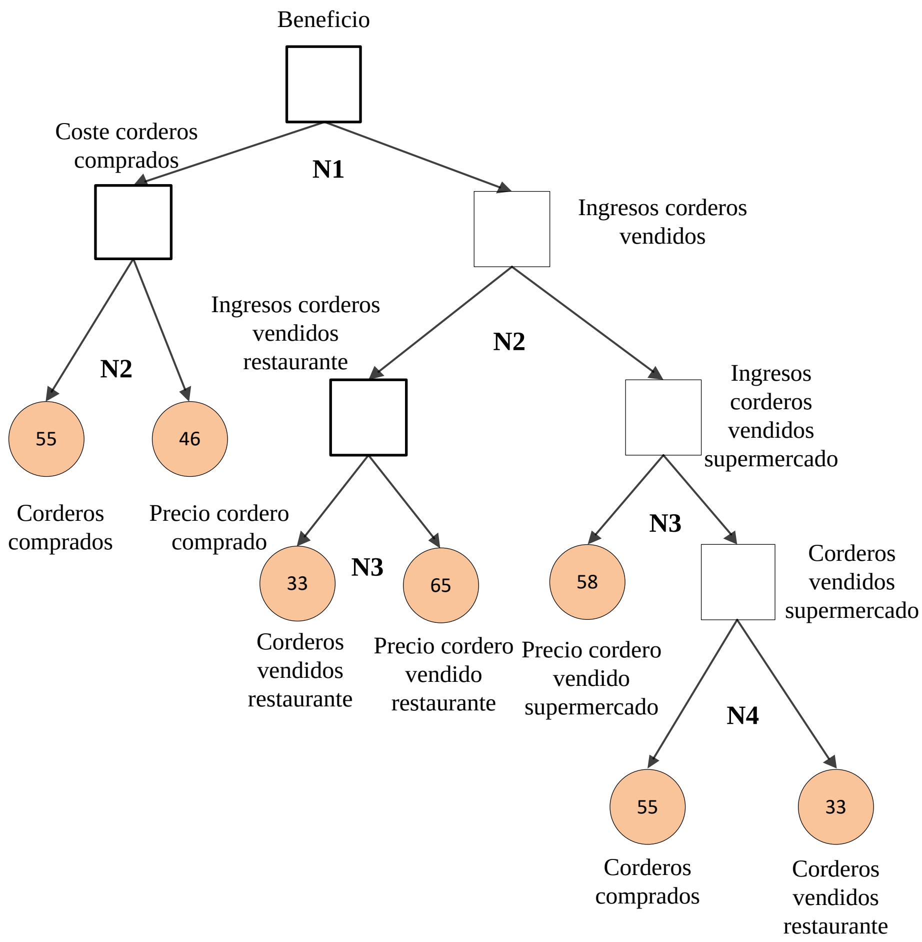


Figura 5.71.

1. (Pablo y Pau leen el enunciado del problema.) 2. Pau: (inaudible) 3. Pablo: 55 por 46 y… a ver (Pau introduce [55·…; …]) 55 por 46 (Pau introduce [55·46; Pcm=2530]) …46.	Tras leer el enunciado, Pablo (ítem 3) propone multiplicar 55 por 46. Es decir, se apoya en un esquema de isomorfismo de medidas para construir la relación correcta *Pcm=Ncm·Pucm* y averiguar el “precio que paga el mayorista por todos los corderos (*Pcm*)”.
4. Pablo: Y después 2530… 55 menos 33 (Pau introduce [55-33; Ncs=22]).	Posteriormente, Pablo (ítem 4) propone restar 55 menos 33, lo que supondría considerar la relación correcta *Ncm=Ncr+Ncs* derivada de un esquema conceptual de combinación.
5. Pau: (Lee el nuevo dato de la tabla de cantidades) “Número de corderos que vende al supermercado”. 6. Pablo: Y ahora… si es a 65 euros cada uno…eh… 33 por 65 (Pau introduce [33·65; Pcr=2145]).	Una vez determinada la cantidad de corderos vendidos al supermercado, Pau (ítem 5) lee el nombre asignado por el sistema a la cantidad mientras que Pablo (ítem 6) propone, correctamente, multiplicar 33 por 65. Parece que ha identificado la relación *Pcr=Ncr·Pucr* apoyándose en el isomorfismo de medida

asociado a la venta de los corderos al restaurante.

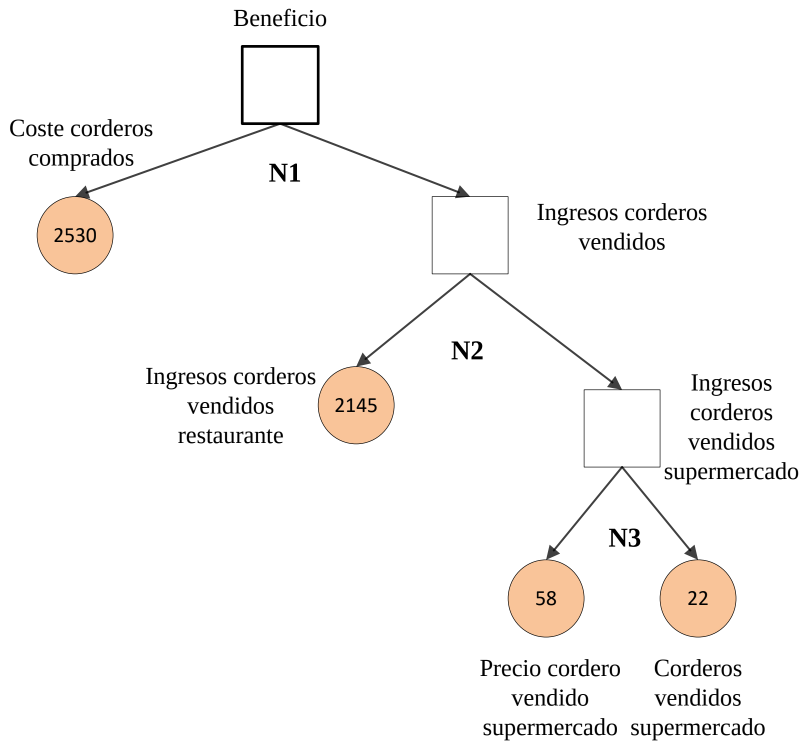


Figura 5.72.

7. Pablo: A ver. Pues…
8. Pau: ¡Ah! Ya sé, ya sé, (introduce [22…; …]) multiplicamos 22 por (introduce [22·…; …]) 58 (introduce [22·58; Pcs=1276]).

Pau aplica de nuevo el razonamiento anterior (ítem 8) y propone multiplicar 22 por 58 lo que supone identificar correctamente la relación $Pcs=Ncs \cdot Pucs$ para averiguar “el dinero que recibe de la venta de los corderos al supermercado (*Pcs*)”.

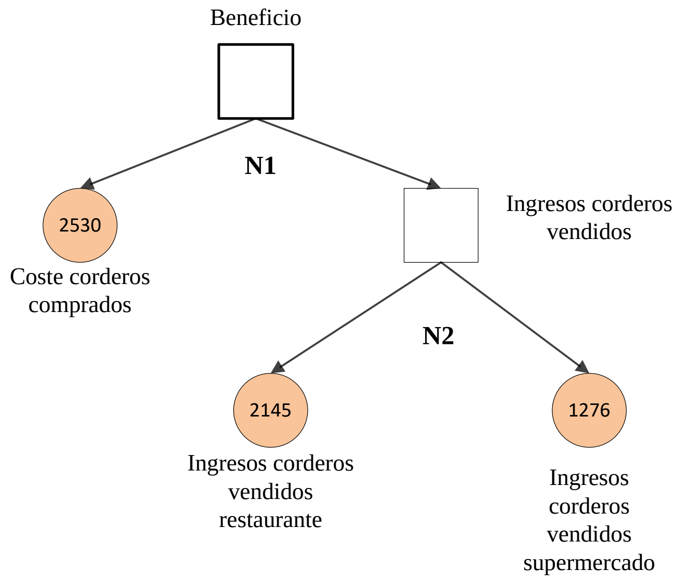


Figura 5.73.

9. (Silencio de nueve segundos, aunque parece que están leyendo el problema otra vez.)
10. Pau: ¡Ah! Ya sé. Sumamos…
11. Pablo y Pau: …sumamos 2145 más (Pau introduce [2145+…; …]) 1276… (Pau introduce [2145+1276; Dv=3421])

Durante el silencio de nueve segundos (ítem 9), Pau propone sumar y ambos alumnos verbalizan que tienen que sumar 2145 más 1276. Esto supone considerar la relación correcta $Dv=Pcr+Pcs$ para averiguar el "dinero que recibe de la venta de todos los corderos (*Dv*)"aplicando un esquema de combinación.

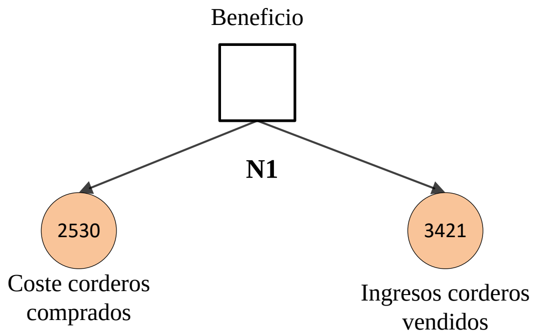


Figura 5.74.

12. Pablo: …y ahora restamos 3421 (Pau introduce [3421…; …]) menos (Pau introduce [3421-…; …]) 2530 (Pau introduce [3421-2530; B=891]).
13. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente.)

Inmediatamente, Pablo (ítem 12) propone restar 3421 menos 2530, es decir, identifica correctamente la relación $Dv=Pcm+B$ para averiguar "el beneficio (*B*)" usando un esquema de cambio en el que deben restar a las ganancias (*Dv*) los costes (*Pcm*). Esto parece indicar que el alumno tiene claro el concepto de beneficio.

5.4.4.3. El caso de la pareja Pablo-Pau en el problema "El Bautizo"

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

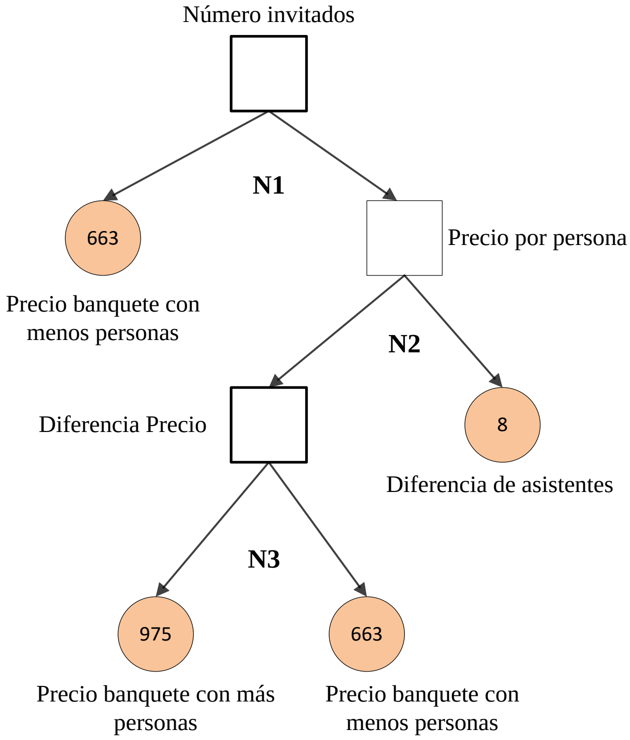


Figura 5.75.

1. (Pablo y Pau leen el enunciado del problema.)
2. Pablo: Pues… 975…
3. Pau: … menos 663.
4. Pablo: Sí, (Pau introduce [975…; …]) menos (Pau introduce [975-…; …]) 663 (Pau introduce [975-663; Dp=312]).

Tras leer el enunciado Pablo (ítem 2) y Pau (ítem 3) proponen restar 975 menos 663, es decir, identifica correctamente una relación entre tres cantidades $Ctm=Ct+Dp$ resultado de aplicar un esquema conceptual de cambio que le permite hallar la "diferencia de precio entre los dos banquetes (Dp=312)".

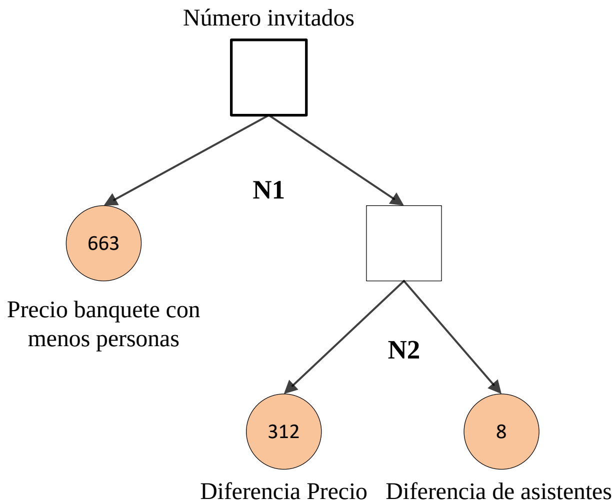


Figura 5.76.

5. Pau: (Lee el nuevo dato en la tabla de cantidades) “Diferencia de precio entre los banquetes”
6. Pablo: Y después… (Pau señala el botón con el dato 312 en la pantalla) 312 (Pau introduce [312…; …]) …
7. Pau: …dividido entre 8…
8. Pablo: …entre…
9. Pau: …y luego lo sumamos.
10. Pablo: No. 312 entre 8 (Pau introduce [312/8; Pm=39]).

Pau (ítem 5) lee la nueva cantidad obtenida, representada en la tabla de cantidades y como un nuevo botón, y (ítem 7) relaciona la nueva cantidad obtenida con las 8 personas más. Así, propone dividir 312 entre 8. Identifica correctamente la relación $Dp=Pm·Pa$ (isomorfismo de medidas de división partitiva) la cual permite hallar el “precio del menú de una persona (*Pm*)”. Sin embargo, y en el que parece el resultado de un proceso de análisis-síntesis en dos niveles, sugiere (ítem 9) que posteriormente se debe sumar el resultado a otra cantidad, lo cual es incorrecto.

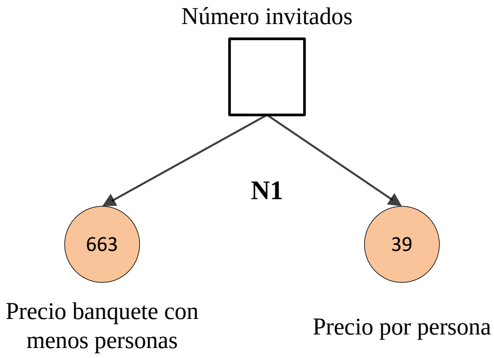


Figura 5.77.

11. Pablo: Y…
12. Pau: …si esto es el menú de una persona…
13. Pablo: …39…
14. Pau: (introduce [39…; …]) …lo multiplicamos (introduce [39·…; …]) por 8.
15. Pablo: …por 8, sí (Pau introduce [39·8; mensaje de error]).

Pau integra (ítem 12) la cantidad desconocida a la que se acaba de asignar valor dentro del contexto del problema y propone (ítem 14) multiplicar 39 por 8. Esta operación daría cuenta de una relación correcta, pero utilizada en el paso inmediatamente anterior, y volvería a calcular la cantidad “diferencia de precio”. El sistema proporciona un mensaje de error donde se indica que la relación ya ha sido usada, pero los estudiantes no parecen leerla.

Este episodio podría poner de manifiesto que los sujetos no realizan un análisis-síntesis completo y que se limitan a llevar cabo procesos parciales atendiendo a las cantidades para las que disponen valor y los esquemas que permiten relacionarlas.

16. Pablo: "El bautizo de un coste total… si hubiesen asistido ocho personas más el banquete hubiese costado 975 euros" (lee parte del enunciado). ¡Ah! 975 (Pau introduce [975…; …]) más (Pau introduce [975/…; …]) …no. A ver. Estaba antes ¿no? 39 por… (Pau borra lo introducido anteriormente) 39 era por 8.
17. Pablo: (Pau introduce [39·…; …]) por 8 (Pau introduce [39·8; mensaje de error]). Pues…

Tras el mensaje de error, Pablo (ítem 16) vuelve a releer el enunciado y parece proponer la suma de 975 con otra cantidad. Posiblemente, lo anterior es consecuencia de atender a la palabra clave "más" en la proposición "ocho personas más el banquete hubiese costado 975 euros". Este pequeño fragmento podría confirmar una tendencia de Pablo a realizar pequeños procesos de análisis-síntesis sin integrarlos en un plan más general. Mientras tanto, Pau parece centrado en llevar a cabo una división (ítem 16). Posiblemente, intenta aplicar el esquema conceptual adecuado, pero no acierta en las cantidades a integrar. Sin embargo, Pablo vuelve a proponer multiplicar 39 por 8 sin darse cuenta que era la misma operación que acababan de introducir. El sistema vuelve a mostrar un mensaje de error que tampoco parecen leer.

18. (Silencio de quince segundos.)
19. (Pablo vuelve a leer el enunciado del problema.)
20. Pablo: No. A ver.
21. Pau: 663… (introduce [663/39; P=17]).
22. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente.)

Tras un silencio (ítem 18) y una nueva relectura del problema, Pau (ítem 21) propone dividir 663 entre 39, es decir, *Ct/Pm*. Identifica correctamente la relación *Ct=Pm·P* ligada a un esquema de isomorfismo de medidas de división cuotitiva. El sistema da como correcta la última operación e indica la finalización del problema siguiendo la lectura L1.

En el post test, Pablo ni siquiera había intentado resolver el problema, mientras que Pau, tras haber aplicado correctamente el primer esquema de cambio y averiguar "el precio del banquete para 8 personas", sea próximo a la cantidad de 663 multiplicando por 2 la cantidad que correspondía a 8 personas. Esa cantidad era 624 que consideró que se aproximaba bastante a 633 y la dio por válida.

5.4.4.4. El caso de la pareja Pablo-Pau en el problema "La Empresa"

Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000 €. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

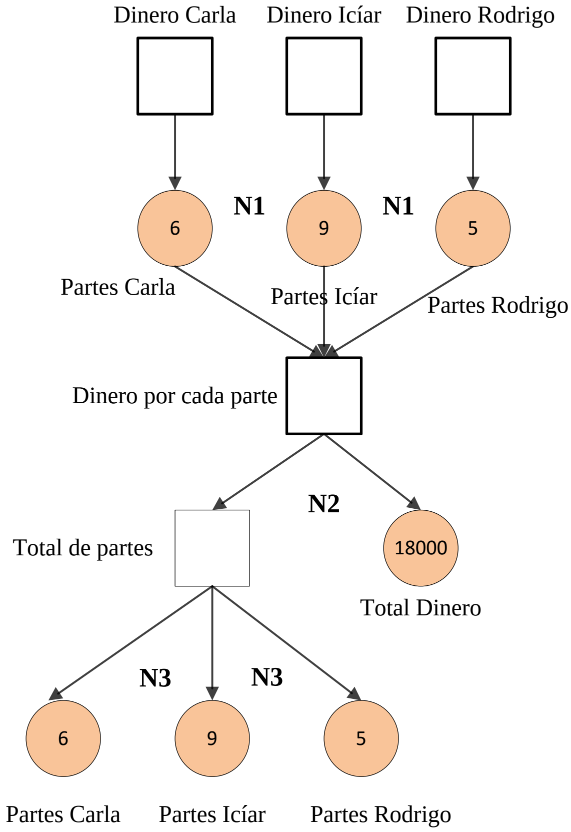


Figura 5.78.

1. (Pablo y Pau leen el enunciado del problema.)
2. Pablo y Pau: 18000 (Pau introduce [18000…; …]) entre (Pau introduce [18000/…; …]) 6 (Pau introduce [18000/6; mensaje de error]).

Tras leer el enunciado Pablo y Pau (ítem 2) propone dividir 18000 entre 6. El sistema responde con un mensaje de error. Los estudiantes utilizan un esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva guiados por una lectura precipitada en la que centran la atención en la palabra repartir. Otra posible explicación supondría que aplican, de manera correcta, el esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva del N2, pero utilizando de manera errónea la cantidad necesaria para averiguar el “dinero que le toca a una parte”. Esto supondría deformarlas cantidades “total de partes” y “partes de Carla” tras colapsar la relación del N3 (Figura 5.79). Esta fue la línea de resolución que siguieron también los dos alumnos en el post test, dividir por cada una de las partes y pensar que esa cantidad era la que le correspondía a cada uno.

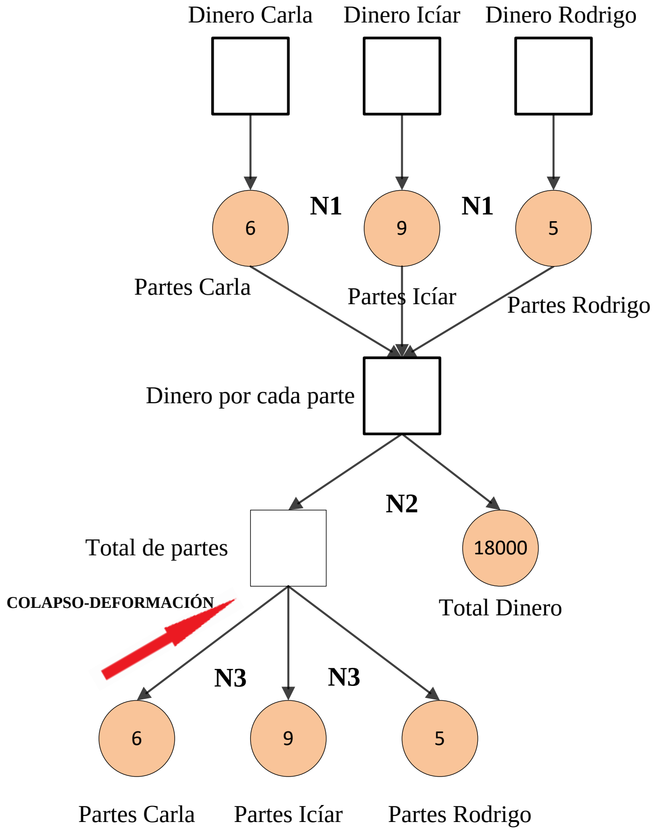


Figura 5.79.

3. Pablo: No. A ver. 6 más 9 más 5… (Pau introduce [6…; …]) más (Pau introduce [6+…; …]) 9 (Pau introduce [6+9…; …]) más (Pau introduce [6+9+…; …]) 5 (Pau introduce [6+9+5; P=20]).

Tras el mensaje de error, Pablo (ítem 3) propone, correctamente, sumar todas las partes. Este razonamiento se apoya sobre un esquema de combinación donde las partes son conocidas y el total es lo desconocido. De esta manera es posible construir la relación $P = Pc + Pi + Pr$, (combinación 1).

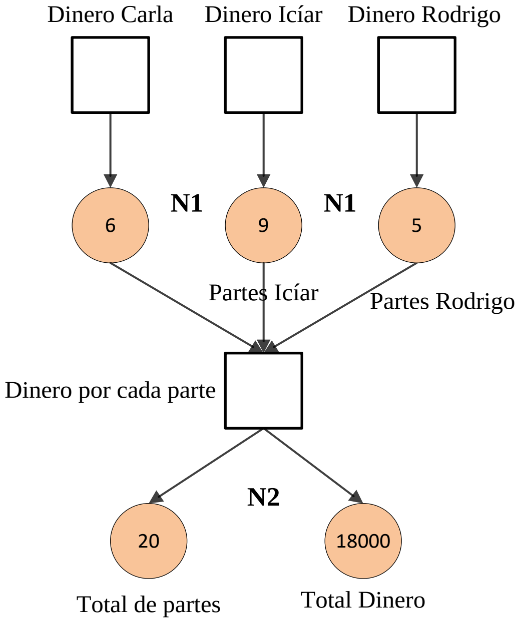


Figura 5.80.

4. Pau: (Lee el nuevo dato en la tabla de cantidades) “Total de partes”
5. Pablo: Y… 18000 entre 20 ¿no?
6. Pau: Sí.
7. Pablo: (Pau introduce [18000…; …]) 18000 dividido (Pau introduce [18000/…; …]) …
8. Pau: …entre 20...
9. Pablo: …20 (Pau introduce [18000/20; Dp=900]).

En el ítem 4, Pau lee el nombre asignado a la incógnita auxiliar que se acaba de calcular. Al identificar que el “total de partes” es 20, Pablo (ítem 5) aplica un esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva usando 18000 y 20. Es decir plantea una operación que supondría considerar la relación correcta $D=Dp{\cdot}P$ (isomorfismo de medidas de división partitiva) para calcular “dinero que le toca a una parte (*Dp*)”.

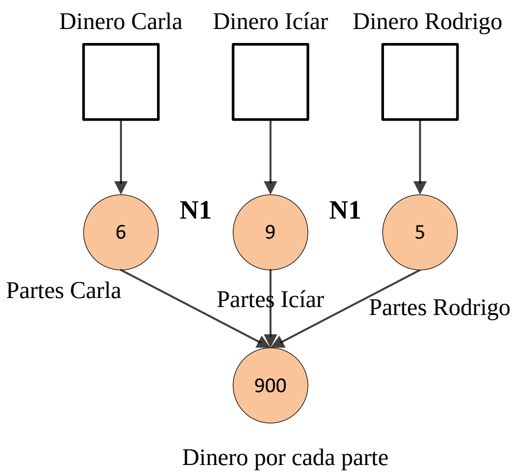


Figura 5.81.

10. Pau: (Lee el nuevo dato en la tabla de cantidades) “Dinero que le toca a una parte”
11. Pablo: Vale. Y 900 por 6 (Pau introduce [900·…; …]) 6 (Pau introduce [900·6; Dc=5400]).
12. Pau: A ver…
13. Pablo: 900 por 9 (Pau introduce [900·9; Di=8100]) ...y 900 (Pau introduce [900…; …]) por 5…
14. Pau: …por 5 (introduce [900·5; Dr=4500]).
15. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente.)

Pau (ítem 10) lee el nombre de la nueva incógnita auxiliar. Esa lectura de la nueva cantidad parece que le permite a Pablo (ítem 11) activar correctamente esquemas de isomorfismos de medidas y la regla de correspondencia que les va a permitir averiguar qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno. Para ello primero propone multiplicar 900 por 6, lo que supone utilizar de manera correcta la relación $Dc=Dp{\cdot}Pc$ para averiguar “el dinero que le corresponde a Carla (*Dc*)”. Posteriormente introducen la relación para Icíar ($Di=Dp{\cdot}Pi$) y por último proponen multiplicar 900 por 5 para averiguar lo que le corresponde a Rodrigo.
El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema. Los estudiantes han seguido la línea de resolución L1.

5.4.5. LA PAREJA ANDREA-MARINA. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SIN HINTS.

5.4.5.1. El caso de la pareja Andrea-Marina en el problema “El Mayorista”

Un mayorista compra en un matadero 55 corderos a 46 euros cada uno. Vende a un restaurante 33 a 65 euros cada uno y el resto a un supermercado por 58 euros cada uno. ¿Qué beneficio obtuvo?

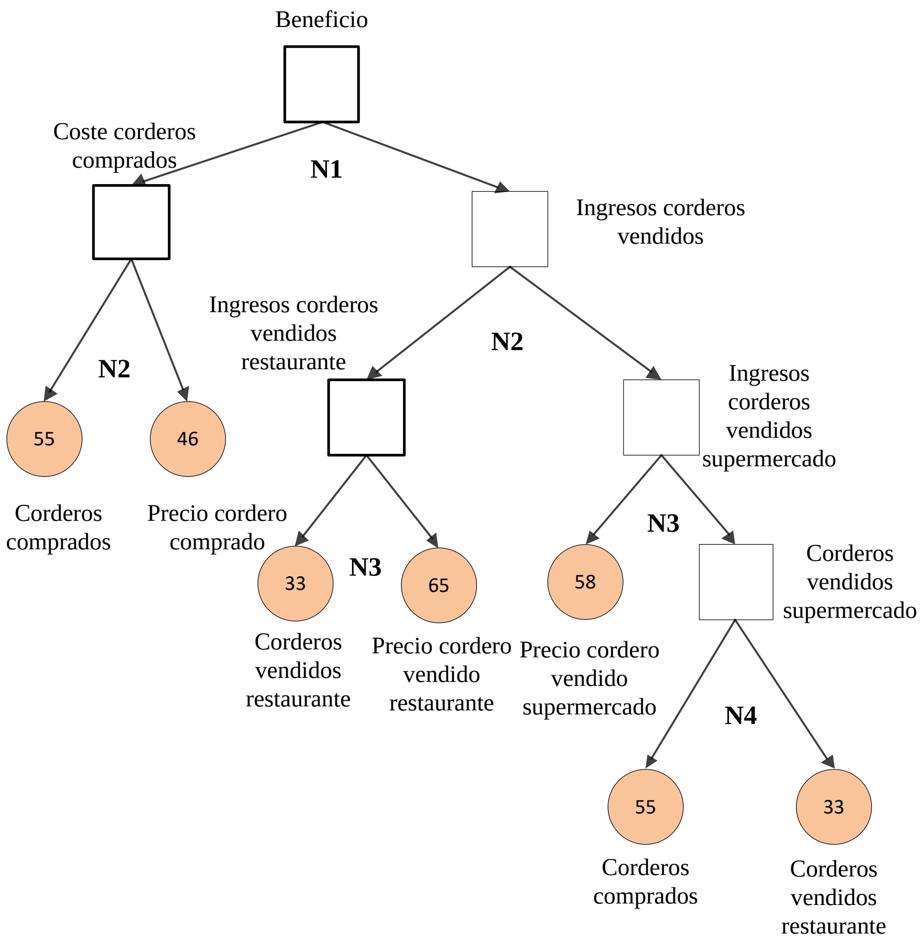


Figura 5.82.

1. (Andrea lee el enunciado del problema.)
2. Marina: Hay que multiplicar 55 por 45 primero.
3. Andrea: Multiplicar 55 por 46 euros y después 33 por 65 y sumarlo.
4. Marina: No sé.
5. (Andrea introduce [55·46; *Pcm*=2530]).

Tras leer el enunciado, Marina (ítem 2) y Andrea (ítem 3) proponen multiplicar 55 por 46 (aunque Marina verbaliza 45). Parece que han identificado correctamente una relación asociada a un esquema de isomorfismo de medidas que permite averiguar el precio que paga el mayorista por todos los corderos. Es decir, identifican correctamente la relación *Pcm*=*Ncm*·*Pucm* correspondiente a la relación que se puede resolver en el N2 de análisis con las cantidades que se conocen hasta ahora.
En el ítem 3, Andrea verbaliza un análisis incorrecto de dos niveles, pero Marina (ítem 4) o no presta atención o no es capaz de comprenderlo.

6. Marina: ¡Mira!

Andrea, siguiendo el plan que ya había establecido, plantea multiplicar 33 por 65 (ítem 7). Marina parece no tener

7. Andrea: 33 (introduce [33…; …]) por (introduce [33·…; …]) 65 (introduce [33·65…; …]) …
8. Marina: … ¿65? ... ¡ah! sí.
9. (Andrea introduce [33·65; *Pcr*=2145]).

demasiado claro el significado de la cantidad 65 aunque al final accede (ítem 8). Ha identificado la relación *Pcr=Ncr·Pucr* ligada a un esquema de isomorfismo de medidas siguiendo la L1 del problema.
Conviene señalar que las dos alumnas realizaron correctamente estas operaciones en el Post.

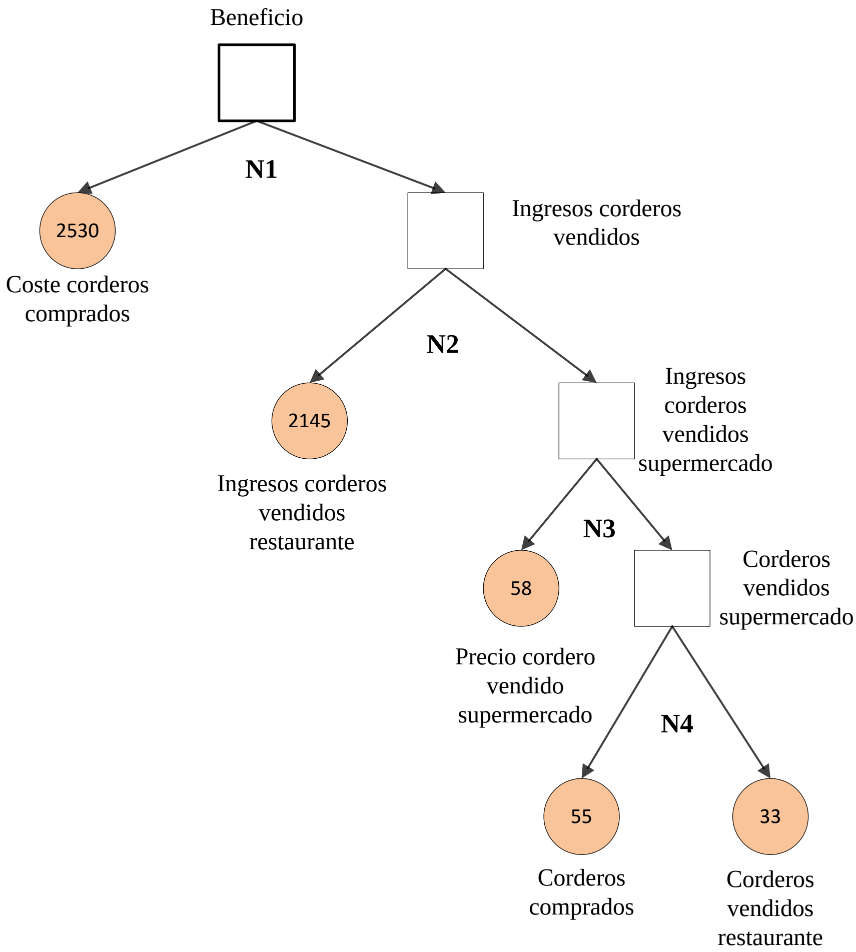


Figura 5.83.

10. Marina: Lo quieres con 58 euros… eso sumarlo con lo otro ¿no?
11. Andrea: Creo que sí (introduce [2530+…; …]) …
12. Marina: …sí sumarlo...
13. (Andrea introduce [2530+2145; mensaje de error]).

Posteriormente, Marina propone relacionar alguna cantidad, que no verbaliza, con la cantidad 58, lo que supondría abandonar el plan incorrecto planteado en el ítem 3. Sin embargo, Andrea, sin verbalizar una justificación, propone (ítem 11) sumar 2530 más 2145. Marina muestra su acuerdo (ítem 12).
Al introducir la operación el sistema proporciona un mensaje de error (ítem 13).

Estas dos cantidades sí aparecen relacionadas en otra lectura de manera aditiva, ya que su diferencia nos proporciona las pérdidas que tendría tras la venta al restaurante y esperando obtener o conocer los ingresos obtenidos con la venta de los corderos al supermercado.
Esta relación ya la había propuesto Marina en el Post.

14. Marina: Hummm. No.
15. Andrea: Una resta…
16. Marina: …a ver sería… (Andrea introduce [2530-…; …]) … es que lo has hecho al revés. Es normal que te diga que no (Andrea introduce [2530-2145; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Andrea propone (ítem 15) restar 2530 menos 2145.Al introducir la operación el sistema proporciona un mensaje de error (ítem 16).

17. Marina: Vuelve a leer el problema para aclararte.
18. Andrea: No.
19. Marina: No, a ver.
20. (Andrea introduce [2530·2145; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Andrea persiste en la idea de seguir utilizando las mismas cantidades que había utilizado en las dos últimas relaciones introducidas (ítem 18) pero en este caso introduce *Pcm·Pcr*. El sistema responde con un mensaje de error.

21. Marina: ¿A ver si es dividir…?
22. Andrea: …ahora tú…
23. Marina: … ¿a ver si es dividir…eh… 2534 entre 65?
24. Andrea: No…está el 58.
25. Marina: No. Lo primero 2530 dividido entre 65 ¿no? Prueba a ver. (Andrea introduce [2530/…;…])…
26. Marina: … dividir no, multiplicar ...
27. Andrea: … ¡ay!...
28. Marina: … ya te has equivocado. Dividir no, multiplicar ¡che! (Andrea borra / e introduce [2530·65; mensaje de error]).

Tras el nuevo mensaje de error, Marina propone (ítem 21) dividir 2534 entre 65, es decir, *Pcm*/*Pucr*. Pero Andrea le comenta que introduzca la cantidad 58 en la relación (ítem 24). Ante la negativa de Marina, Andrea introduce (ítem 25) *Pcm/* y Marina le indica (ítem 26) que no divida, sino que multiplique. El sistema proporciona un mensaje de error.
Parece que las alumnas están intentando resolver el isomorfismo de medidas del N3 sin prestar atención a la adjetivación de las cantidades que están utilizando ni a su significado; mezclan corderos vendidos y comprados, costes con ingresos y precios del restaurante y del supermercado.

29. Marina: Te va a fallar normal. Va a ver Andrea, déjame a mí. Era 58… 65…
30. Andrea: …era esto… (señala en la pantalla el dato 2530)… entre 58.

Marina intenta repasar el significado de algunas cantidades (ítem 29) mientras Andrea propone (ítem 30) dividir 2530 entre 58, es decir, *Pcm/Pucs.* Sin embargo, Marina propone primero (ítem

31. Marina: No, espera. A ver. Entre 65 primero (introduce [2530/65; mensaje de error]).

31) dividir entre 65. El sistema responde con un mensaje de error a esta primera relación.

32. Marina: No.
33. Andrea: Era entre 65.
34. Marina: ¿Entre qué?
35. Andrea: No, entre 58 (señala el dato en la pantalla). (Marina introduce [2530/58; mensaje de error]).

Cuando posteriormente Andrea introduce (ítem 35) su relación, el sistema responde de nuevo con un mensaje de error.
Parece ser que ambas están utilizando el mismo esquema en las dos relaciones. Intentan averiguar el número de corderos dividiendo el coste total entre dos precios (el vendido al restaurante y el vendido al supermercado). No sabemos si están pensando en averiguar los corderos vendidos al supermercado y el problema que tienen es que no están utilizando las cantidades ni la relación correcta para hallar esa cantidad o simplemente están probando distintas relaciones con las cantidades que tienen sin darse cuenta del significado concreto de cada cantidad. En el Post, Andrea sí que había sido capaz de averiguar correctamente los "corderos vendidos al supermercado" y "los ingresos por los corderos vendidos al supermercado".

36. Marina: No. A ver. Vamos a leerlo otra vez. Ya tenemos las dos respuestas ¿no? ¡Ay claro! Es que hemos multiplicado 65 por 58 entonces esos datos ya no nos quedan. Queda 33. ¿O no es verdad?(mirando a Andrea)
37. Andrea: No. El 58 (señala el dato en la pantalla) Hemos hecho 55 por 46, nos ha dado eso (señala el dato 2530) y después eso (señala el dato 2145) pero el 58 no.
38. Marina: ¿Has probado a sumar esto (señala el dato 2530) y esto (señala el dato 2145)? Prueba a sumar eso. Es que a lo mejor lo podemos dividir entre 33. (Andrea introduce [2530+2145; mensaje de error]).

Ahora Marina realiza (ítem 36) un repaso de las cantidades que ya han utilizado en las relaciones correctas anteriores. Manifiesta que ya han utilizado el dato 65 y 58 y que por tanto les queda por utilizar el dato 33. Andrea le indica que el 58 no lo han utilizado todavía y le repasa verbalmente las dos relaciones correctas que han introducido hasta ahora.
Parece ser que el razonamiento que están intentando seguir es averiguar las cantidades que no han utilizado todavía e intentar incluirlas en alguna relación. Parece que la idea de que tienen que aparecer todas las cantidades en las relaciones les está influyendo en el colapso que tienen en la última relación del N4.
Tras el repaso, Marina propone sumar 2530 más 2145 para posteriormente

dividir la cantidad obtenida entre 33. Al introducir la primera relación, el sistema proporciona un mensaje de error.
Marina y Andrea (ya que es la que la introduce) no se han dado cuenta de que es la misma relación que habían introducido anteriormente y tal vez provocada porque siguen buscando el dinero que obtuvo el mayorista en total confundiendo la naturaleza de las dos cantidades dentro del esquema de combinación (dinero que gasta y dinero que ingresa).

39. Andrea: Ves, te lo he dicho.
40. Marina: Entonces… ¡Ay! pues 230… (introduce [2530…;…])…
41. Andrea: …entre 58 ...
42. Marina: … entre 58 no porque ya lo hemos usado ¿no?
43. Andrea: …pues…
44. Marina: …nos falta el 33 ¿no?... no……eh…no.

Posteriormente, Marina propone (ítem 40) dividir la cantidad 2530 entre alguna que no verbaliza. Andrea le indica (ítem 41) que divida entre 58 a lo que Marina le indica que esa cantidad ya la han usado y que falta utilizar la cantidad 33 (ítem 44).
Parece ser que las alumnas siguen empeñadas en realizar un isomorfismo de medidas de división partitiva o cuotitiva fijando como dividendo el “coste de todos los corderos” y como divisor “número de corderos vendidos al restaurante” o “precio del cordero vendido al supermercado”. El último esquema de combinación del N4 les ha producido un colapso que les está provocando realizar operaciones sin sentido y sin previo razonamiento.

45. Andrea: Aprieta ahí (señala el recuadro donde aparecen los datos)
46. Marina: Entre 58. ¿Dónde?
47. Andrea: Ahí. En eso. O eso(señala la cantidad 65) entre eso (señala la cantidad 58)
48. Marina: Qué hay que borrarlo y ya está.
49. Andrea: O esto (señala la cantidad 55) entre 58.
50. Marina: Es que el 55 ya lo hemos usado. Solo nos quedan estos dos resultados. Estos tres.

Tras el razonamiento anterior y con la cantidad 2530 introducida, Marina propone (ítem 46) dividirla entre 58. Mientras, Andrea propone (ítem 47 y 49 respectivamente) dividir 65 entre 58 o 55 entre 58. Marina señala que la cantidad 55 ya la han utilizado en una relación. Andrea propone (ítem 51) utilizar la cantidad 58 que no han utilizado aún. Por ello Marina propone (ítem 52) dividir 58 entre 33 mientras que Andrea propone (ítem 53) sumarlas.
El razonamiento de Marina utiliza un esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva no entera y en el que las dos cantidades no tienen relación

51. Andrea: Es que el 58 no lo hemos usado aún.
52. Marina: ¿Entre 33?
53. Andrea: …más 33.

mientras que en el razonamiento de Andrea aparece un razonamiento aditivo con dos cantidades de distinta naturaleza (precio y corderos) pero más próximo a la última relación necesaria en el N4. De todos modos, Andrea o bien ha deformado el significado de la cantidad 33 (“corderos vendidos al restaurante”) por la cantidad desconocida “corderos vendidos al supermercado” o bien ha confundido la cantidad 58 con 55. A pesar de todo puede haber aplicado un esquema de combinación 1 cuando es necesaria la aplicación de un esquema de combinación 2.

54. Marina: Yo que sé. ¡Ay! Y si probamos este por el 33 (introduce [2530/33;…]) que es lo que nos queda porque esto (señala el dato 65) ya lo hemos multiplicado y esto (señala el dato 58) también.
55. Andrea: (lee) “Precio que paga el mayorista por todos los corderos”.
56. Marina: A ver prueba (introduce [2530/33; mensaje de error]).

De todas formas, Marina propone (ítem 54) dividir 2530 entre 33, es decir, *Pcm/Ncr*. El sistema proporciona un mensaje de error.

La justificación que utiliza Marina es que la cantidad 65 y 58 ya las han utilizado. Pensamos que el problema sigue siendo que las alumnas no acaban de darse cuenta que existen corderos de dos tipos.

57. Marina: No.
58. (Andrea introduce [2530/…;…]).
59. Marina: Espera (Lee) “Dinero que paga el mayorista por todos los corderos”, “Dinero que recibe de la venta de los corderos…”. Es que es diferente.
60. Andrea: (señala en la pantalla el dato 58 con el desplegable de lo que significa el dato)…esa…
61. Marina: … ¿qué?
62. Andrea: ¿Lo has visto? (vuelve a señalar el dato).
63. Marina: No. (lee) “Precio que vende el cordero al supermercado”. Pues sería…2145 dividido entre… 58. Si no es…

Ahora Andrea propone (ítem 58) dividir 2530 entre alguna cantidad que no verbaliza. Marina le dice que no introduzca más y lee las dos cantidades obtenidas con las dos relaciones introducidas correctamente. Marina verbaliza (ítem 59) que las dos cantidades son diferentes.

Creemos que en este momento y por primera vez Marina se ha dado cuenta de que las cantidades que han averiguado son diferentes y a pesar de ser todo dinero, una es lo que paga y la otra lo que recibe.

Al mismo tiempo, Andrea sigue fijándose en la cantidad 58 y tras leer el desplegable de la cantidad, Marina propone (ítem 63) dividir 2145 entre 58. Es posible que Marina al no terminar de leer (ítem 59) lo que significaba la cantidad 2145, piensa que al dividirlas va

64. Andrea: (inaudible) (introduce [2530/2145; mensaje de error]).

a obtener el número de corderos vendidos al supermercado, es decir, parece que ha cambiado el significado de la cantidad 2145 ("Ingresos corderos vendidos al restaurante") por el significado "Ingresos corderos vendidos al supermercado", qué efectivamente le permitiría mediante un isomorfismo de medidas de división cuotitiva, averiguar el número de corderos vendidos al supermercado.

Andrea parece que omite el comentario de Marina e introduce 2530 dividido entre 2145, es decir, Pcm/Pcr. El sistema proporciona un mensaje de error.

Esta relación no tiene ningún sentido en este problema a no ser que Andrea esté pensando averiguar los corderos vendidos al supermercado como división de costes entre ingresos para posteriormente aplicar el isomorfismo multiplicativo del N3 con la cantidad 58 ("precio de cada cordero vendido al supermercado"). Esto indicaría un desconocimiento de los conceptos manejados en la relación y en la adjetivación de las dos cantidades utilizadas en la relación.

65. Marina: ¡Ay! Normal. A lo mejor. Pero bórralo. ¡Ay! aprieta ahí debajo. A ver. Prueba el 2145… (introduce [2145…;…]) era dividir ¿no?...
66. Andrea: …sí…
67. Marina: …sí, dividido entre 58 (introduce [2145/58; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Marina propone (ítem 65) introducir la relación anteriormente propuesta y dividir 2145 entre 58. El sistema proporciona un mensaje de error. La relación podría haber sido válida para averiguar los corderos vendidos al supermercado si 2145 hubieran sido los ingresos obtenidos por los corderos vendidos al supermercado y no al restaurante. Tal vez estén intentando resolver el isomorfismo de medida de división cuotitiva relacionado con los corderos vendidos al supermercado, pero no elige convenientemente las cantidades relacionadas provocando una deformación el significado de la cantidad "ingresos de los corderos vendidos al restaurante" (Figura 5.84).

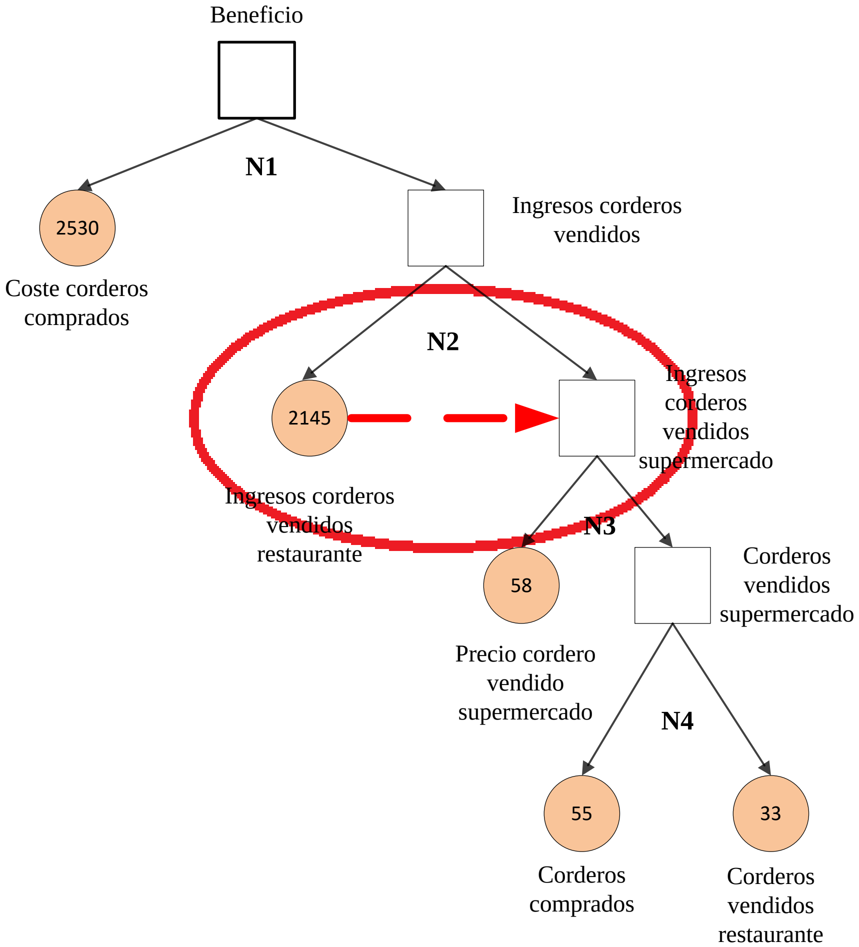


Figura 5.84.

68. Andrea: No.
69. Marina: ¿No? Vuélvelo a leer. A ver si había algo arriba o debajo. No.
70. Marina: Vale. (Lee) "Un mayorista compra a un matadero 55 corderos…" vale.
71. Andrea: A ver.
72. Marina: (Lee) "Vende 33 corderos…"
73. Andrea: Calla, calla, calla. A ver… (introduce [46…;…])…
74. Marina: "…a un restaurante a 65 € cada uno"… 65 euros cada uno…y el resto al supermercado. 65 menos 58 ¿no? …
75. Andrea: …calla, calla. (introduce [46+65; mensaje de error]).

El mensaje de error lleva a Marina a proponer (ítem 69) una relectura del enunciado del problema. Tras la relectura Andrea introduce (ítem 73 y 75) 46 más 65, es decir, *Pucm*+*Pucr*. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 75).
Parece que Andrea está pensando en un esquema de combinación 1 intentando averiguar un precio total de los corderos sin tener en cuenta la naturaleza de los dos precios introducidos, uno respecto al precio de compra mientras que el otro es respecto al precio de venta al restaurante. Sin embargo, Marina propone (ítem 74) restar 65 menos 58.

76. Marina: Prueba 65 menos 58.
77. Andrea: Espera, espera.

Tras el mensaje de error en la relación propuesta por Andrea, Marina propone

78. Marina: Es que como nos vean fallar mucho verás.
79. Andrea: 65 (introduce [65…;…]) ¿menos?...
80. Marina: …65 menos 58.
81. Andrea: (Introduce [65-58; mensaje de error]).

(ítem 76) introducir su relación, es decir, restar 65 menos 58 (*Pucr-Pucs*) en un esquema de combinación 2. El sistema proporciona otro mensaje de error.
El esquema de combinación 2 es el esquema necesario para resolver la última relación en el N4, pero con otras cantidades ("los corderos comprados" 55 y "los corderos vendidos al restaurante" 33). Marina ha aplicado este esquema con los precios de venta de los corderos sin sentido en ninguna lectura del problema.

82. Andrea: No.
83. Marina: No.
84. Andrea: Es que yo quería sumar esto (señala con el puntero del ratón el dato 46) más esto (señala con el puntero el dato 65) más esto (señala con el puntero el dato 58)
85. Marina: ¡Ay! Pues súmalo. Si…
86. Andrea: (introduce [46…;…]) 46 más 65 (introduce [46+65…;…]) más 58 (introduce [46+65+58; mensaje de error]).

Andrea manifiesta (ítem 84) querer sumar 46 más 65 más 58. Es decir, plantea una operación que supondría considerar la relación *Pucm+Pucr+Pucs* en un esquema de combinación 1. El sistema ofrece un mensaje de error.
Parece ser que Andrea ha buscado mediante un esquema de combinación de precios averiguar un precio total sin valorar si los precios eran de venta o de compra como ocurre en este caso. No tiene sentido un esquema de combinación 1 con cantidades de distinta naturaleza.

87. Andrea: No.
88. Marina: A ver… hemos utilizado el 55 y el 46 ¿no?
89. Andrea: …y el 33 y el 65…
90. Marina: …y el 65 y entonces nos faltan 58 euros...
91. Andrea: Lo normal es una resta.
92. Marina: Esto (introduce [2530…;…])…
93. Andrea: …lo normal es una resta.
94. Marina:…esto por (introduce [2530·…;…])…
95. Andrea:…lo normal es una resta…
96. Marina:…pues…¡ah!sí, sí, está bien (introduce [2530·2145; mensaje de error]).

Marina y Andrea realizan una relectura de las cantidades que ya han utilizado en las relaciones correctas y Andrea propone (ítem 91 y 93) realizar una resta que no verbaliza. Marina ignora la propuesta de Andrea e introduce (ítem 94) un producto entre 2530 y 2145, es decir, propone *Pcm·Pcr* en un esquema de isomorfismo de medidas multiplicativo. El sistema proporciona un mensaje de error.
Marina no ha recordado que esta relación ya la habían introducido anteriormente en el problema. Respecto a Andrea no sabemos si está pensando en la relación correcta de combinación 2 con las cantidades correctas o en otra relación donde la operación sea una resta.

97. Marina: No. Prueba tú a ver.

Tras el mensaje de error, Andrea vuelve a señalar (ítem 98) que el beneficio es

98. Andrea: Lo normal el beneficio es hacer una resta.
99. Marina: ¿Y si restamos esto (señala al aire) menos esto? O sea, el precio que paga menos el dinero que recibe.
100. Andrea: A ver. 2530… (introduce [2530…;…])…
101. Marina: …tu prueba, prueba.
102. Andrea y Marina: …menos 2145 (Andrea introduce [2530-2145; mensaje de error]).

hacer una resta. Por eso, Marina propone (ítem 99) restar 2530 menos 2145. El sistema proporciona un mensaje de error. Ninguna de las dos alumnas se ha dado cuenta que esta relación ya la introdujeron al principio de la resolución del problema, pero nos sirve para notar que las alumnas sí que tienen claro el concepto de beneficio como resta pero no como resta de ingresos menos costes sino de costes menos ingresos o al menos como resta de la cantidad más grande y más pequeña. Esta idea de beneficio es la que le faltó a Andrea para realizar correctamente el problema en el Post. De todas formas, siguen sin darse cuenta de los dos tipos de ingresos que tienen, uno de ellos todavía por averiguar.

103. Andrea: No.
104. Marina: No.
105. Marina: A ver. Pensemos un poco más que esto no puede ser tan difícil. A ver si nos pasamos aquí una hora.
106. Andrea: (Introduce [2530…;…])…
107. Marina: …menos (Andrea introduce [2530-58;…]) ¿58?...
108. Andrea: … ¿yo que sé? (introduce [2530-58; mensaje de error]).

Llegado este momento, las alumnas proponen (ítem 106 y 107) restar 2530 y 58. El sistema proporciona un mensaje de error.

Las alumnas ya van un poco perdidas y ya están probando relaciones por probar sin tener en cuenta las cantidades que eligen ni por supuesto su significado y su relación. En este caso la diferencia entre el coste total y el ingreso de venta por cordero al supermercado no tienen ninguna relación directa.

109. Marina: Flipá. ¿Y esta (introduce [2530…;…]) dividida entre…? (introduce [2530/…;…]) una locura, entre…es que quedan 58 €, ¿lo hemos probado esto? (introduce [2530/58;…])…
110. Andrea: …no. Creo que no.
111. Marina: (Introduce [2530/58; mensaje de error]).

Ahora Marina propone (ítem 109) dividir 2530 entre 58 que supondría considerar un esquema de isomorfismo de medida de división cuotitiva.

Este esquema ya lo habían utilizado (ítem 35) y el sistema proporcionó un mensaje de error.

112. Marina: Otra pista. No nos dará pistas.
113. Andrea: A ver.
114. Marina: A ver.
115. Andrea: Espera, espera, (le aparta las manos del ordenador a Marina para que piensen)

Las alumnas vuelven a realizar una relectura de todas las relaciones correctas que han conseguido en el problema y de los datos que han utilizado (del ítem 116 al ítem 125).

Tras la relectura, Andrea sigue realizando un proceso analítico parcial del problema y propone: (1) la resta entre el “coste de

116. Marina: Si estos dos (señala los datos 55 y 46) ya los hemos cogido, ya no, y nos ha dado 2530 (señala el dato en la pantalla)…
117. Andrea: …claro, es que…
118. Marina: …y cogemos el 33 y el 65 que ya está…
119. Andrea: …es que sumando, multiplicando 55 más 46 euros…
120. Marina: …no porque eso ya lo hemos multiplicado y nos lo han dado…
121. Andrea: …vale, y nos ha dado 2530 y después 33 por 65 nos ha dado 2145 (señala el dato)…
122. Marina: …2000 kilos.
123. Andrea: Que va, 2145.
124. Marina: Eso che.
125. Andrea: …y el resto al supermercado por 58 cada uno.
126. Marina: ¡Ay! Pero es que…
127. Andrea: Es una resta vale, es una resta.
128. Marina: Pues habla más alto que no se te oye. Es que lo normal sería sumar esos dos y dividirlos entre 58.
129. (Silencio de cinco segundos.)
130. Marina: Normal que… (inaudible)… lo mismo.
131. Andrea: Tendría que ser lo que sobra para dividirlo entre 58… (inaudible)… ¿lo entiendes?
132. Marina: Sí. ¡Ay! Pues prueba. A ver pensemos un poco que no puede ser tan difícil este problema. Bueno… 2530…
133. (Andrea coge el cursor y se pone a leer el problema otra vez.)
134. Marina: Ya hemos puesto el 56 por 46 y el 33 por 65. Nos queda el 58…y si lo sumamos no nos da.
135. Andrea: Hay que sumar esto (señala 2530) más esto (señala el 2145) más esto (señala el 58) y nos dará…

los corderos comprados” y los ”ingresos de los corderos vendidos al restaurante”; (2) dividir esa cantidad entre “el precio del cordero vendido al supermercado”.

Este proceso analítico parcial es erróneo ya que Andrea no tiene en cuenta que los ingresos que resta a los costes no me van a proporcionar los ingresos que consigue con la venta de los corderos al supermercado ya que al haber beneficio los costes no son iguales a la suma de los ingresos. El razonamiento analítico que realiza Andrea sería correcto si los beneficios fueran de 0 €, cosa que no ocurre, a pesar de que parece que está intentando averiguar los corderos vendidos al supermercado (*Ncs*) pero mediante una relación de cantidades no pertinente.

Tras la finalización del tiempo establecido por el investigador para resolver correctamente el problema se invita a las alumnas a abandonarlo sin resolverlo en su totalidad (ítem 136).

136. (El investigador invita a abandonar el problema sin resolverlo correctamente en su totalidad).

5.4.5.2. El caso de la pareja Andrea-Marina en el problema "El Bautizo"

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

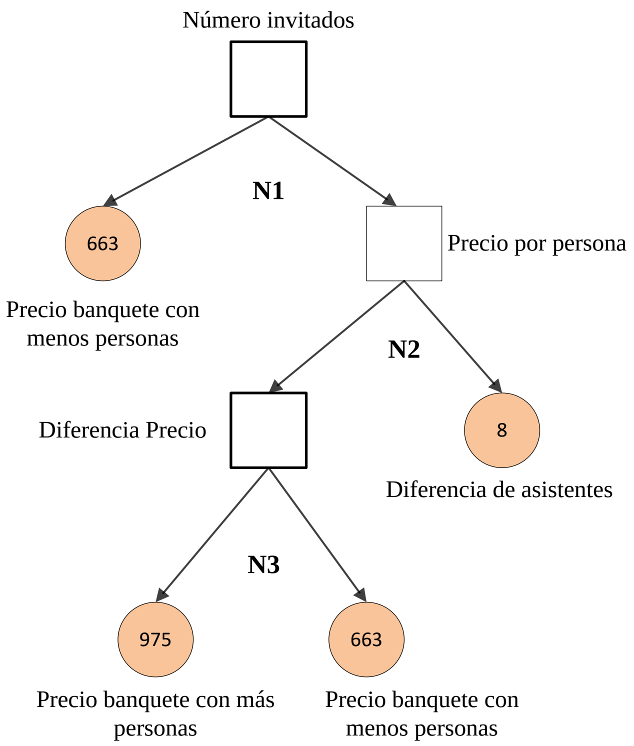


Figura 5.85.

1. (Andrea lee el enunciado del problema.)
2. Marina: Este lo hice yo. Este lo hice yo. Me acuerdo de algo. A ver. Tira hacia arriba. 633 multiplicado por 8. Este me acuerdo que yo lo he hecho (Andrea introduce [663…; …]), creo que es multiplicado por 8 ¿eh?
3. Andrea: … (introduce [663·8; …]) por 8 (introduce [663·8; mensaje de error]).

Después de leer el enunciado, Marina (ítem 2) propone multiplicar 663 por 8. Es decir, propone multiplicar *Ct·Pa*. El sistema proporciona un mensaje de error. La inclusión de ambas cantidades puede ser debida a la presencia a la concatenación "663 € si hubiesen asistido 8 personas más". Sin embargo, el recurso a una multiplicación tiene una difícil explicación.
En cualquier caso, su compañera no muestra oposición al plan.

4. Marina: ¿No?
5. Andrea: ¡Ah! Vale. Ya sé.

Sin embargo, Andrea (ítem 6) tras el error propone sumar, de manera incorrecta, 975 y 663. Marina desaprueba el plan.

6. Marina: A ver. Piensa un momento (Andrea introduce [663…; …]) 33… (Andrea introduce [663+975; …]) ¿qué? ¿qué haces? (Andrea introduce [663+975; mensaje de error]).

7. Marina: A ver. Si dividimos…
8. Andrea: … ¿el qué?, ¿esto?...
9. Marina: …633 (Andrea introduce [663…; …]) entre 8 (Andrea introduce [663/8; …]) este lo he hecho yo. Me acuerdo mucho.
10. (Andrea introduce [663/8; mensaje de error]).

Marina (ítem 7) propone dividir 663 entre 8. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 10) que posiblemente no leen por la celeridad con que cierran la ventana.
Posiblemente ha modificado el significado de las cantidades con valor 663 u 8. O bien supone que (1) 663 es el total de lo que han pagado las 8 personas (y no como lo que había pagado cada persona), lo que supondría un colapso-deformación (2), o considera que al banquete han asistido solo 8 personas. En cualquier caso, Marina parece aplicar un esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva a la situación, necesario en el N2, aún sin conocer el número de cantidades suficientes para aplicarlo, pues no ha abordado el N3.

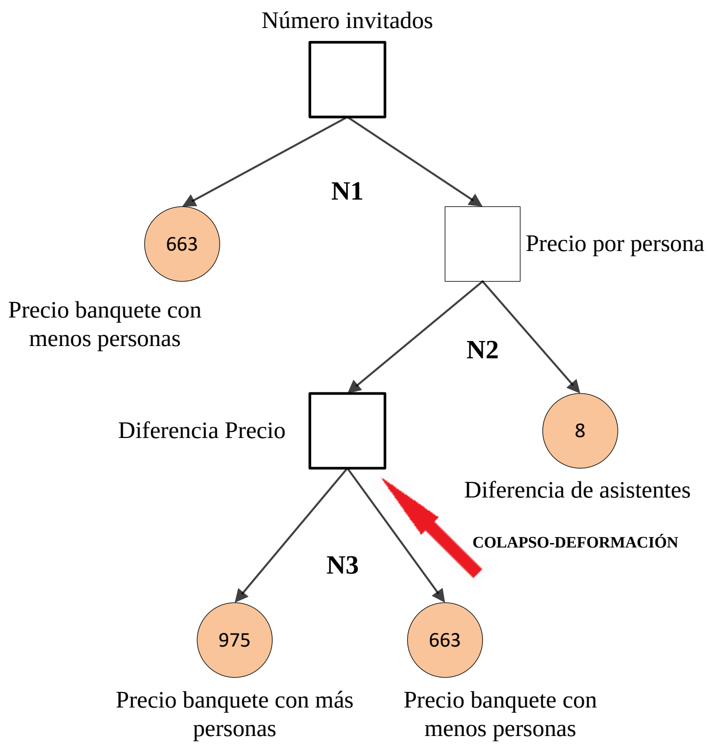


Figura 5.86.

11. Andrea: No.
12. Marina: No. "…633 euros. Si hubiesen asistido 8 personas más…" (lee).
13. Andrea: …más, 8 personas más...
14. Marina: …8 personas más...
15. Andrea: … ¡ya sé!...
16. Marina: …633 más 8. (Andrea introduce [663+…; …]) ¡ah! ya le hemos pillado el truquillo (Andrea introduce [663+8; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Andrea (ítem 13) y Marina (ítem 16), proponen, de manera incorrecta, sumar 663 más 8, es decir *Ct*+*Pa*.
Las alumnas parecen haber recuperado la propuesta inicial, pero corrigiendo la operación.
En tres de sus cuatro intentos han utilizado los valores 663 y el 8. Esto confirmaría que posiblemente han centrado su atención en la concatenación "663 € si hubiesen asistido 8 personas más". Ninguna de las dos alumnas parece aplicar elementos del control de proceso para validar sus propuestas. Por ejemplo, en ningún caso han valorado que están operando aditivamente cantidades de distinta naturaleza (dinero y personas).

17. Marina: No. Pues no nos da. Y has probado a sumar…
18. Andrea: … a ver…
19. Marina: …no espera… a dividir… no… 975 entre 8 (Andrea introduce [975/8; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Marina (ítem 19) propone dividir 975 entre 8. Parece volver a aplicar un esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva, pero en este caso utilizando la cantidad 975 en lugar de 663. Las dos posibilidades planteadas anteriormente para explicar el origen del error vuelven a ser válidas en esta situación.

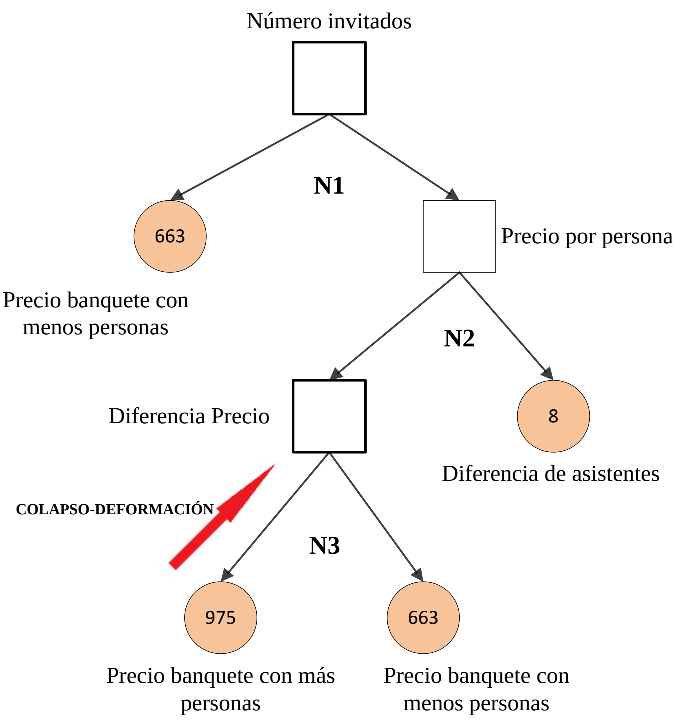


Figura 5.87.

20. Marina: O por… lo que quieras...y por…por 8…
21. Andrea: … ¿el qué? ¿esto?...
22. Marina: … sí. Es que ya lo hemos probado con el otro y no funciona. Pues algo tendrá que ser.
23. (Andrea introduce [975·8; mensaje de error]).

Tras el intento anterior fallido, Marina (ítem 20) propone multiplicar 975 por 8. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 23).
Marina realiza propuestas en las el único elemento común parece ser un intento de relacionar las cantidades conocidas 975, 663, 8 en proceso de *gaming the system* sin el gobierno de un plan.

24. Andrea: No.
25. Marina: No. Si este me acuerdo que lo hice yo.
26. Andrea: El banquete vale 663 euros…
27. Marina: …y si hubiesen asistido 8 personas más…
28. Andrea: …y si hubiesen asistido 8 personas más…
29. Marina: …hubiese costado 975 euros.
30. Andrea: …y todas personas toman el mismo (enfatiza la palabra) menú...
31. Marina: …el mismo. Pero no sabemos lo que cuesta el menú.
32. Andrea: Es que yo creo que es esto (señala el dato 663) más esto (señala el dato 975) …
33. Marina: Espera que voy a probar una cosa. (Introduce [975-…; …]). A ver. Sería el mayor, porque si coges el pequeño de arriba no te lo coge. Hay que ser listos (introduce [975-663; *Dp*=312]).

En este punto, las estudiantes parecen buscar un plan que inician con la relectura del enunciado (ítems 26-31). Tras esto, Andrea (ítem 32) propone sumar 663 más 975 sin percatarse que esta fue la segunda operación que plantearon. Podemos concluir que Andrea se sitúa en el nivel de análisis correcto, y que aplica un esquema aditivo, pero no lo articula de manera correcta para dar como resultado una relación válida.
Sin embargo, Marina (ítem 33) recoge la propuesta de Andrea y propone restar 975 menos 663.Es decir, identifica correctamente una relación entre tres cantidades *Ctm*=*Ct*+*Dp* correspondiente a un esquema conceptual de cambio. El sistema considera correcta la operación y le asigna a la cantidad la “diferencia de precio entre los dos banquetes (*Dp*=312)”.

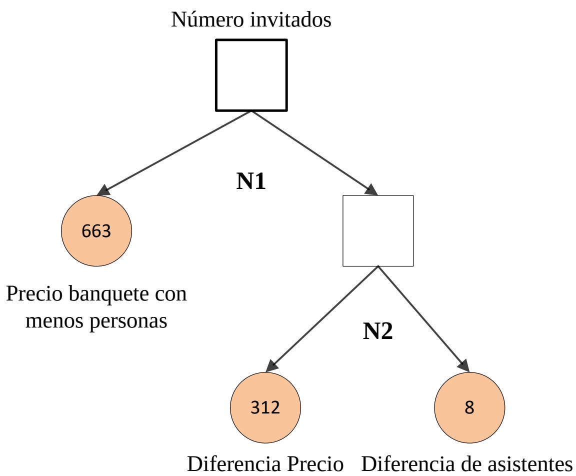


Figura 5.88.

34. Marina: ¡Ves! Mira. “Uno. Diferencia de precio entre los banquetes” (lee).
35. Andrea y Marina: ¡Ah! Ahora eso…
36. Marina: … dividirlo…
37. Andrea: …entre 8…o por 8…
38. Marina: …o por 8 claro… (Andrea introduce [312…; …]) entre 8, entre 8. (Andrea introduce [312/8; …]) Primero entre 8. Que tiene que funcionar (Andrea introduce [312/8; *Pm*=39]).

Marina (ítem 36) propone dividir la nueva cantidad determinada entre 8, pero Andrea (ítem 37) vacila. La duda entre si es necesario multiplicar o dividir la resuelve Marina y propone dividir 312 entre 8. De esta manera, identifican correctamente la relación $Dp=Pm\cdot Pa$ (isomorfismo de medidas de división partitiva) y determinan el “precio del menú de una persona (*Pm*)” en la L1 del problema.

La vacilación de las alumnas en un primer momento podría interpretarse como una dificultad para encajar las cantidades en el esquema de isomorfismo de medidas o en su posterior procesado para dar lugar a una relación.

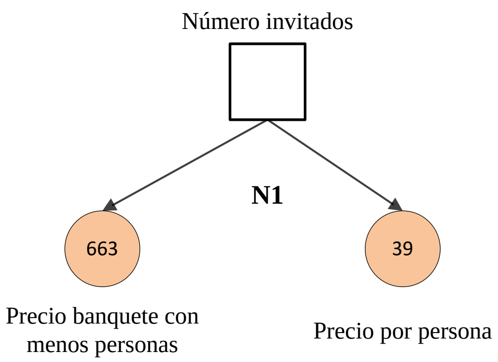


Figura 5.89.

39. Marina: Vale. Ya no queda más ¿no?
40. (Andrea introduce [312+…; …])
41. Marina: …más 39... (Andrea introduce [312+39; mensaje de error]).

Ahora Andrea (ítem 40) y Marina (ítem 41) proponen sumar 312 más 39. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 41). Las estudiantes no ponen en juego ningún proceso de control pues las cantidades ni tan solo son de la misma especie (una es extensiva y la otra intensiva).

42. Marina: No.
43. (Andrea introduce [312…; …])
44. Marina: …ahora… ¿qué?, ¿qué?, ¿qué?...
45. Andrea: …entre 39 y por 39…
46. Marina: A ver, para, (lee) “Precio del menú de una persona”

Tras el mensaje de error, Andrea propone dividir 312 entre 39. El sistema proporciona un mensaje de error indicando que la relación ya ha sido usada (ítem 47). Parecen no leerlo por la celeridad con que cierran la ventana y por la ausencia de comentarios posteriores.

47. Andrea: (introduce [312/39; mensaje de error]).

48. Marina: No.
49. Andrea: …por 39…
50. Marina: A ver. ¿Cuántas personas había? (Andrea introduce [312·…; …]), el banquete… (señala el dato 663 en la pantalla) …vale… (Andrea introduce [312·39; mensaje de error]).

Ahora Andrea (ítem 49) propone multiplicar 312 por 39. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 49). Andrea, de nuevo, parece utilizar la estrategia del *gaming the system* para intentar probar con todas las combinaciones posibles entre las cantidades que considera que se deben utilizar, pero sin buscar más explicación. Mientras, Marina (ítem 50) se centra en una nueva relectura de la pregunta del problema y de las cantidades conocidas y señala en la pantalla la cantidad que quiere introducir en la próxima relación.

51. Marina: 633 euros por 39… ¿no?... 39 es el menú de una persona…
52. (Andrea introduce [663·…; …])
53. Marina: … 633 euros por 39…creo, creo… (Andrea introduce [663·39; mensaje de error]).

Marina (ítem 51) propone multiplicar 663 por 39, es decir, $Ct{\cdot}Pm$. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 53).
A pesar del de error, Marina parece haber utilizado un isomorfismo de medidas entre las cantidades para desencadenar el análisis, pero no ha conseguido relacionar las cantidades de manera correcta.

54. Marina: No. ¿Y dividiéndolo entre 39?
55. Andrea: Se supone que las 8 personas ya están. Entonces sería 975(introduce [975·…; …]) …
56. Marina: …975 por 39. (Andrea introduce [975·39; mensaje de error]).

Tras el error, Marina (ítem 54) propone dividir 663 entre 39, lo que sería correcto y parece poner de manifiesto que reflexiona sobre el esquema correcto. Es decir, identifica correctamente la relación $Ct=Pm{\cdot}P$a partir de un esquema de isomorfismo de medidas de división cuotitiva para hallar “el número de personas que asistieron al bautizo (P)”. Sin embargo, Andrea (ítem 55) se opone. Justifica que debería usarse 975y no 663 porque “las 8 personas ya estarían incluidas” y propone multiplicar en lugar de dividir.
Marina no se opone al plan de Andrea (ítem 56).

57. Marina: No. A lo mejor sería sumas lo que hay…312 más 39 ¿no? (Andrea introduce [312+39; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Marina (ítem 57) no recupera su plan correcto y propone sumar 312 más 39. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem

57). Posiblemente su plan correcto solo había sido el resultado del fracaso ante 663·39.
Por otro lado, este cálculo ya había sido introducido anteriormente (ítem 41) con resultado negativo, lo que pone de manifiesto el escaso control del proceso

58. Marina: Va a ver. El 8 ya lo hemos utilizado…no es que hemos utilizado todos los números ya. El 39… (lee) "Cuántos invitados asistieron al banquete" (Andrea introduce [975+…; …]) …más 633, (Andrea introduce [975+312; …]) 663 ¿no? (Andrea introduce [975+312; mensaje de error])

Marina (ítem 58) propone sumar 975 más 663, un intento ya realizado (ítem 6), lo que supondría volver a un nivel de análisis ya superado. Pero Andrea (ítem 58) introduce la operación incorrecta 975 más 312. Estas cantidades se conectan mediante una relación también ya utilizada. En definitiva, las estudiantes vuelven a aplicar esquemas ya usados para intentar establecer relaciones entre cantidades (ya relacionadas). De todo lo anterior se deduce que no consiguen integrar de manera adecuada las cantidades desconocidas que ya han determinado.

59. Marina: ¿Qué haces?...
60. Andrea: …más…
61. Marina: …por 663. Este (señala el dato 975) más este (señala el dato 663) … ¿o ya lo hemos probado?
62. Andrea: Si, ya lo hemos probado.
63. Marina: No, porque nos ha dado (señala el dato 312) 312, un número menor. (Andrea introduce [975+663; mensaje de error]).

Siguiendo con las actuaciones anteriores, y tras el mensaje de error, Marina (ítem 61) propone sumar 975 más 663.
Marina intenta obtener el visto bueno de Andrea preguntándole si ya la habían introducido. A lo que Andrea responde de manera afirmativa (ítem 62). Sin embargo, Marina (ítem 63) replica diciendo que las dos cantidades las habían restado para obtener el 312 y no sumado. Efectivamente, esta operación ya la habían introducido en el ítem 6 y pone de manifiesto la dificultad de Marina para asignar un significado a las cantidades dentro del contexto del problema.

64. Andrea: (Coloca el cursor encima de los botones de los datos y lee) "Coste total del banquete" …
65. Marina: (lee)…"8, personas que han asistido de más", "Coste total del banquete con ocho personas más"

Tras una relectura de las cantidades conocidas en la tabla de cantidades, Marina (ítem 69) propone restar 312 menos 39, es decir *Dp-Pm*, pero Andrea introduce 975 menos 39 (*Ctm-Pm*).
Andrea ha introducido una operación en el que aparecen las dos cantidades necesarias para resolver el problema,

66. Andrea: (lee) “Diferencia de precio entre los dos banquetes”
67. Marina: Eso (señalando el dato 312) lo acabamos de dividir ahora. Mira, está ahí arriba.
68. Andrea: (lee) “Precio del menú de una persona”
69. Marina: 312 menos 39. (Andrea introduce [975-…; …]) menos 39. (Andrea introduce [975-39; mensaje de error]).

pero las ha relacionado de manera aditiva. Posiblemente, Andrea se limita a combinar cantidades sin ser capaz de identificar si la operación tiene o no sentido. Es decir, podríamos interpretar que han sustituido los procesos de análisis-síntesis por la combinación aleatoria.

70. Marina: A lo mejor acabamos o a lo mejor no.
71. Andrea: A ver. No sería… “coste total del banquete con ocho personas más…” (lee). Menos 39.
72. Marina: Eso, vale, podría ser. Menos 39 (Andrea introduce [975-39; mensaje de error])

Tras el mensaje de error, Andrea (ítem 71) propone introducir 975 menos 39. Centra su atención en la palabra clave “más”, algo que ya ha ocurrido en otros momentos de la resolución.
Ambas alumnas están teniendo dificultades para interpretar el significado del problema en su conjunto y se fijan en palabras con un significado descontextualizado para introducir las relaciones.

73. Andrea: Vale, no.
74. Marina: Vamos a leerlo otra vez por si acaso.
75. (Andrea vuelve a leer el enunciado del problema en voz baja.)
76. Marina: A ver. Este es (lee y coge el tutor) “el coste total del banquete con ocho personas más”. Tenemos que utilizar este y otro. ¿El 312 lo hemos utilizado? No.
77. Andrea: No.
78. Marina: Pues el 312 ese menos 312 (Andrea introduce [975-312; mensaje de error]).

Tras una nueva lectura del enunciado, Marina (ítem 78) propone restar 975 menos 312. La operación es el resultado de una relación correcta, pero que ya ha sido empleada previamente. Es decir, vuelve a realizar un análisis en un nivel por el que ya habían circulado. Esto podría indicar, nuevamente, que no son capaces de integrar las cantidades desconocidas ya determinadas en el proceso de resolución. Es decir, las alumnas siguen sin ver un problema de una etapa en el que hay datos innecesarios. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 78) donde se pone de manifiesto que esa operación calcularía una cantidad ya conocida, pero parece que no leen el mensaje dada la celeridad con que cierran la ventana.

79. Marina: ¿No? No, no pasamos ni uno ¿eh?
80. Andrea: Y vamos probando…
81. Marina: …espera un poquito, 312 dividido entre 39. Podría funcionar

De nuevo Marina (ítem 81) propone dividir 312 entre 39. Esta operación ya la había planteado en el ítem 47. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 81). Nuevamente parecen no leer el

¿no? A ver… (introduce [312/…; …]) … si dice que hay eso… (introduce [312/39; mensaje de error]).

mensaje de error que les informa que esa relación les proporciona una cantidad ya conocida.

82. Marina: No.
83. Andrea: ¿Pero ese no lo habías hecho tú?
84. Marina: ¿Eh?
85. Andrea: ¿Pero ese no lo habías hecho tú?
86. Marina: Yo algo. Me acuerdo de algo, pero no de todo. Nos hemos quedado con dos igual que en el otro problema. (Andrea introduce [39·8; …]) A ver, 39 por 8. (Andrea introduce [39·8; mensaje de error]).

Andrea (ítem 86) propone multiplicar 39 por 8 y el sistema proporciona un mensaje de error. Por tercera vez consecutiva se ha propuesto una relación ya utilizada para determinar una cantidad ya conocida.

87. Marina: No. El 8 ya lo hemos utilizado, no creo…
88. Andrea: …pero puede ser…
89. Marina: A ver 312…
90. Andrea: …312 por 8 (Marina introduce [312…; …]) ¿no?
91. Marina: 312…
92. Andrea: …también puede ser…
93. Marina: … (introduce [312·8; …]) por 8. A ver, vamos a probar tu idea, (introduce [312·8; mensaje de error]).

Ahora Andrea (ítem 90) propone multiplicar 312 por 8, es decir, $Dp{\cdot}Pa$. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 93). Parece ser que Andrea y Marina están aplicando la técnica de ir relacionando las cantidades conocidas de distinta manera esperando que la suerte les dé alguna operación como válida.

94. Andrea: Es que…
95. Marina: Ahora la mía que se me ha ocurrido algo que está de rechupete. 312 (introduce [312 ·…; …]) por 39 (introduce [312·39; mensaje de error]).

Ahora es Marina la que prueba suerte y propone (ítem 95) multiplicar 312 por 39. El sistema responde con un mensaje de error (ítem 95). Esta ya era una relación que había empleado anteriormente (ítem 50).

96. Andrea: Ya lo hemos probado.
97. Marina: ¡Ah! Pues, perdón. ¿Y 312 menos 39?
98. Andrea: También.
99. Marina: Y trescientos…
100. Andrea: …también.
101. Marina: Si es que, no, que no. Vamos a verlo porque hay que pensar un poco.

Tras plantear una serie de operaciones apoyadas en relaciones correctas ya empleadas, Andrea (ítem 102) propone sumar 39 más 8, es decir, $Pm+Pa$. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 107). En este deseo de probar, Andrea ha cambiado las cantidades sin valorar que está incluyendo en una relación aditiva cantidades de distinta naturaleza.

102. Andrea: ¿Y hemos probado 39 más 8? ¿Hemos probado 39 más 8?
103. Marina: 39…
104. Andrea: …más 8, ¿lo hemos probado?
105. Marina: No. Pero no creo que sea eso. Fíjate en el problema ¿no?
106. Andrea: Pon el 312
107. Marina: A ver, espera. Vamos a probar tu idea que no creo que sea, pero… (introduce [39+8; mensaje de error]).

108. Marina: Es que no es.
109. (Silencio de diez segundos.)
110. Marina: Con tantos datos que había y ahora lo ha convertido en seis. 663… coste total, tenemos que utilizar el 975 porque es lo que cuesta… (Andrea introduce [975·39; mensaje de error])

Andrea (ítem 110) introduce la operación 975 por 39 y el sistema proporciona un mensaje de error. De nuevo ha usado una relación empleada anteriormente (ítem 56).
Marina (ítem 110) verbaliza que deben de centrarse en los seis datos. Esto podría interpretarse como una confirmación de seguir utilizando una estrategia de prueba y error.

111. Marina: No.
112. Andrea: Es que tendría que ser lo que en total vale el banquete más los 39…
113. Marina: ¡Ay! pues pruébalo. En total lo que vale el banquete es 633 más…no, no… (Andrea introduce [663…; …]) 633 por 39. Ya lo hemos probado (Andrea introduce [663·39; mensaje de error]).

Andrea (ítem 112) verbaliza "tendría que ser lo que en total vale el banquete más los 39". Esto pone de manifiesto una total desconexión con la resolución. Finalmente, Marina (ítem 113) propone multiplicar 663 por 39 obteniendo un mensaje de error (ítem 113). La opción elegida ya había sido introducida anteriormente (ítem 53).

114. Andrea: Es algo por 39, porque si el 39 es lo que vale…
115. Marina: …es algo también de 975 porque mira lo que pone (señala y lee) "coste total del banquete con ocho personas más". Eso al final cuesta… (Andrea introduce [975-8; …]) ¿menos 8? ¿tú flipas? (Andrea introduce [975-8: mensaje de error]).

Posiblemente, ante el fracaso anterior, Andrea (ítem 114) propone que deben multiplicar "algo" por 39. Por su parte, Marina (ítem 115) centra la atención en el valor 975 justificándolo en que es el "coste total del banquete con ocho personas más". Como respuesta Andrea realiza una interpretación literal que le lleva a introducir 975 menos 8.

116. Marina: ¿Cómo va a ser eso? A ver. (introduce [975…; …]) 975…
117. Andrea: …es algo por 39 porque el 39…

Entre los ítems 116-121 parecen poner en común la cantidad (975 y 39) sobre la que cada una centraba su razonamiento (ítems 113 y 114) y proponen (ítem 122)

118. Marina: … ¿más 39?... (introduce [975+39; …]) …
119. Andrea: …es el menú…
120. Marina: A ver. ¿Eso qué es?
121. Andrea: (lee) “Precio del menú…”
122. Marina: (lee) “Precio del menú de una persona” (introduce [975+39; mensaje de error]).

sumar 975 y 39. El sistema proporciona un mensaje de error. Podemos concluir que sigue sin existir plan y que se plantean operaciones como combinaciones de cantidades atendiendo a algunas marcas que observan en el enunciado.

123. (El investigador invita a abandonar el problema sin resolverlo correctamente en su totalidad).

Una vez superado el límite de tiempo establecido para resolver un problema. El investigador invita a las alumnas a abandonarlo sin resolverlo en su totalidad (ítem 123).

5.4.5.3. El caso de la pareja Andrea-Marina en el problema “La Empresa”

Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000€. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

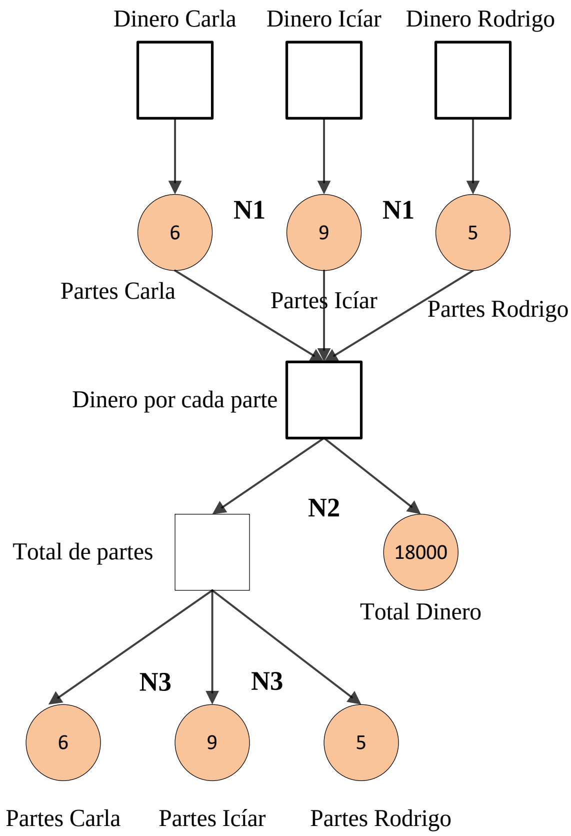


Figura 5.90.

1. (Andrea comienza a leer el enunciado del problema, pero no la finaliza ya que se inicia un diálogo.)

Tras la lectura del problema, Andrea (ítem 3) propone sumar todas las partes. Ha identificado correctamente un

2. Marina: Vale, ya, ya, este está bien.
3. Andrea: 9 más 5 más 6.
4. Marina: Vale, vamos a probarlo. (introduce [9+…; …]) No creo. No creo, pero bueno (introduce [9+6+5; *P*=20]).

esquema de combinación donde las partes son conocidas y el total desconocido y establece la relación $P=Pc+Pi+Pr$ en el N3 de análisis. Ambas alumnas plantearon correctamente este primer paso en el post a pesar de las dudas que ha mostrado Marina (ítem 4) mientras introducía la operación.

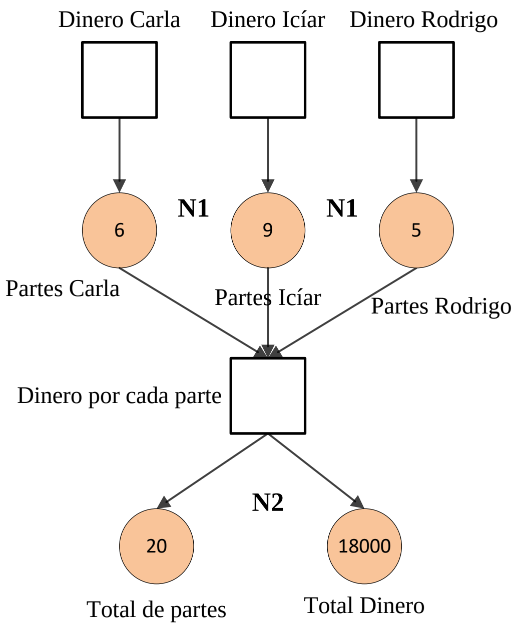


Figura 5.91.

5. Marina: ¡Ah! mira sí.
6. Andrea: (lee) "Total de partes entre los tres".
7. Marina: Y ahora este (introduce [18000…; …]) dividirlo… (introduce [18000/…; …]) …
8. Andrea: …entre 20…
9. Marina: …entre 20 (introduce [18000/20; Dp=900]).

Andrea (ítem 6) lee, en la tabla de cantidades, el nombre de la nueva cantidad determinada. Tras leer, Marina (ítem 7) y Andrea (ítem 8) proponen dividir 18000 entre 20. Esto supone considerar la relación correcta $D=Dp\cdot P$, consecuencia de aplicar un isomorfismo de medida de división partitiva, para calcular el "dinero que le toca a una parte (*Dp*)".

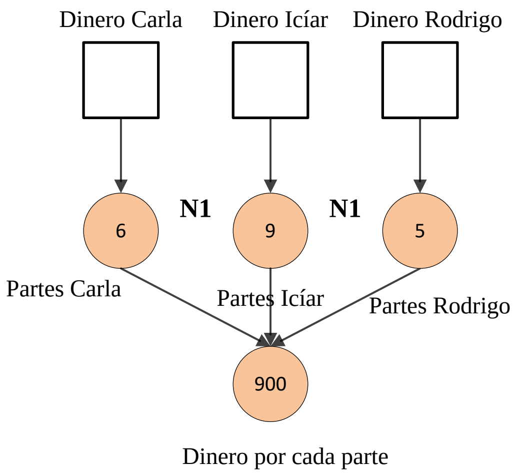


Figura 5.92.

10. Marina: 900
11. Andrea: (lee) "Dinero que le toca a una parte"
12. Marina: 900 menos 18000 (Andrea introduce [900…; …]) 900 menos 18000 (lee) "dinero que le toca a una parte" …menos 18000…
13. Andrea: … (introduce [900-18000; …]), hombre no, tendría que ser al revés (borra lo introducido)

Andrea (ítem 11) lee el nombre de la cantidad obtenida en la tabla de cantidades. Marina (ítem 12), de manera incorrecta, propone la operación 900 menos 18000 y lo justifica. Mientras escribe la expresión, Andrea (ítem 13) se da cuenta que el minuendo es menor que el sustraendo y borra lo introducido.

14. Marina: No, es que está mal, aprieta, es que está mal. (lee) "Dinero que le toca a una parte" "…que le toca a una parte" …a una parte…tendría que ser a tres partes… ¿dónde está el tres?...
15. Andrea: …900 por 20… (introduce [900·…; …]) …
16. Marina: …900 por 20 que hay 20…
17. Andrea: … ¿o entre 20?… (introduce [900·20; mensaje de error]).

Marina (ítem 14) apunta a que la relación que habían considerado era incorrecta pues solo había considerado una parte cuando eran tres partes. Como consecuencia, pregunta si existe un botón con la cantidad conocida 3. Esto nos lleva a pensar que, efectivamente, Marina estaba planteando un reparto equitativo. Sin embargo, Andrea (ítem 15) multiplica 900 por 20 y el sistema proporciona un mensaje (ítem 17) en el que se indica que la relación propuesta ya había sido utilizada (de hecho, el 900 procedía de dividir 18000 entre 20). Por la celeridad en que han cerrado la ventana suponemos que no han leído el mensaje de error.

18. Marina: No. 900 entre 20. Mira a ver que este es fácil. (Andrea introduce [900/20; mensaje de error]).

Posiblemente atendiendo a la propuesta de Andrea (ítem 17), Marina (ítem 18) propone dividir 900 entre 20. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem

18). Las alumnas parecen considerar que pueden calcular una cantidad desconocida mediante una relación entre las cantidades 900 y 20. Posiblemente, esto sea debido a que son las dos últimas cantidades que han obtenido y piensan que todas las cantidades hay que relacionarlas entre sí sin darse cuenta que estas cantidades (de valor 900 y 20) solo se relacionan mediante un esquema de isomorfismo de medidas que ya han empleado.

19. Marina: Qué cacao. A ver prueba, 900 menos 18000. ¿Andrea? A ver, esto ya lo hemos sumado y da 20 y tenemos el 900 (Andrea introduce [900-…; …]) menos 20 (Andrea introduce [900-20; mensaje de error]).

Marina regresa (ítem 19) regresa a la idea sugerida en el ítem 12 y propone restar 900 menos 18000. Pero ante la falta de respuesta de Andrea plantea restar 900 menos 20. Andrea accede a esta petición y el sistema proporciona un mensaje de error. Marina parece centrar su línea de acción en el uso de estas dos cantidades sin prestar tanta atención a qué operación las une.

20. Marina: Andrea, a ver déjame un momento. Y si me haces caso a mí y a lo mejor es esto (introduce [900-18000; …]) …
21. Andrea: …está al revés…
22. Marina: …pues…ya, ya, ya, aprieta (Andrea borra lo introducido por Marina, pero Marina sigue introduciendo) Muy bien. 18000 menos (introduce [18000-900; …]) 900 (introduce [18000-900; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Marina (ítem 20) sigue proponiendo restar 900 menos 18000 sin que parezca importarle que el minuendo es menor que el sustraendo. Andrea (ítem 21) le advierte de nuevo del error de restar al revés y Marina (ítem 22), al darse cuenta, rectifica y propone restar 18000 menos 900. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 22). La idea que persigue Marina tiene una interpretación complicada, pero podríamos afirmar que establece una relación entre el dinero total a repetir y el dinero que corresponde a una parte.

23. Marina: No es, está claro. Y ¿900 por 20? (introduce [900·…; …]) …
24. Andrea: …vale, a ver.
25. (Marina introduce [900·20; mensaje de error])

Tras la constatación del error, Marina (ítem 23) regresa a una idea anterior, y propone multiplicar 900 por 20 con el consentimiento de Andrea (ítem 24). El sistema proporciona un mensaje donde indica que esta relación se ha utilizado (ítem 25).

De hecho, esta relación ya la habían introducido anteriormente (ítem 17) sin percatarse de que intentaban calcular una cantidad ya conocida.

26. Marina: No. Vamos a pensar un poco más.
27. Andrea: Estoy leyendo el problema.
28. Marina: (lee) “Total de partes entre los tres” Hay 20 partes. 20 entre 900 ¿lo hemos probado?
29. Andrea: Mira, ¿cuánto dinero le toca a Carla? ¿Cuánto dinero…?...
30. Marina: …no…
31. Andrea: … ¿…le toca?… sí mira (señala el enunciado y lee) ¿cuánto dinero debe recibir cada uno?...
32. Marina: …pues yo que sé. ¿Y si probamos a dividir esto? (introduce [900/20; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Andrea (ítem 27) hace una relectura del enunciado y Marina (ítem 28) una relectura de algunas cantidades de la tabla de cantidades. Al acabar la nueva lectura, Andrea (ítem 31) indica que lo que tienen que averiguar es el dinero que le toca a cada uno, que no es más que lo que se establece en enunciado. Sin embargo, Marina (ítem 28 y 32) propone dividir 900 entre 20 buscando el asentimiento de Andrea. Lo introduce y el sistema proporciona un mensaje de error (ítem 32). De la secuencia de intervenciones de Marina podemos concluir que parece considerar como cierto que 900 y 20 deben formar parte de la siguiente operación. En la última intervención, el error, posiblemente, ha sido consecuencia de una lectura sintáctica del problema. Esta misma propuesta ya la había introducido anteriormente sin éxito (ítem 18).

33. Andrea: A ver…
34. Marina: A ver. ¿Qué se te ha ocurrido Andrea? (Andrea introduce [18000/900; mensaje de error]). Entre 900, es que ya lo había probado yo.

Posteriormente, Andrea (ítem 34) propone dividir 18000 entre 900, lo que supondría reincidir en el uso de una relación ya utilizada. El sistema proporciona un mensaje de error. Marina (ítem 34) parece indicar que esa propuesta ya se había intentado anteriormente.

35. Marina: A ver 18000, son 20 partes, dividido entre 20 ¿lo hemos probado? (Andrea introduce [18000/…; …]) entre 20, entre 20 (Andrea introduce [18000/20; mensaje de error]).

Ahora Marina (ítem 35) propone dividir 18000 entre 20, abandonando la pareja 900-20. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 35). Nuevamente, Marina sigue sin darse cuenta que la relación es correcta pero que ya la habían utilizado y que únicamente permite determinar una cantidad ya determinada. Posiblemente no leen con detenimiento los mensajes de error que el sistema está proporcionando porque en ellos se les indica que la relación ya ha sido usada.

36. Marina: ¿Y 18000 por 20? Para multiplicar las partes (Andrea introduce [18000·…; …]) y después para (Andrea introduce [18000·20; …]) …dividirlas entre 900 (Andrea introduce [18000·20; mensaje de error]).

En su línea de actuación anterior, ahora Marina (ítem 36) centra la atención en la pareja 1800-20 y propone multiplicar 18000 por 20. El sistema proporciona un mensaje de error. No parece tener en cuenta que la relación entre estas cantidades ya ha sido empleada.

37. Andrea: Es que debería ser al revés.
38. Marina: No da ninguno bueno. (Andrea introduce [900·20; mensaje de error]).

Andrea (ítem 38) posiblemente adopta la idea que Marina manteniendo e introduce 900 por 20. El sistema proporciona un mensaje de error. Tampoco Andrea parece darse cuenta de .

39. Marina: No. ¿Y 18000 (introduce [18000…; …]) más 900? (introduce [18000+900; mensaje de error]).

Marina (ítem 39) propone sumar 18000 más 900. El sistema proporciona un mensaje de error.
Se podría concluir que la prueba y error sistemática centrada en una pareja de valores ha dado lugar a una prueba y error desorganizada.

40. Andrea: No.
41. Marina: No. A ver (lee) “900. Dinero que le toca a una parte” Si hacemos una parte por tres… una parte… ¡Ah! Vale, (introduce [900…; …]) 900 por (introduce [900 ·…; …]) 20 (introduce [900·20; …]) …
42. Andrea: …ya lo hemos probado antes.
43. Marina: ¿Seguro? (introduce [900·20; mensaje de error]).

Marina (ítem 41) relee los nombres asignados a las cantidades y propone, de nuevo, multiplicar 900 por 20. En este caso parece ponerse de manifiesto qué le lleva a este planteamiento. Posiblemente, está centrado su razonamiento en que 900 es el “dinero que le toca a una parte” y que conoce el número de partes. Evidentemente, no estaría teniendo en cuenta que lo que así pretende calcular ya ha sido dado como dato en el enunciado. Aunque Andrea (ítem 42) le advierte que ya lo han introducido antes, Marina continúa con su propósito. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 43). Esta misma operación ya la habían introducido tres veces anteriormente (ítems 17, 25 y 38).

44. Marina: No, era para que no faltará nada.
45. Andrea: (Lee el enunciado del problema hasta la mitad.) A Carla le tocan 6…partes…

Andrea realiza una nueva lectura del enunciado (ítem 45) y tras un silencio (ítem 47) pregunta si han multiplicado 18000 por 900 (ítem 51). Marina (ítem 52) responde afirmativamente, indicando erróneamente que el resultado había sido negativo, lo que podría indicar

46. Marina: …y si 20 menos 20…No cero. Perdón.
47. (Silencio de cinco segundos.)
48. Marina: Piensa un poco. A ver.
49. (Silencio de cinco segundos.)
50. Marina: Mira a ver si es (Andrea introduce…) 900 más 20.
51. Andrea: ¿Hemos probado 18000 por 900?
52. Marina: Sí. Lo hemos probado y ha salido negativo. A ver, y si es 900 más 20. Este problema me suena un huevo, no sé de qué. Pues 900 (Marina intenta introducir las cantidades, pero el sistema no las marca) …chico, no escribe. (Andrea introduce [900-20; …]) ¿900 menos 20? no, 900 por 20.
53. Andrea: (Introduce [900-20; mensaje de error]).

una confusión con los pensamientos que está desarrollando en los que se plantea operaciones como 20 menos 20 (ítem 46). Marina plantea introducir 900 más 20, pero sin demasiada convicción. Andrea (ítem 52), y atendiendo a la petición de Marina, escribe 900 menos 20, pero esta le reprocha lo que ha introducido y propone 900 por 20. Sin embargo, Andrea (ítem 53) introduce 900 menos 20 y el sistema proporciona un mensaje de error.

Las alumnas se mueven dentro de un reducido rango de posibilidades centradas en las cantidades 1800, 900 y 20. Además, a medida que avanza la resolución lo hacen de manera más errática.

54. Andrea: Me has dicho menos.
55. Marina: 900 más 20, más. Total de partes, dinero que le toca a una parte… (mueve los dedos como estableciendo una relación) Lo hemos probado todo menos eso. Como sea verás (Andrea introduce [18000+900+20; …]) ¿Qué haces? Jolín triple (Andrea introduce [18000+900+20; mensaje de error]).

Marina (ítem 55) propone ahora sumar 18000 más 900 más 20. El sistema proporciona un mensaje de error. De nuevo la justificación que da Marina es que esa relación no la habían probado todavía. Sin embargo, no tiene en cuenta que estas tres cantidades no son de la misma naturaleza para poder incluirlas juntas en una relación aditiva.

56. Marina: Va a ver, déjame probar a mí 900 (introduce [900…; …]) más (introduce [900+…; …]) 20 (introduce [900+20; …]). Que sea (introduce [900+20; mensaje de error]).

Marina (ítem 56) propone sumar 900 más 20. El sistema proporciona un mensaje de error. De nuevo vuelve a reunir en una situación aditiva cantidades de distinta naturaleza.

57. Marina: Pues.
58. (Silencio de quince segundos.)
59. Marina: (lee) "¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?" 900 entre 20 pero es que no me lo coge. 900 (introduce [900…; …]), a ver si te enteras, entre (introduce [900/…; …]) 20 (introduce [900/20; mensaje de error]).

Tras varias relaciones aditivas y tras un silencio (ítem 58), Marina (ítem 59) regresa a un prueba y error centrada en la pareja 900-20 y divide 900 entre 20. El sistema proporciona un mensaje de error. Esta relación ya la habían introducido en dos ocasiones anteriores (ítems 18 y 32) sin éxito.

60. Marina: Le pregunto si hay pistas. Es que estamos aquí dejándonos el pelo para nada. ¿Se puede hacer otro problema? (Marina mira a Andrea) No.
61. (Silencio de seis segundos.)
62. Marina: Perdona (Se dirige al investigador) ¿Se puede cambiar ya de problema?
63. (El investigador invita a abandonar el problema sin resolverlo correctamente en su totalidad).

Tras el último intento fallido, Marina (ítem 62), al no tener pistas para continuar, le pide al investigador si pueden cambiar ya de problema. A petición de las alumnas y casi con el tiempo previsto para la finalización del tiempo establecido para resolver correctamente el problema, se invita a las alumnas a abandonarlo sin resolverlo en su totalidad (ítem 63).
Hay que remarcar que desde la última relación correcta que han introducido (ítem 9) no han considerado en ningún momento utilizar en ninguna relación las cantidades que indican las partes que le corresponde a cada uno de los protagonistas del problema.

5.4.5.4. El caso de la pareja Andrea-Marina en el problema "Los Disfraces"

Se disponen de 450 m de tela para hacer 25 disfraces de león que necesitan 6 m de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer disfraces de elefante. Si para hacer un disfraz de elefante se necesitan 15 m de tela, ¿cuántos disfraces de elefante podrán hacerse?

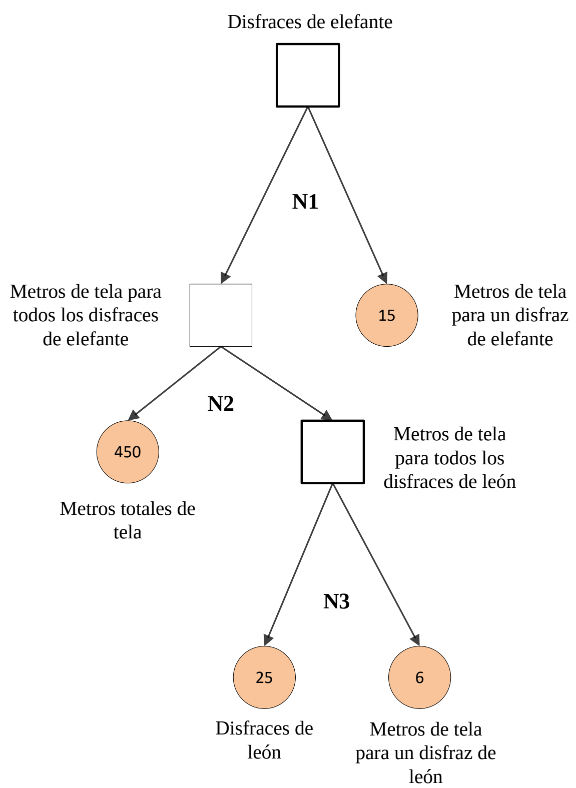


Figura 5.93.

1. (Andrea lee el enunciado del problema.)
2. Marina: Este me suena. Normal, este es el que fallé. A ver, probé algo y me salieron tres, pero…
3. Andrea: …vale, vale. 450 (señala el dato en la pantalla) …
4. Marina: …450…
5. Andrea: …más…
6. Marina: …por…
7. Andrea…6 más 15.
8. Marina: No.
9. Andrea: Te dará todos los metros.
10. Marina: ¿450 más 6 más 15? A ver. Vamos a verlo ahora. 450 (introduce [450…; …]) más…
11. Andrea: …más… (Marina introduce [450+…; …]) …
12. Marina: …6… (introduce [450+6…; …]) …
13. Andrea: …6…
14. Marina: …más 15… (introduce [450+6+15; …]) …
15. Andrea: …más 15… (Marina introduce [450+6+15; mensaje de error]).

Tras leer el enunciado, Andrea (ítem3, 5 y 7) propone sumar 450 más 6 más 15, para obtener, según Andrea, los metros en total que hay de tela. Marina (ítem 4 y 6) había propuesto multiplicar 450 por alguna cantidad que no verbaliza, aunque al final acepta la relación propuesta por Andrea. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 15).
El razonamiento de Andrea es aplicar una relación aditiva sumando todas las cantidades cuyas unidades son metros de tela. El razonamiento de Marina tiene una fundamentación más sólida, pero parece difuminado por la profundidad del análisis.

16. Marina: No.
17. Andrea: A ver, para.
18. Marina: 450 por 25…
19. Andrea: …por 25 (introduce [450·…; …]) …
20. Marina: …y después dividirlo entre 6 disfraces que quieren hacer (Andrea introduce [450·25; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Marina (ítem 18 y 20) realiza una secuencia de síntesis de dos pasos donde verbaliza las dos relaciones de isomorfismo de medidas que pretende aplicar: (1) el isomorfismo de medidas que parece que estaba pensando anteriormente, multiplicar 450 por 25 y (2) el isomorfismo de medidas de división partitiva en el que pretende dividir la cantidad obtenida en el isomorfismo anterior entre 6. Al introducir la primera relación, el sistema proporciona un mensaje de error (ítem 20).
Aunque los esquemas conceptuales sobre los que apoya el razonamiento son correctos, no los aplica sobre las cantidades adecuadas. El 450 se refiere al total de metros de tela para todos los

disfraces mientras que el 25 son la cantidad de disfraces de león que hay que hacer. Es posible que no identifique el 450 como el todo y sí como una de las partes (metros de tela que se necesitan para el disfraz de león). Además, en la segunda relación asigna el valor 6, metros de tela para un disfraz de león, a "disfraces que quieren hacer".

21. Marina: ¿No? 450 dividido entre 25.
22. Andrea: Volvámoslo a leer, ¿vale?
23. Marina: Espera, voy a hacer una cosa. Tú sigue leyendo (Andrea está leyendo el enunciado de nuevo en voz baja mientras Marina introduce [450/…; …])) no, por no…
24. Andrea: Entre 25… (Marina introduce [450/25; mensaje de error]).

Ahora Marina (ítem 21) quiere utilizar las mismas cantidades, pero propone dividir 450 entre 25. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 24).
Parece ser que sigue sin tener en cuenta que el 450 es el total de metros que sirve para los disfraces de león y de elefante, es decir el total, y no solo los metros para los disfraces de león. En cualquier caso, la alumna parece mostrar la creencia de que las cantidades cuyos valores son 450 y 25 están unidas mediante una relación multiplicativa.

25. Andrea: No.
26. Marina: Esto es imposible… cuatrocientos…para hacer 25 disfraces, vale. Pues 450 más (introduce [450+…; …]) 25… (introduce [450+25; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error Marina (ítem 26) propone sumar 450 más 25. El sistema responde con un mensaje de error.
Marina sigue empeñada en relacionar las cantidades de valores 450 y 25 por encima de la certeza de si se debe utilizar una relación aditiva o multiplicativa. La alumna parece estar llevando a cabo una especie de *gaming the system*. Una posible explicación a la fijación por estas dos cantidades de la alumna sería que estas son las dos primeras cantidades que aparecen en el enunciado del problema.

27. Marina: No lo cojas, mal ¿ves? ¿y 450 menos…?
28. Andrea: …vale, sí, sí. Vale. 450 metros de tela…más…
29. Marina: …ves probando tú algo que yo ya he probado (lee) "25 disfraces de león necesitan 6 metros" … 25 por…
30. Andrea: …es por…

Ahora Marina (ítem 27) parece que propone la última relación que le queda con las dos cantidades y propone restar 450 y una cantidad que no verbaliza pero que debe ser 25. Pero tras una relectura (ítem 29) de parte del enunciado, Marina (ítem 29) y Andrea (ítem 30) identifican correctamente una relación entre cantidades y proponen multiplicar 25 por 6. Es decir, plantean una operación que

31. Marina: …6.
32. Andrea: Que sea, que sea (introduce [25·6; Ml=150]).

supondría considerar la relación correcta *Ml=L·Mul* para calcular *Ml* apoyando el razonamiento en un isomorfismo de medidas. La conclusión del episodio podría poner de manifiesto que las alumnas se habían lanzado a la resolución sin una lectura detallada del enunciado.

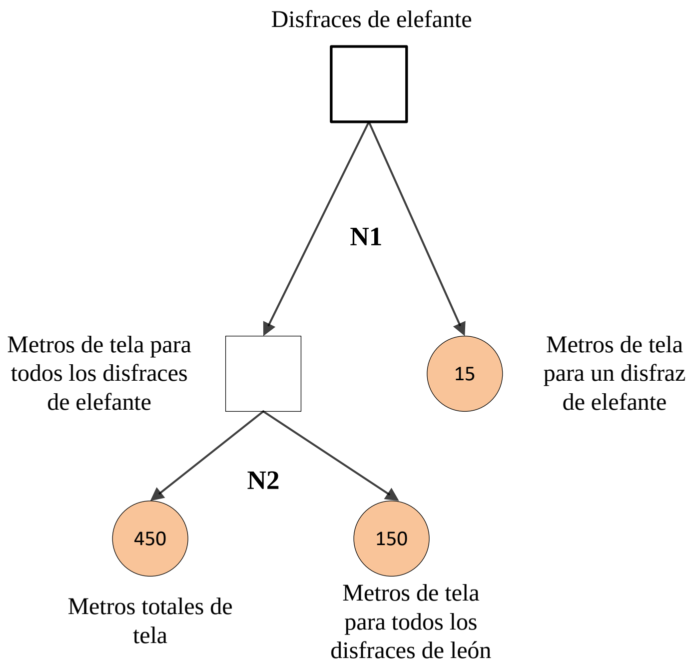


Figura 5.94.

33. Marina: (Lee) "metros de tela para disfraces de león" 450 dividido entre…
34. Andrea: …vale, nos sobran 150…
35. Marina: …150… (introduce [450…; …]) 450 dividido entre 150 (introduce [450/150; …]), o multiplicado por 150… (introduce [450/150; mensaje de error]).

Marina (ítem 33) propone dividir 450 entre una cantidad que no verbaliza. Andrea (ítem 34) corta la intervención de Marina y relaciona la cantidad que ha obtenido (150) con la tela que sobra sin aclarar qué supone que sobre. Al final Marina (ítem 35) introduce 450 dividido entre 150. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 35).

Este episodio pone de manifestó que las alumnas siguen teniendo numerosas dificultades para identificar el significado de las cantidades con un valor determinado. Así. Marina no identifica correctamente la cantidad de valor 450 como el total de tela. En cambio, parece que la identifica como el total de tela que se utilizan para los disfraces de león, es decir, una parte en lugar del todo.

Por otro lado, el "nos sobran" de Andrea, no se aclara, pero puede suponer que la alumna está articulando la reflexión sobre un esquema aditivo.

36. Andrea: (inaudible)…
37. Marina: … o restar también. A ver…450…metros de tela… (Andrea introduce [450+150: mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Andrea de manera inaudible (ítem 36) parece proponer una operación a Marian., y esta (ítem 37) propone que también podrían restarlas. Al final Andrea (ítem 37) introduce 450 más 150 y el sistema proporciona un mensaje de error.
Como hemos comentado, el que hecho que Andrea identifique incorrectamente el significado de la cantidad 150 como lo que sobra parece que le ha llevado a plantear la relación aditiva entre las dos cantidades. Marina (ítem 37), sin embargo, parece convencida de que deberían restar.

38. Marina: Claro, si hay eso, restar 450 (introduce [450…; …]) menos 150 (introduce [450-150; …]). ¿No son metros? Pues habrá que probarlo… (introduce [450-150; Me=300]).

Ahora sí, Marina (ítem 38) propone restar 450 menos 150. Identifica correctamente la relación $Mp=Ml+Me$ dentro de un esquema de combinación de tipo 2 donde hay que hallar *Me*.

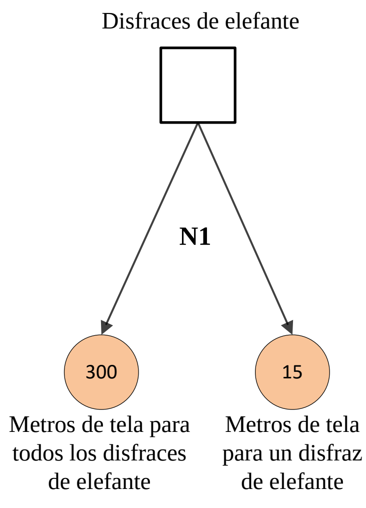


Figura 5.95.

39. Marina: ¡Eureka!
40. Andrea: Vale, ahora… (introduce [300…; …]) …
41. Marina: …300…

Ahora Andrea (ítem 40 y 42) propone sumar 300 más 150. El sistema responde con un mensaje de error.
Andrea proponer una operación basada en una relación ya usada y con la que obtendríamos una cantidad conocida

42. Andrea: …más… (introduce [300+150; mensaje de error]).

(450). Esto parece demostrar que Andrea tiene muchas dificultades para asignar los valores a las cantidades correspondientes.

43. Marina: No flipá, ¿dónde vas? Ahora los 300 que nos da tendríamos que sumarlo a 15 ¿no?
44. Andrea: 400 (introduce [300…; …]) por 15…
45. Marina: …no te va a salir, 400 más 15…300 más 15 (Andrea introduce [300·15; …]), me he liado de cantidad. Más 15. ¿no?
46. Andrea: No. (Introduce [300·15; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Marina (ítem 43) propone sumar 300 más 15, pero Andrea (ítem 46) propone multiplicar 300 por 15. El sistema responde con un mensaje de error.
Posiblemente, la relación que propone Marina responda a que ambas cantidades se expresan en metros.
La operación propuesta por Andrea no es correcta, pero supone abandonar la relación aditiva del episodio anterior por una multiplicativa, lo cual contrasta con la fijación demostrada anteriormente cuando ha desencadenado un proceso de *gaming the system*.

47. Marina: Pues…
48. Andrea: … ¿y entre 15? (introduce [300…; …]) …
49. Marina: …y 400…eso 300, (Andrea introduce [300/15; …]) que manera de decir 400 (Andrea introduce [300/15; E=20]).
50. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente).

Finalmente, Andrea (ítem 48), una vez se centra en la relación multiplicativa, y quizá por descarte, identifica una relación correcta entre esas cantidades y propone dividir 300 entre 15. El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema. La pareja ha seguido la lectura L1.

5.4.5.5. El caso de la pareja Andrea-Marina en el problema "El Pienso"

Un granjero gasta diariamente 15 kg de pienso para gallinas y 120 kg de pienso para vacas. El kilo de pienso para gallinas cuesta 2 € y el de pienso para vacas, 5 €. Si en un año solo puede gastar 250.000 euros. ¿Cuánto dinero le sobra?

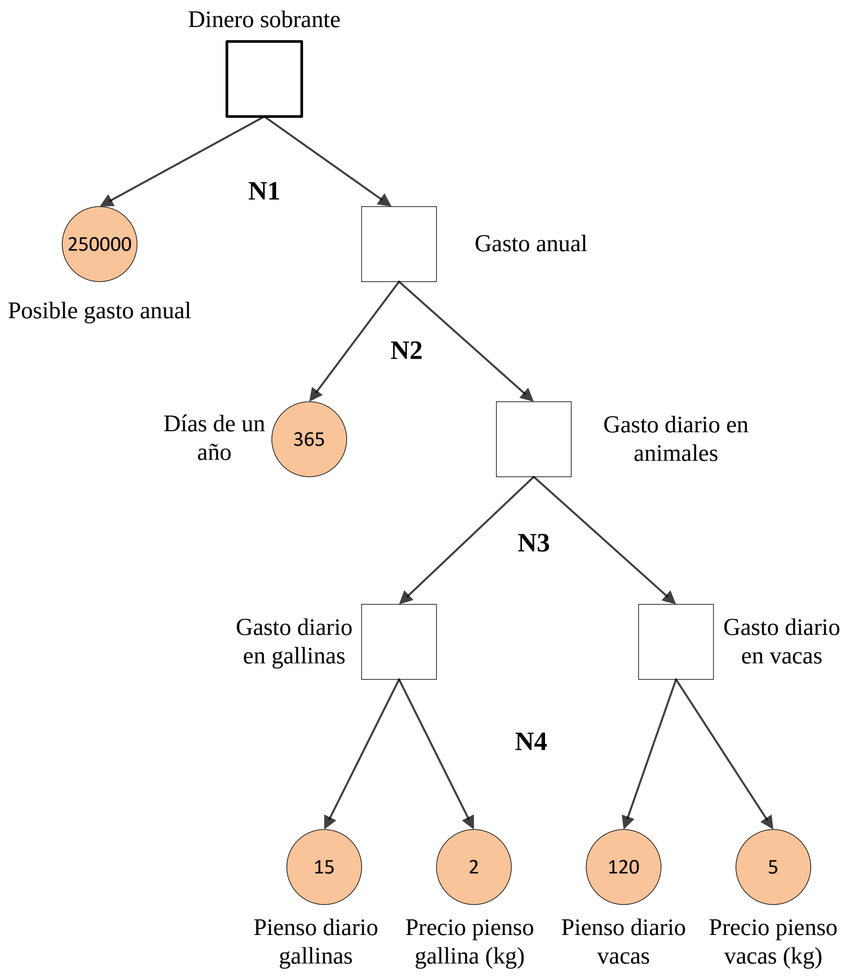


Figura 5.96.

1. (Andrea y Marina empiezan a leer el enunciado del problema, pero sin acabar de leerlo se ponen a hablar.)
2. Marina: Sí.
3. Andrea: Sumar 120 más 15…
4. Marina: …120 más 15…
5. Andrea: …120… (introduce [120…; …]) …
6. Marina: …más 15… (Andrea introduce [120+15; …]) …
7. Andrea: …15 y nos dará todo el pienso (introduce [120+15; mensaje de error]).

Sin finalizar la lectura del enunciado, Andrea (ítem 3) propone sumar 120 más 15 y el sistema proporciona un mensaje de error (ítem 7). Mientras introducen la expresión, Marina (ítem 7) verbaliza “y nos dará todo el pienso”, lo que nos permite concluir que ambas compañeras han decidido determinar el total de pienso gastado aplicando un esquema de combinación. El recurso a este esquema en este problema carece de sentido ya que cada tipo de pienso difiere en su precio por kilo.

Tal vez, al no acabar de leer el enunciado para las alumnas no hay diferencia entre los dos piensos y esto les ha conducido a aplicar un esquema aditivo. En cualquier caso, esto indica que las alumnas no han realizado un análisis completo y que se han dedicado a aplicar esquemas, que en otras situaciones podrían ser útiles, que conectaran las cantidades conocidas.

8. Marina: No, no nos dará todo el pienso. Pues a lo mejor hay que…
9. Andrea: A ver, vamos a leerlo porque no lo hemos leído.
10. Marina: ¿15 por 120?
11. Andrea: A ver. (Andrea empieza a leer el enunciado del problema otra vez, pero no lo acaba tampoco).
12. (Marina introduce [120·…; …]) …
13. Andrea: ¡Ah! 15 por 2 (señala los datos en la pantalla) y después (Marina introduce [120·15; …]) 120 por…5 (señala los datos de nuevo en la pantalla).
14. Marina: Yo creo que es así ¡eh! No es por nada (introduce [120·15; mensaje de error]).

Andrea (ítem 9) propone leer en su totalidad el enunciado mientras que Marina (ítem 10), ajena al comentario, plantea, sin demasiada convicción, multiplicar 15 por 120. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 14). La propuesta de Marina parece que pueda venir influenciada por la posición de las dos cantidades en el enunciado ya que son las dos primeras cantidades que aparecen. También podría deberse a que parte de la certeza que estas dos cantidades deben conectarse de alguna manera e inicia un proceso de *gaming the system*.

Sin embargo, mientras Marina planteaba la acción anterior, Andrea (ítem 11), tras leer el enunciado del problema, propone (ítem 13) multiplicar 15 por 2, lo que supondría considerar la relación correcta $Pdg=Kg \cdot Pug$ para hallar el “dinero gastado en pienso para gallinas en un día (*Pdg*)”.

15. Andrea: Es lo que te he dicho yo 15 (introduce [15…; …]) por 2… (introduce [15·2; …]) …
16. Marina: …15 por 2 (Andrea introduce [15·2; Pdg=30]).

Tras el mensaje de error, Andrea (ítem 15) insiste en su propuesta apoyada en un esquema de isomorfismo de medidas y así determina el “dinero gastado en pienso para gallinas en un día (*Pdg*)”. Aunque la relación ocupa un N4 en el diagrama de análisis, en ningún caso han verbalizado un análisis completo o que incluya niveles próximos.

17. Marina: (Lee) “Dinero gastado… 30 euros”
18. Andrea: Y después 120 (introduce [120…; …]) por (introduce [120·…; …]) 5 euros (introduce [120·5; Pdv=600].

Andrea (ítem 18) propone de nuevo multiplicar 120 por 5, es decir, otro isomorfismo de medidas equivalente al anterior, pero con las cantidades correspondientes a las vacas ($Pdv=Kv \cdot Puv$), para averiguar el “dinero gastado en pienso para vacas en un día (*Pdv*)”.

Tras la lectura del enunciado y el planteamiento del primer isomorfismo de medidas, Andrea no tuvo problemas en identificar este isomorfismo de medidas y aplicar correctamente las dos relaciones propias del N4. Sin embargo, en el post test fue Marina la que identifico correctamente estas dos relaciones.

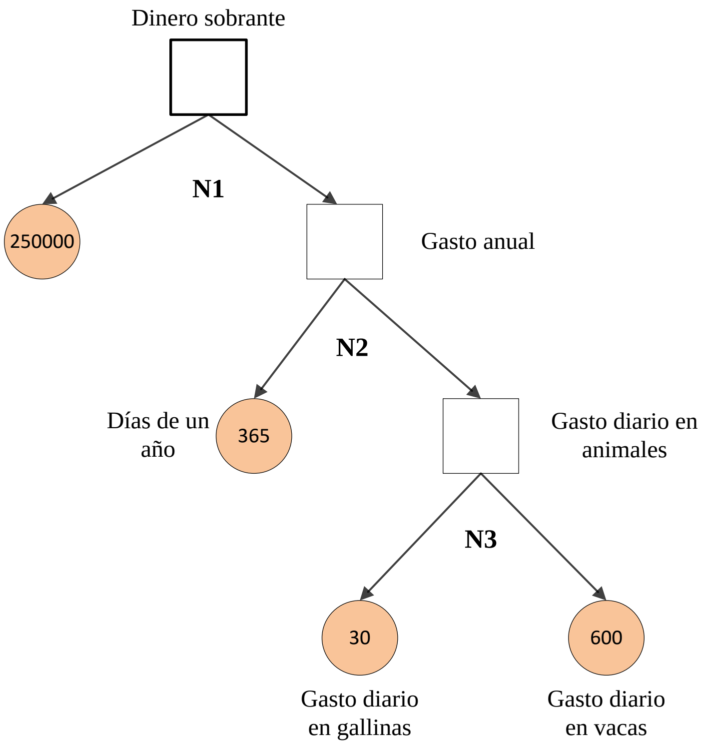


Figura 5.97.

19. Marina: Eso, eso es lo que quería...600 más 30…
20. Andrea: …600… (introduce [600…; …]) …
21. Marina: …más 30… (Andrea introduce [600+30; Pdc=630]).

Ahora Marina (ítem 19) identifica correctamente una tercera relación entre tres cantidades y propone sumar 600 más 30. Esto supone materializar correctamente la relación *Pdc=Pdv+Pdg* derivada de un esquema conceptual de combinación donde las partes son conocidas y se intenta hallar el total como cantidad desconocida.
Esta relación también la había aplicado correctamente Marina en el post test.

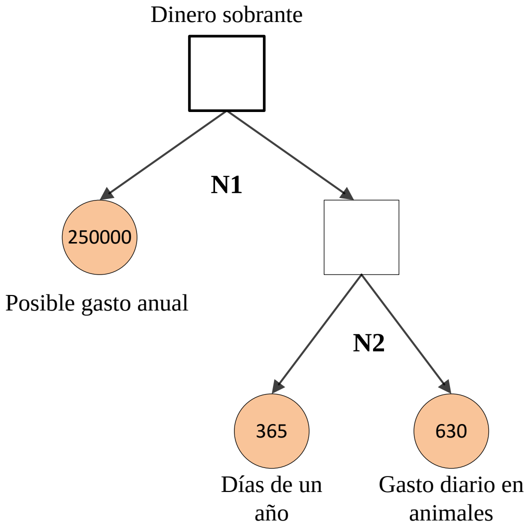


Figura 5.98.

22. Marina: Sí, 630, hombre esto es súper fácil.
23. Andrea: Ahora 630… (introduce [630…; …]) …
24. Marina: …25000 ¿no? ¡Ah! no, aún nos faltan los 2 y los 5 euros...
25. Andrea: ...que ya los hemos utilizado…
26. Marina: ¡Ah! 630…dividido…no, multiplicado entre 250 y eso (Andrea borra lo que había introducido e introduce [250000…; …]) dividido entre 600 (Andrea introduce [250000/630; …]) o multiplicado también ¿eh? (Andrea introduce [250000/630; mensaje de error]).

Ahora Marina (ítem 26) propone dividir 250000 entre 630. El sistema responde con un mensaje de error.
La relación propuesta por Marina podría considerarse correcta, pero se informó a los alumnos de que no permitirían respuestas finales ni parciales no enteras.

27. Andrea: O sumado o restado…
28. Marina: …multiplicado, prueba multiplicado.
29. Andrea: es que, si en un año solo puede gastar 250000, solo se puede gastar eso al año.
30. Marina: Prueba a ver lo que te he dicho yo. A lo mejor es (Andrea introduce [250000·630; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Marina (ítem 28) le indica a Andrea que multiplique las dos cantidades, es decir, 250000 por 630. El sistema responde con un mensaje de error (ítem 30).
Marina parece que no ha sido capaz de asignar una cantidad al valor 250000. Sin embargo, Andrea (ítem 29) le avisa de que esa cantidad es lo que se puede gastar en un año por lo que parece estar desestimando la relación propuesta por Marina, aunque al final la introduce.

31. Marina: No. A ver, 25000 menos… (Andrea introduce [250000-…; …]) 630 (Andrea introduce [250000-630; mensaje de error]).

A pesar del aviso de Andrea, Marina sigue empeñada en relacionar estas dos cantidades (ítem 31) y propone restar 250000 menos 630. El sistema responde con un mensaje de error.
Posiblemente Marina no percibe que la adjetivación de las cantidades es distinta a pesar de que ambas expresan dinero. 250000 es lo que se puede gastar en un año mientras que 630 es lo que se gasta en un día y por tanto no es posible una relación aditiva entre ambas cantidades. No obstante, es posible que Marian haya perdido la referencia de a qué cantidades representan los distintos valores.

32. Marina: No. ¿Y 25000 más 630?
33. Andrea: Es que… (lee) "¿Cuánto dinero le sobra?" le sobra dinero.
34. Marina: ¡Ay! 25000 que hay, ¡Ay! que manía con el 30, 25000 que hay (introduce [250000…; …]) (Andrea señala el 250000) era menos ¿no?
35. Andrea: … más, menos 30 no nos ha dado nada.
36. Marina: (Introduce [250000-630; mensaje de error]).

De hecho, Marina (ítem 32) se pregunta por si sería posible la última operación que le queda por probar con estas cantidades y si sería conveniente sumar 250000 más 630. Es decir, parece que Marina ha desarrollado una estrategia de *gaming the system* tomando como certezas que se debería usar 25000 y 630 Andrea (ítem 33), sin embargo, lee la pregunta del enunciado e incide en que le sobra dinero tal vez apuntando que habrá que realizar una resta. Pero no está muy convencida ya que apunta (ítem 35) que sumen ya que anteriormente con la resta no les ha salido bien. Marina (ítem 36) no la escucha e introduce 250000-630. El sistema responde con un mensaje de error.
Esta era la misma relación que habían introducido anteriormente (ítem 31) y que parece que indica que las alumnas están deformando las cantidades de niveles inferiores para acoplarlas en un análisis correcto en el que a 250000 se le debe restar algo para dar respuesta a la pregunta del problema.

37. Marina: No.
38. (Andrea empieza a leer el enunciado, pero a mitad…)
39. Marina: ¿Hemos usado los 5 euros?
40. Andrea: Sí

De nuevo Marina (ítem 41) propone dividir 250000 entre 630. El sistema responde con un mensaje de error.
Esta relación ya la habían introducido anteriormente (ítem 26).

41. Marina: Vale…25000 euros, gasta…vale gasta esto (introduce [250000/…; …]) de esto (introduce [250000/630; mensaje de error]).

42. Andrea: ¿No sería sumar 630 más 600 más 30 y así tendría el dinero?
43. Marina: No. Solo hemos acertado uno de todos, de cinco. Ale, ya te has ido hacia abajo (se ha minimizado la pantalla)
44. Marina: (lee) Mira, mira “dinero gastado en pienso de vacas” (Andrea introduce [630…; …]) 630 (Andrea introduce [630+600…; …]) más 600 (Andrea introduce [630+600+…; …]) flipá, (Andrea introduce [630+600+30; …]) te has ido de la raya ¿eh?
45. Andrea: Nos han dado todos estos.
46. Marina: ¿Qué haces? Pero eso no hay que sumarlo porque ya lo hemos cogido… ¡Ah! Has probado a sumarlo todo…qué lista. A ver si no será… (borra lo introducido por Andrea) dinero gastado, dinero gastado y dinero gastado, vale. Pues a lo mejor será… (introduce [630-600…; …]) no se puede hacer suma de tres…
47. Andrea: … ¿no sería…250000 menos 630?...
48. Marina: …menos 30… (introduce [630-600-30; …]) …
49. Andrea: … ¡no! que tres no hay Marina…
50. Marina: … ¡ah!... (introduce [630-600-30; mensaje de error]).

Andrea (ítem 42) propone sumar 630 más 600 más 30 para obtener todo el dinero. Parece ser que Andrea no se ha dado cuenta que el 630 lo habían calculado como suma de 600 más 30.

De hecho, Marina (ítem 46) parece indicar que esa operación ya la han realizado. Al final Marina acaba dudando ya que apunta que, aunque las tres cantidades son dinero gastado el sistema no permite realizar suma de tres cantidades. Esta última afirmación no solo es errónea, sino que en el problema *La Empresa* utilizaron una suma de tres cantidades para averiguar el total de partes.

Por otro lado, ninguna de las dos parece percatarse de que la resta introducida conduciría al elemento neutro de la suma.

Por su parte, Andrea (ítem 47) tras la negativa de Marina a sumar las tres cantidades, había propuesto restar 250000 menos 630, una relación ya introducida dos veces sin éxito anteriormente (ítems 31 y 36) y que confirmaría su fijación en esas dos cantidades.

51. Andrea: Son de dos.
52. Marina: ¡Ay! pues tengo una idea 630 menos 600 (introduce [630-600; …]) y después lo que te dé… (introduce [630-600; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error del sistema. Marina (ítem 52) propone restar 630 menos 30. El sistema responde con un mensaje de error.

De la misma manera que en problemas anteriores, las alumnas caen en el bucle de introducir relaciones cuya solución son cantidades ya conocidas sin percatarse del mensaje de error del sistema que les advierte de ello.

53. Marina: ¡Ah! pues entonces ya no me da nada entonces no lo hago.
54. Andrea: A ver, 600 más 30 me dará 630…
55. Marina: …630 más 630…yo que sé, va (Andrea introduce [600+30; …]) ¿qué vamos a hacer? ¡ah! …630… (Andrea introduce [600+30; mensaje de error]).

Ante la desesperación de Marina (ítem 53) Andrea (ítem 54) propone e introduce (ítem 55) 600 más 30. El sistema responde con un mensaje de error indicándoles que esa relación ya ha sido utilizada.

56. Marina: No.
57. Andrea: Porque ya lo habíamos sumado, daba 630.
58. Marina: A ver, (lee) “cuánto dinero le sobra” A ver, vamos a ver todos los botones.
59. Andrea: Es restar, porque si dice sobrar es restar.
60. Marina: 25000 euros (introduce [250000…; …]) menos (introduce [250000-…; …]) 630 (introduce [250000-630; mensaje de error]).

Por fin, y tras el nuevo mensaje de error, Andrea (ítem 57) apunta que esa relación ya la habían introducido. Marina (ítem 58) lee la pregunta del problema e indica que revisen todos los botones de las cantidades conocidas que tienen. Por su parte, y como ya había apuntado anteriormente, Andrea (ítem 59) indica que sobran y que por tanto tienen que restar. Marina (ítem 60) propone restar 250000 menos 630, la misma pareja de número empleada en sus propuestas anteriores, y el sistema responde con un mensaje de error.

61. Andrea: No. Vamos a ver todos los botones.
62. Marina: ¿Todos los botones? Pero si ya los hemos utilizado.
63. Andrea: A ver (Recorre todos los botones de la tabla de cantidades)
64. Marina: (lee) “Dinero que podría gastarse al año” …
65. Andrea: (lee) “kilos diarios para gallinas”, “precio diario para gallinas”, “kilos diarios para vacas”, “precio diario para vacas” y “días en un año” (remarca esto último con la voz)
66. Marina: 25000 menos 365…

Andrea (ítem 61) propone revisar todos los botones de las cantidades conocidas a lo que Marina (ítem 62) contesta que ya los han utilizado todos. Obviamente, hay un botón que no han utilizado y tiene que ver con los días que tiene un año, botón necesario para seguir con la resolución del problema. Leyendo el mensaje que se despliega de cada botón, Andrea (ítem 65) se percata y remarca que 365 son los días que tiene un año.
Ahora Marina (ítem 66) propone restar 250000 menos 365. El sistema responde con un mensaje de error.

67. Andrea: (introduce [250000-365; mensaje de error]).

68. Andrea: O más, a ver…
69. Marina: …o más…
70. Andrea: …o dividido…
71. Marina: …es que (Andrea introduce [250000/…; …]) 250000 más 365…si son, (Andrea introduce [250000/365; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Andrea (ítem 68) y Marina (ítem 69) proponen sumar las dos cantidades, pero al final Andrea (ítem 71) introduce una división entre 250000 y 365 a lo que el sistema responde con un mensaje de error.

En la nueva estrategia del *gaming the system* que han entrado las alumnas se pone de manifiesto que la cantidad con valor 250000, una cantidad que se usa solo en el último paso, se ha convertido en un elemento de certeza. Esto podría confirmar que los estudiantes se han centrado en el primer análisis y que están deformando cantidades para buscar operando con la que relacionar 250000.

72. Marina: No. Es que da mal. ¿A ver si es dividir y no nos hemos dado ni cuenta?
73. Andrea: No, pero ya lo he dividido.
74. Marina: Ahora, (Andrea introduce [250000·365; …]) multiplicar por tres sí que es. Tu a lo más difícil (Andrea introduce [250000·365; mensaje de error]).

Marina (ítem 72) propone dividirlas a lo que Andrea (ítem 73) responde que lo acaban de hacer y es ella la que introduce (ítem 74) 250000 por 365. El sistema proporciona un mensaje de error.

Es la tercera operación que introducen con las dos cantidades a falta de sumarlas.

75. Andrea: A ver, espera. Es que (lee) “dinero que gasta…”
76. Marina: Pues espera cuando venga Alejandro y Francisco la van a liar parda. Vamos a calentarnos un poco la cabeza. Ya lo he hecho (introduce [250000/365; mensaje de error]).

En el caos en el que están sumidas las alumnas y mientras Andrea (ítem 75) repasa alguna de las cantidades conocidas, Marina (ítem 76) propone dividir las dos cantidades. El sistema responde con un mensaje de error.

Esta relación ya la habían introducido anteriormente (ítem 71).

77. Andrea: No es.
78. Marina: ¿No? Che que no puedo quitarlo, esta que no puedo quitarlo. No, que susto, me he puesto blanca y todo. ¡Ay! ¿no sería 30 más 600 más 630? ¿Ya lo has probado?
79. Andrea: Sí, ya lo he probado.

Tras el nuevo error, Marina (ítem 78) propone una suma de 30 más 600 más 630. Al preguntarle a Andrea si lo habían introducido ya, Andrea le dice que sí. Aunque la operación tal y como se planteaba no se había introducido, una relación aditiva entre estas tres cantidades ya se había usado. Tras la negativa, Marina (ítem 80) vuelve a relacionarlas con una resta como lo

80. Marina: (lee) “Dinero gastado en pienso para gallinas”, “dinero gastado en…” y “dinero gastado en…” las tres cosas son gastado. Habrá que restarlas.
81. Andrea: No porque tres no se pueden utilizar.
82. Marina: Es que lo normal sería 600 más 630…630 más 630, o sea 600 más 630 más 30 y lo que te dé restarlo a 250000. Vamos a probarlo 600… (introduce [600…; …]) …
83. Andrea: …pero restarlo de tres cifras no puedes ¿eh?...
84. Marina: …no, o sea, es sumarlo (introduce [600+630+…; …]) a ver si da. Del mayor al pequeño (introduce [600+630+30; mensaje de error]).

habían introducido anteriormente (ítem 50) justificando de nuevo la resta con que el dinero se adjetiviza como gastado. Andrea vuelve a apuntar que no pueden utilizar cuatro cantidades en una relación y Marina (ítem 82) propone ahora sumar las tres cantidades porque le parece más normal. El sistema responde con un mensaje de error.

De nuevo, Marina intenta sumar las partes con el todo para obtener una cantidad que no tiene sentido en el problema y en el que las partes 600 y 30 ya están contenidas en el todo 630.

85. Marina: ¿Por favor? Madre mía, qué difícil es. Aquí vamos a estar hasta…
86. Andrea: …es fácil, pero para nosotras no…
87. Marina: Pues mira…(inaudible). A ver. Vamos a pensar un poco mirando las cosas.
88. (Silencio de diez segundos.)
89. Marina: A ver, que no lo sé. Va Andrea, a ver. Estos dos (señala el enunciado) … ¿qué haces? Va. Estos dos (vuelve a señalar el enunciado) los podríamos sumar ¿no? A ver. (Introduce [630…; …]) si es menos dos mil… (introduce [630-250000; …]) …
90. Andrea: … ¡ala! qué va. Si se pone primero el mayor.
91. Marina: (introduce [630-250000; mensaje de error]).

Marina (ítem 89) verbaliza que quiere sumar 630 más 250000, pero acaba introduciendo 630 menos 250000 (ítem 91). Andrea (ítem 90) le advierte que el minuendo es menor que el sustraendo, pero Marina hace caso omiso. El sistema responde con un mensaje de error.

Efectivamente, Andrea ya apuntaba que la relación no era correcta por la colocación de las cantidades, pero además no tienen en cuenta que en una relación aditiva no se pueden restar cantidades de distinta naturaleza.

92. Marina: ¡Ah! Por eso no nos lo coge, qué listo que es el ordenador.
93. Andrea: (inaudible) (Marina introduce [250000-630; mensaje de error]).

Tras el apunte de Andrea, Marina (ítem 93) propone introducir la operación anterior al revés, es decir, restar 250000 menos 630. El sistema responde con un mensaje de error.

94. Marina: No nos lo coge igualmente. Nos tiene manía. Te lo he dicho yo, ¡ale!
95. (El investigador invita a abandonar el problema sin resolverlo correctamente en su totalidad).

Tras la finalización del tiempo establecido por el investigador para resolver correctamente el problema se invita a las alumnas a abandonarlo sin resolverlo en su totalidad (ítem 95).

5.4.6. LA PAREJA ALEJANDRO-FRANCISCO. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SIN HINTS.

5.4.6.1. El caso de la pareja Alejandro-Francisco en el problema "Las Pelotas de tenis"

En un club de tenis tienen dos carros con 105 y 287 pelotas, respectivamente. Las van a poner en botes de 7 pelotas para utilizarlas en un torneo. ¿Cuántos botes serán necesarios?

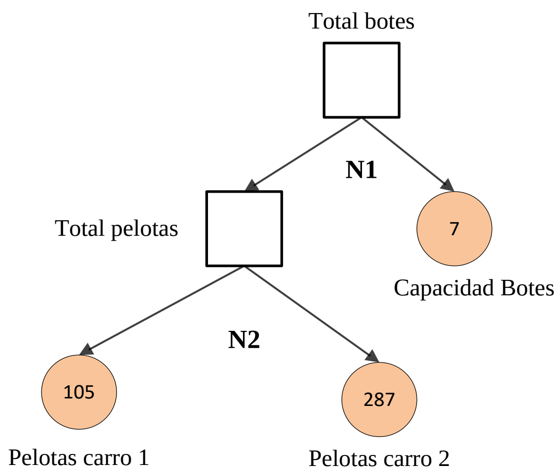


Figura 5.99.

1. (Francisco y Alejandro leen el enunciado del problema.)
2. Francisco: Yo creo que habría que sumar 105 más 287 y después dividirlo por 7.
3. Alejandro: Me has pillado la idea. Va. Y si no probamos otra cosa.
4. (Francisco introduce [105+287; …])
5. Alejandro: Sería al revés (Francisco introduce [105+287; P=392]).

Tras leer el enunciado Francisco (ítem 2) propone el resultado de un análisis completo del problema. En primer lugar, propone sumar 105 más 287. Es decir, plantea una operación que supondría considerar la relación correcta $P=Pp+Pg$ para calcular P apoyada en un esquema de combinación.

Alejandro (ítem 5) verbaliza que la suma de las dos cantidades debería ser al revés, tal vez pensando en que la más grande debería ir primero o que debería realizarse una resta, pero al aceptar el sistema la suma propuesta no desarrolla su razonamiento.

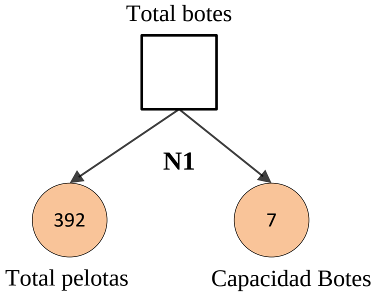


Figura 5.100.

6. Alejandro: ¡Ahhh! pues sí. Ahora a dividir (Francisco introduce [392·…;]) y si no multiplicar.
7. (Francisco borra lo introducido e introduce [392/7; B=56]).
8. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente).
9. Alejandro: ¡Ahhh! pues sí. Era dividir.

Al contrario de lo que había propuesto, Francisco (ítem 6) comienza a introducir "392·" lo que hace dudar a Alejandro (ítem 6). Sin embargo, Francisco rectifica dividiré introduce 392 entre 7. En definitiva, plantea correctamente la relación $P=Pb\cdot B$ (isomorfismo de medidas de división cuotitiva).
El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema. Los estudiantes han seguido la lectura identificada como L1.

5.4.6.2. El caso de la pareja Alejandro-Francisco en el problema "El Mayorista"

Un mayorista compra en un matadero 55 corderos a 46 euros cada uno. Vende a un restaurante 33 a 65 euros cada uno y el resto a un supermercado por 58 euros cada uno. ¿Qué beneficio obtuvo?

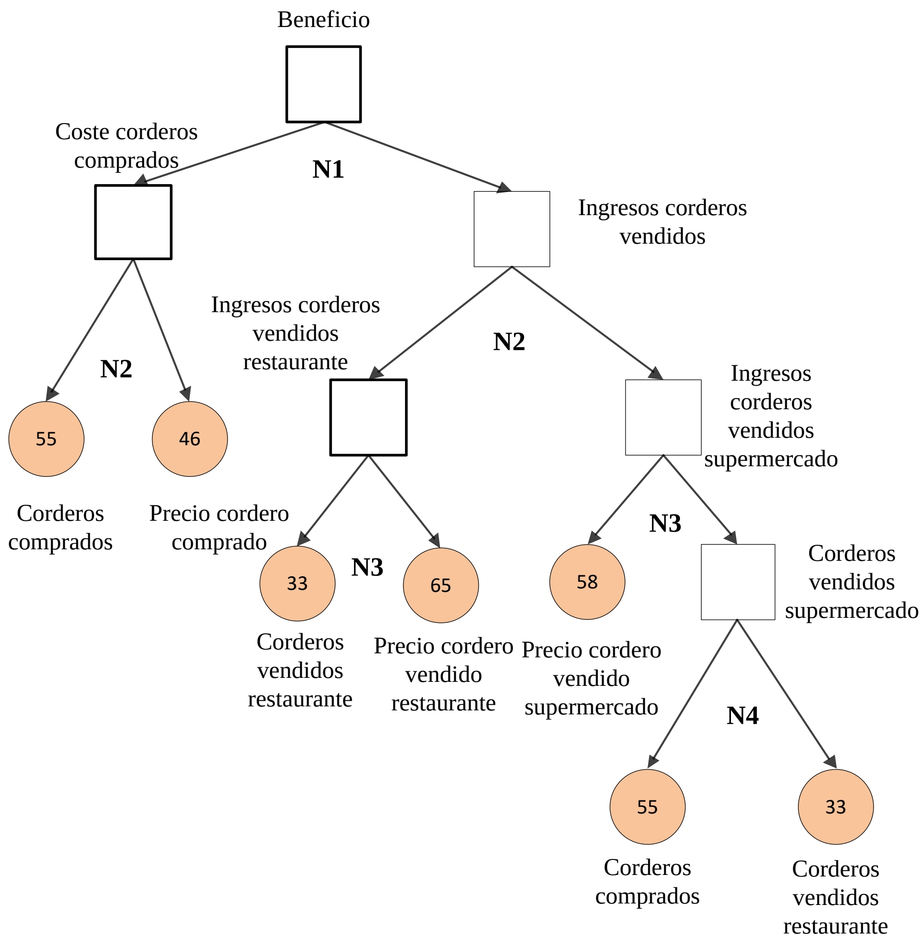


Figura 5.101.

1. (Alejandro y Francisco leen el enunciado del problema.)
2. Alejandro: Tenemos que restar 55 menos 46…
3. Francisco: …y después…
4. Alejandro: … ¡ah! no, multiplicar que diga porque si es cada uno será… (introduce [55·46; Pcm=2530]).

Aunque tras leer el enunciado Alejandro (ítem 2) propone restar 55 menos 46, inmediatamente (ítem 4) se da cuenta del error y propone multiplicar 55 por 46, es decir, propone *Ncm·Pucm*. Parece que ha identificado correctamente un esquema conceptual de isomorfismo de medida que permite averiguar el "precio que paga el mayorista por todos los corderos (*Pcm*)". Es decir, identifica correctamente la relación *Pcm=Ncm·Pucm*.

5. Alejandro: Vale. (Lee la nueva cantidad obtenida) "corderos a un restaurante…"
6. Alejandro: A ver, ahora 65…
7. Francisco: …ahora tendremos que sumarle más 56…

Una vez obtenida la nueva cantidad, Alejandro (ítems 6 y 8) propone aplicar correctamente otro isomorfismo de medida, en este caso relacionado con la venta de los corderos al restaurante y propone multiplicar *Pucr·Ncr*. Parece que ha identificado la relación *Pcr=Pucr·Ncr* en la L1 del problema.

8. Alejandro: …no porque si son cada uno será 65 otra vez (introduce [65·33; Pcr=2145]).

Sin embargo, Francisco (ítem 7) había propuesto sumar 65 más una cantidad que no aparece en el problema, 56 (posiblemente quisiera referirse a 46) en un intento de sumar precios de los corderos, sin darse cuenta que una cantidad es el precio por el que compra y la otra el precio por el que vende al restaurante. Probablemente aquí no habría tenido en cuenta el significado de las cantidades con la adjetivación particular de cada una y se limitara a sumar cantidades de la misma especie.
Además, los dos alumnos no habían tenido demasiados problemas para identificar los dos isomorfismos de medidas multiplicativos del N1 de análisis cuando realizaron el cuestionario Post.

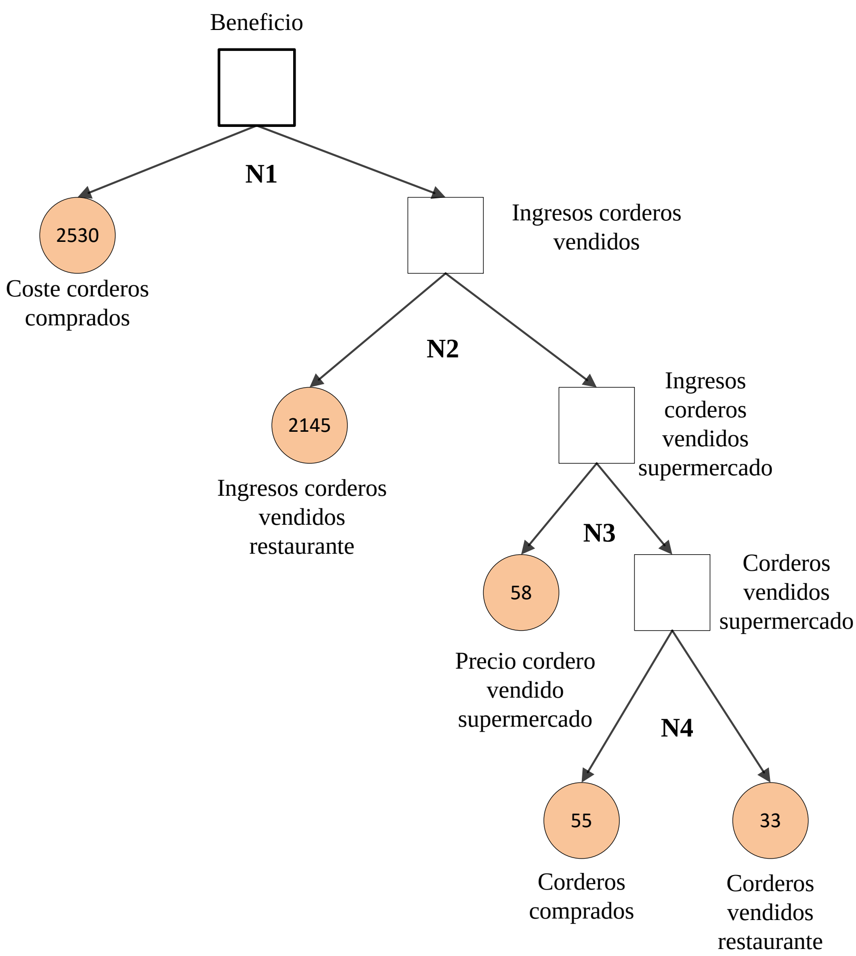


Figura 5.102.

9. Alejandro: Ves, ahora… (lee en el enunciado) ”Cuánto bene…” y ahora sumarlo…
10. Francisco: …faltan los 33 corderos…
11. Alejandro: …ya lo hemos hecho, 65 por 33 (introduce [2530…; …]) ...
12. Francisco: …230 menos 1145.
13. Alejandro: (Introduce [2530+2145; mensaje de error]).

Ahora Alejandro (ítem 9) propone sumar las cantidades 2530 más 2145 obteniendo como respuesta un mensaje de error del sistema. Alejandro, lo justifica diciendo que tienen que averiguar el beneficio que obtuvo el mayorista sin percatarse de que la operación que ha propuesto es una suma y el beneficio lo obtendríamos restando ingresos menos costes. En este caso si hubiese propuesto restar las cantidades hubiese obtenido perdidas ya que los costes son mayores que los ingresos ya que una cantidad habla del coste de los corderos y la otra solo de los ingresos que obtiene de los corderos vendidos al restaurante. Parece ser que Alejandro no tiene clara la idea de lo que significa beneficio.

Sin embargo, Francisco (ítem 12) interpreta el beneficio como restar las dos cantidades y por tanto coste menos ingresos que tiene más sentido que lo propuesto por Alejandro.

En el post test los dos alumnos sumaron las dos cantidades.

14. Alejandro: ¡Ah! pues no, es incorrecta. Pues prueba.
15. Francisco: Dividirlo…
16. Alejandro: … ¿dividirlo? Yo pensaría que sería restarlo (Francisco introduce [2530/…; …]) porque no se puede sumar (Francisco introduce [2530/2145; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Francisco (ítem 15) propone dividir las dos cantidades. El sistema responde con un mensaje de error.

Esta relación propuesta por Francisco pensamos que puede ser debida al mero hecho de cambiar la operación entre las dos cantidades que cree que aparecen en la siguiente relación y que además no tienen ningún significado. Alejandro (ítem 16) tenía poca fe en esta relación ya que el proponía realizar una resta.

17. Alejandro: Ves. Déjame probar a mí. Yo creo, creo (introduce [2530…; …]) pero no estoy seguro, que es una resta (introduce [2530-2145; mensaje de error]).

Alejandro (ítem 17) propone restar 2530 menos 2145. El sistema responde con un mensaje de error.

Esta relación es la que defendió Francisco al principio y que Alejandro ha defendido tras darse cuenta de que sumarlas no era posible.

Lo que parece claro es que los dos alumnos piensan que en la próxima

	relación tienen que aparecer estas dos cantidades. Indicar que esta relación se ha considerado como errónea, a pesar de que podría parecer válida, ya que, al no tener todos los ingresos disponibles todavía, la cantidad obtenida de esta relación serían beneficios negativos ya que los costes siguen siendo superiores a los ingresos y sería manejar un concepto complicado para alumnos de esta edad.
18. Francisco: A lo mejor es multiplicar 19. Alejandro: Yo pensaba que era una resta. (Francisco introduce [2530·…; …]) A ver. Es que si no nos sale. Multiplicar sería, pero es casi imposible. 20. Francisco: A lo mejor sí. (introduce [2530·2145; mensaje de error]).	Con este afán de utilizar estas dos cantidades, Francisco (ítem 18) propone multiplicar las dos cantidades. El sistema responde con un mensaje de error. Los alumnos han entrado en un proceso de *gaming the system* en el que están convencidos de que en la relación tienen que aparecer estas dos cantidades y se han limitado a ir cambiando la operación que las relaciona. Alejandro muestra su poca convicción de que esta relación funcione.
21. Alejandro: O no. Pensemos. Antes de hacer nada pensemos. (Lee)" Precio que paga el mayorista…" Hay que leer porque así yo lo resuelvo todo. 22. Francisco: (Lee) "Precio que paga el mayorista por todos los corderos" "Dinero que recibe de la venta de los corderos al restaurante" 23. Alejandro: Si los vende pierde. Es que… ¡ah! vale, creo que ya lo tengo. Estos, todos los corderos, (introduce [2530…; …]) 55 corderos lo divido… (introduce [2530/55; …]) a ver que nos da (introduce [2530/55; mensaje de error]).	Tras leer el significado de algunas cantidades conocidas de la tabla de cantidades, Alejandro (ítem 23) propone dividir 2530 entre 55 lo que sería considerar un isomorfismo de medida de división partitiva entre el "precio total pagado por los corderos comprados" y "los corderos comprados". El sistema responde con un mensaje de error. Aunque la relación es correcta, la cantidad que se obtendría es una cantidad ya conocida ($Pucm$=46) como precio de cada cordero comprado. Es posible que los alumnos tengan que hacer una revisión del significado de las cantidades que tienen y posiblemente de leer el último mensaje de error que ya les advertía de este hecho como sí que hace Alejandro (ítem 25).
24. Francisco: Mal. 25. Alejandro: (Lee el mensaje de error) "Esta operación ya la habías usado para calcular el precio que paga el	Tras darse cuenta de su error, Francisco (ítems 26 y 28) propone multiplicar 55 por 33, es decir, $Ncm{\cdot}Ncr$. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem

mayorista por cada cordero” ¡buahh! ¡Uh! que lio nos hemos hecho.

26. Francisco: A ver… 55 (introduce [55…; …]) multiplicado por (introduce [55·…; …]) …
27. Alejandro: …eso ya lo hemos hecho ¿no?
28. Francisco: … 33 (introduce [55·33; mensaje de error]).

28) que parece no les da tiempo a leer por la celeridad con que cierran la ventana.
Francisco ha cambiado las cantidades que aparecen en la relación, pero utiliza un isomorfismo de medida multiplicativo para relacionarlas. Es posible que esté pensando en la próxima relación que aparece en el N3 que será averiguar lo obtenido con la venta de los corderos al supermercado y no relacionándolas mediante un esquema de combinación donde una parte (“corderos que vende al supermercado”) tiene que ser hallada mediante la transformación de los corderos comprados y los corderos vendidos al restaurante. Pensamos que una relectura del significado de las cantidades le ayudaría a deshacer el colapso en el que se encuentra. También puede ser posible que simplemente las haya relacionado por el mero hecho de ser corderos y cambiar una de las cantidades.

29. Alejandro: No. Ale ya. Dame que tengo una idea (introduce [2530·…; …]) esto antes lo había dividido. Y si lo multiplicamos (introduce [2530 ·55; mensaje de error]).

Alejandro propone ahora (ítem 29) multiplicar 2530 por 55. El sistema proporciona un mensaje de error.
Parece que Alejandro está intentando combinar estas cantidades con todas las operaciones posibles sin prestar atención al significado de las cantidades en un proceso que podríamos incluir dentro del *gaming the system*.

30. Francisco: Bueno ahora sumar...
31. Alejandro: …no porque ya hemos probado antes y restar tampoco es. Lo hemos probado todo…
32. Francisco: …no, sumar 230 más 55…
33. Alejandro: …lo hemos intentado ya…
34. Francisco: …pues con 33
35. Alejandro: A ver. (lee) “33 corderos los vende a un restaurante por 65 euros cada uno” eso ya lo hemos hecho hemos multiplicado y nos ha salido eso. El mayorista por todos los corderos…

Aunque Francisco dentro del *gaming the system* propone sumar las cantidades (ítem 30), Alejandro le apunta que ya las han sumado y restado y no ha funcionado (ítem 31). Tras la negativa, Francisco (ítem 34) propone sustituir la cantidad 55 por 33 en la relación. Al releer de nuevo el enunciado, Alejandro (ítem 35) indica que ya han aplicado el isomorfismo multiplicativo del 33 por 65 y por tanto descarta la relación propuesta por Francisco. Ante la negativa, Francisco realiza un proceso de síntesis de dos relaciones y propone (ítem 36), primero sumar 2530 más 33 y después 2145 más 55. Francisco está mezclando corderos

36. Francisco: A lo mejor tenemos que sumar 2530 por 33 y después 2145 más 55.
37. Alejandro: A ver. No, no, no, que creo que ya lo tengo. Mayorista por los corderos (introduce [2530+55; mensaje de error]).

vendidos y comprados, costes con ingresos lo que denota que se encuentran bastantes perdidos tanto en el nivel que se encuentran del problema como en el significado de las cantidades.
Ante la negativa, Alejandro (ítem 37) propone sumar 2530 más 55). El sistema responde con un mensaje de error.
Alejandro verbaliza que la cantidad 2530 tiene que ver con el mayorista al igual que la cantidad 55 que son los corderos comprados por el mayorista, pero no cae en la cuenta de que son cantidades de distinta naturaleza para relacionarlas en una relación aditiva.

38. Francisco: Ya lo habíamos probado.
39. Alejandro: Es que no encuentro yo…
40. Francisco: (Inaudible) (introduce [2530+…; …])
41. Alejandro: Ya lo había probado yo, (Francisco introduce [2530 +33; mensaje de error]).

Ahora Francisco (ítem 41) propone sumar 2530 más 33. El sistema responde con un mensaje de error.
El problema sigue siendo el mismo de antes relacionando cantidades de distinta naturaleza en una relación aditiva.

42. Alejandro: A ver. Pensemos. Tu piensa, piensa
43. (siete segundos de silencio)
44. Francisco: ¿Con 46 hemos probado antes para hacer esos dos?
45. Alejandro: Sí, multiplicar. Hemos multiplicado este (señala en la pantalla la cantidad 55) y este (señala en la pantalla la cantidad 46) y este (señala en la pantalla la cantidad 33) y este (señala en la pantalla la cantidad 65) y nos ha salido… no hemos hecho este (señala en la pantalla la cantidad 58).
46. Francisco: A lo mejor será esto (introduce [2530…; …]) multiplicado (introduce [2530·…; …]) por 58 (introduce [2530·58; mensaje de error]).

Tras un breve silencio (ítem 43) Francisco (ítem 44) y Alejandro (ítem 45) intentan recordar todas las relaciones con las cantidades que conocen percatándose que no han relacionado dos de esas cantidades. Entonces Francisco (ítem 46) propone multiplicar 2530 por 58. El sistema responde con un mensaje de error.
De nuevo el único razonamiento que parece que siguen es el de si ya lo han probado o no sin percatarse del significado de las cantidades (*wordwalking*).

47. Alejandro: A ver. “Y el resto…” el resto…” a un supermercado”

Esta vez Alejandro (ítem 47) se percata de la frase en el enunciado que resolvería

48. Francisco: A lo mejor será 2145 dividido por 58
49. Alejandro: (introduce [2145/…; …]) No tiene que ver nada (introduce [2145/58; mensaje de error]).

la relación en el N4 del problema remarcando "el resto" pero Francisco propone (ítem 48) dividir 2145 entre 58. El sistema responde con un mensaje de error.

Es posible que Alejandro empiece a darse cuenta de que la variable que tienen que hallar son los corderos vendidos al supermercado y que por el comentario Francisco quiera aplicar este isomorfismo de medida de división cuotitiva entre ingresos y precio del cordero vendido al restaurante para averiguar la cantidad de corderos que vendió al supermercado. Esto ha provocado una deformación (Figura 5.103) de la cantidad 2145 (ingresos por los corderos vendidos al restaurante) con el significado ingresos por los corderos vendidos al supermercado que es una cantidad que no se podrá averiguar hasta el N2 de análisis.

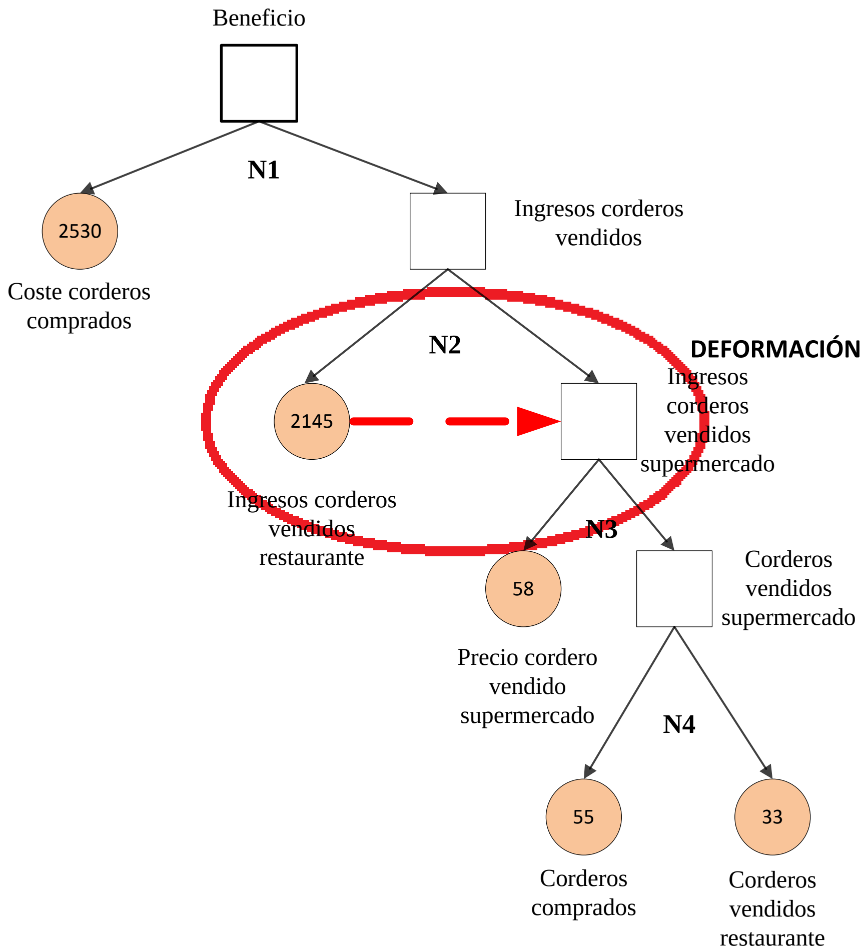


Figura 5.103.

50. Alejandro: Es que… a ver, pensemos que no estamos pensando. Si pensamos será mejor. Hay que hacer algo que concrete con todo esto ¿sabes? Que dé el resultado, pero si no hay resultado ¿para qué? 51. Francisco: A lo mejor será esto (introduce [2145…; …]) más (introduce [2145+…; …]) 58… 52. Alejandro: …puede. 53. (Francisco introduce [2145+58; mensaje de error].)	Siguiendo la relación introducida en el paso anterior, Francisco (ítem 51) propone sumar 2145 más 58. El sistema responde con un mensaje de error. Francisco ha propuesto una relación entre dos cantidades que, aunque indican dinero, una se refiere a los ingresos totales (extensiva) y la otra al ingreso por cordero vendido al supermercado (intensiva) por lo que no tienen sentido en una relación aditiva.
54. Alejandro: Tengo una corazonada (introduce [2145·…; …]) 2145 por 58 (introduce [2145·58; …]) … 55. Francisco: …ya lo hemos probado… 56. Alejandro: … (introduce [2145·58; mensaje de error]).	Alejandro (ítem 54) propone multiplicar 2145 por 58. El sistema responde con un mensaje de error. Esta relación ya la habían propuesto anteriormente (ítem 46) como indica Francisco (ítem 55).
57. Alejandro: ¡Ah! ¿sí? pues no me he enterado. ¿Hemos dividido ya este (señala en la pantalla la cantidad 2145) y este (señala en la pantalla la cantidad 58)? 58. Francisco: Que va, habías dividido este (señala) Ah sí, si lo habías dividido creo. 59. Alejandro: Vamos a probar a ver si… (introduce [2145/58; mensaje de error]).	Tras el mensaje de error, Alejandro propone dividir las cantidades. El sistema responde con un mensaje de error. De nuevo parece que usan la estrategia de ir cambiando las operaciones que relacionan las cantidades sin más razonamiento y siguiendo lo que parece ser una estrategia de *gaming the system*. Además, esta relación ya la habían introducido anteriormente sin éxito (ítem 49).
60. Francisco: A lo mejor será de esto con esto (introduce [2530·…; …]) … 61. Alejandro: …a lo mejor es algo de aquí (señala los botones en la tabla de cantidades), no se sabe. 62. (Francisco introduce [2530·58; mensaje de error]).	Tras el mensaje de error, Francisco (ítem 60 y 62) propone multiplicar 2530 por 58. El sistema responde con un mensaje de error. Los alumnos siguen probando relaciones, parece ser, sin razonamiento alguno y ahora vuelven a repetir una relación introducida anteriormente (ítem 46).
63. Alejandro: Si eso ya lo hemos probado antes. 64. Alejandro: Bueno 65. (ocho segundos de silencio)	Francisco (ítem 66) propone multiplicar 55 por 58. El sistema responde con un mensaje de error. El isomorfismo de medidas multiplicativo propuesto por Francisco

66. Francisco: ¡Ah! Si son cada uno, son 55 corderos cada uno…55 (introduce [55…; …]) multiplicado (introduce [55·…; …]) por 58 (introduce [55·58; mensaje de error]).	podría ser válido si 55 fueran los corderos vendidos al supermercado y no los corderos comprados. De nuevo hay un colapso en la relación que aparece en el N3 de análisis del problema con una deformación de la cantidad “corderos vendidos al supermercado”.
67. Alejandro: Es que al revés. Tiene que ser mayor, entonces sería 58… (introduce [58·…; …]) … 68. Francisco: …a mí me ha dado más 55… 69. (El investigador invita a abandonar el problema sin resolverlo correctamente en su totalidad).	Tras la finalización del tiempo establecido por el investigador para resolver correctamente el problema se invita a los alumnos a abandonarlo sin resolverlo en su totalidad (ítem 69).

5.4.6.3. El caso de la pareja Alejandro-Francisco en el problema “El Bautizo”

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

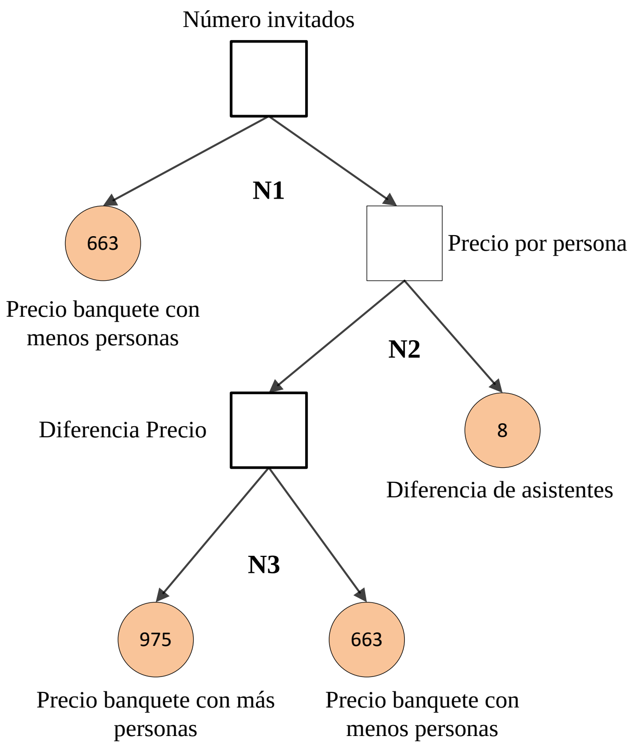


Figura 5.104.

1. (Francisco y Alejandro leen el enunciado del problema.)
2. Alejandro: A ver (inaudible).
3. Francisco: (Inaudible.) (Señala la pantalla.)
4. Alejandro: Piensa, espera, espera, espera.
5. Francisco: …y después multiplicar por 8…
6. Alejandro: …si hubieran venido 8 personas más… sí, puede ser (introduce [663·8; mensaje de error]).

Tras leer el enunciado, Francisco (ítem 3 y 5) parece que realiza un proceso de síntesis de dos pasos en el N3 y N2 del problema. Sin embargo, la primera verbalización es inaudible. En el segundo paso propone multiplicar la cantidad obtenida en el primer paso por 8. Podemos concluir que la relación que propone en el N2 es consecuencia de aplicar un esquema de isomorfismo de medidas, pero no parece plasmarla en una operación correcta.
Como respuesta al planteamiento, Alejandro (ítem 6) propone multiplicar 663 por 8 sin atender (posiblemente, porque tampoco ha sido capaz de descifrarla) a la primera operación propuesta por Francisco. El sistema proporciona un mensaje de error.

7. Francisco: No
8. Alejandro: No, no.
9. Francisco: Es (introduce [663…; …]) sumado (introduce [663+…; …]) a esto (introduce [663+975; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Francisco (ítem 9) propone sumar de manera incorrecta 663 más 975, es decir, $Ctm+Ct$.
Posiblemente esta fuera la primera operación propuesta por Francisco (ítem3) y sería el resultado de aplicar un esquema de cambio posiblemente para determinar la cantidad “diferencia de precio entre los banquetes (*Dp*)”.

10. Alejandro: Tengo una idea. A ver… (introduce [975-663; Dp=312]).

Alejandro (ítem 10) propone realizar una resta entre 975 y 663 que le permite hallar la “diferencia de precio entre los dos banquetes (*Dp*=312)”. Esta operación expresaría correctamente una relación entre tres cantidades $Ctm=Ct+Dp$ fruto de aplicar un esquema conceptual de cambio. Parece plausible concluir que Alejandro ha aplicado un esquema adecuado, pero que ha tenido dificultades a la hora de plasmar la relación en forma de operación.

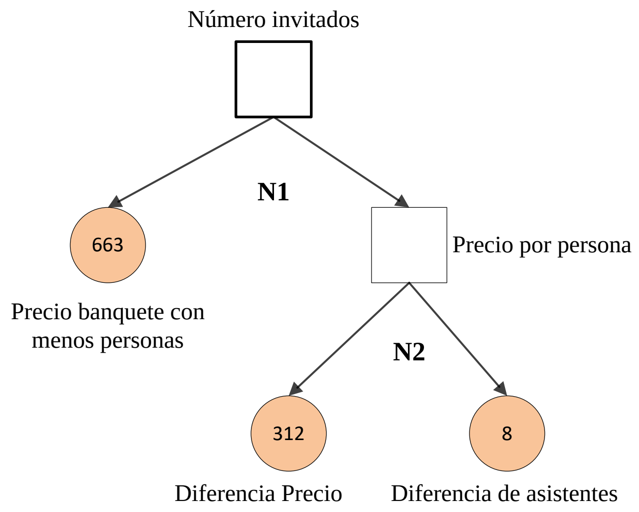


Figura 5.105.

11. Alejandro: Ves. Y ahora 312… (introduce [312·…; …]) …
12. Francisco: …multiplicado por 8. (Alejandro introduce [312·8; mensaje de error]).

Ahora Alejandro (ítem 11) y Francisco (ítem 12) proponen multiplicar 312 por 8. El sistema proporciona un mensaje de error. Esta es la relación que habían propuesto anteriormente una vez hubiesen conseguido la primera cantidad en el N3 del problema. Nuevamente parece ponerse de manifiesto una dificultad para convertir en operación la relación que se establece al aplicar un esquema de isomorfismo de medidas.

13. Francisco: No, dividido…
14. Alejandro: …dividir, dividir. Diferencia entre los dos banquetes. (Francisco introduce [312/8; Pm=39])

Inmediatamente, Francisco (ítem 13) se da cuenta del error y propone dividir 312 entre 8. Esto supone identificar correctamente la relación $Dp=Pm\cdot Pa$ fruto de un isomorfismo de medidas que se representa mediante una división partitiva con la que podemos hallar el "precio del menú de una persona (*Pm*)".

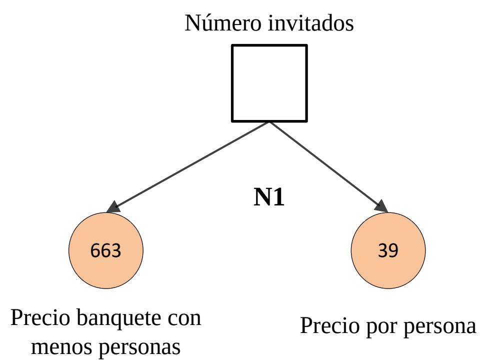


Figura 5.106.

15. Francisco: Ya está, 39 personas.
16. Alejandro: (lee) “Precio del menú de una persona” de una persona…
17. Francisco: …ahora multiplicar 39 (introduce [39…; …]) por (introduce [39·…; …]) 8 (introduce [39·8; mensaje de error]).

Francisco (ítem 17) propone multiplicar 39 por 8. El sistema responde con un mensaje de error.

18. Alejandro: A ver, piensa. Si 39 es el precio del menú de una persona y aquí dice que todas las personas toman el mismo menú si vienen… sino sé cuántas personas vienen.
19. Francisco: A lo mejor es 39 pero como no han venido más 8 personas (introduce [39…; …]) 39 (introduce [39-…; …]) menos (introduce [39-8; …] 8 (introduce [39-8; mensaje de error]).

Alejandro (ítem 18) parece intentar establecer una relación entre el “número de personas (*P*)”, el “precio de un menú (*Pm)*” y el “precio del banquete con menos personas (*Ct*)”. Su razonamiento finaliza al constatar que no conoce el número de personas (la cantidad por la que se pregunta en el problema) y esto pone de manifiesto (1) que no es consciente de que conoce el precio de banquete, o (2) que no es capaz de relacionar las tres cantidades.
De cualquier modo, Francisco verbaliza “como no han venido más 8 personas” y plantea 39 – 8, lo que podría poner de manifiesto que se centra en la palabra clave “más” presente en el enunciado.

20. Alejandro: (Inaudible.) A ver.
21. (silencio de quince segundos)
22. (Alejandro introduce [312/39; …]) …
23. Francisco: …no, multiplicado (Alejandro introduce [312/39; mensaje de error).

Tras un silencio (ítem 21) Alejandro (ítem 22) propone dividir 312 entre 39, aunque Francisco (ítem 23) había propuesto multiplicarlas. Esto supondría emplear una relación ya empleada para determinar una cantidad ofrecida inicialmente en el enunciado. El sistema proporciona un mensaje de error.

24. Alejandro: Vale (introduce [312·39; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Alejandro (ítem 24) introduce lo propuesto por Francisco (ítem 23) anteriormente y multiplica 312 por 39. El sistema proporciona un mensaje de error. Posiblemente los alumnos han quedado anclados en una relación entre cantidades ya empleada e intentan combinar dos de las cantidades basándose en lo que parece una estrategia de *gaming the system*.

25. Francisco: No hombre, no

Siguiendo la estrategia, Francisco (ítem 27), sin demasiada convicción, propone

26. Alejandro: Es que no me ha quedado (inaudible).
27. Francisco: A lo mejor es sumado (introduce [312…; …]) …
28. Alejandro: …puede.
29. (Francisco introduce [312+39; mensaje de error]).

sumar 312 más 39. El sistema responde con un mensaje de error.

30. (Silencio de 10 segundos).
31. Alejandro: El coco no está solo para dar cabezazos, está para pensar.
32. (Silencio de ocho segundos)
33. Alejandro: “Precio del menú de una persona y diferencia de precio entre los dos banquetes” Si el precio del banquete es de 663 euros…
34. Francisco: (Alejandro introduce [663·…; …]) … ¡anda! 663 multiplicado por 8 (Alejandro introduce [663·8; …]) y después 975 otra vez multiplicado por 39…
35. Alejandro: …esto ya lo hemos probado antes y no (borra lo introducido). Veamos. Podemos probar a hacer esto… (introduce [975·312; mensaje de error]).

Tras un silencio, Alejandro (ítem 33) lee los nombres de algunas cantidades ya determinadas. Sin embargo, por el contenido de las propuestas siguientes, no parece tener éxito a la hora de concebir un plan. Así, Francisco (ítem 34) propone multiplicar 663 por 8 y después 975 por 39. Alejandro le comenta que ya han introducido antes esas relaciones sin éxito y prefiere probar (ítem 35) a multiplicar 975 por 312. El sistema proporciona un mensaje de error.

Parece que los estudiantes no son capaces de incorporar las nuevas cantidades determinadas dentro de un plan de resolución e inician un proceso de prueba y error.

36. Alejandro: No. Espera, espera, espera (introduce [39/8; …]) …si hubieran venido estas personas…
37. Francisco: …ya lo hemos probado...
38. Alejandro: Ah ¿sí? No me acuerdo (introduce [39/8; mensaje de error]).

De nuevo Alejandro se centra en las cantidades 39 y 8 y propone (ítem 36) dividirlas. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 38).

39. Francisco: (inaudible) (introduce [39·8; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Francisco (ítem 39) propone multiplicar 39 por 8. El sistema responde con un mensaje de error. A estas alturas parece evidente que Francisco piensa que existe una relación (multiplicativa o no) entre estas cantidades y sigue probando combinaciones. Esta relación ya se había introducido en el ítem 17.

40. Francisco: Será una suma entre los dos.
41. Alejandro: ¿Una suma?
42. Francisco: (inaudible)
43. Alejandro: (inaudible)
44. Francisco: (inaudible)
45. Alejandro: (introduce [312/39; mensaje de error]).

En la línea del intento anterior, Francisco (ítem 40) propone sumar las dos cantidades. Sin embargo, Alejandro (ítem 45) introduce una división entre 312 y 39. El sistema responde con un mensaje de error. El hecho de que parece que no lean los mensajes de error están produciendo que repitan relaciones (ítem 23) que les proporcionan cantidades ya conocidas tal y como el mensaje les recuerda.

46. Alejandro: Vamos a sumar lo que tú dices (introduce [312…; …]) …
47. Francisco: …vale (Alejandro introduce [312+39; mensaje de error]).

Alejandro (ítem 46) incorpora a sus valores de prueba la operación que indicó Francisco anteriormente y propone (ítem 47) sumar 312 más 39. El sistema responde con un mensaje de error. Esta relación ya había sido propuesta e introducida anteriormente (ítem 29). Esto da una idea de que los estudiantes repiten pensamientos incorrectos. Por otro lado, la propuesta sirve para deducir que no aplican mecanismos de control sobre sus propuestas ya que las cantidades no son de la misma especie y carece de sentido relacionarlas de manera aditiva.

48. Alejandro: Vale.
49. Francisco: A lo mejor es este (introduce [663…; …]) más (introduce [663+312; mensaje de error]).

Probando relaciones y sin demasiada convicción, Francisco (ítem 49) propone sumar 663 más 312. El sistema proporciona un mensaje de error. Los alumnos vuelven a plantear una relación aditiva en el que la cantidad calculada ya es una cantidad conocida en el problema (975). En definitiva, repiten el uso de esquemas que ya han funcionado y obtienen relaciones ya empleadas.

50. Alejandro: A ver. (lee) “¿Cuántos invitados asistieron?” Por eso yo no sabía las personas. (introduce [312·39; …]) …
51. Francisco: …eso ya lo hemos probado antes… (introduce [312·39; mensaje de error]).

Alejandro (ítem 50) lee la pregunta del problema y se da cuenta de que lo que él estaba buscando como cantidad conocida (ítem 18) en realidad era una cantidad desconocida. Sin embargo, su propuesta posterior no parece tener en cuenta su descubrimiento y vuelve a introducir una operación ya sometida a juicio del sistema (ítem 24).

52. Alejandro: Esto es el (lee los globos de los botones) “Total del banquete”, ”Personas que han asistido de más”…
53. Francisco: … ¡ah! 312 menos 39
54. (Alejandro introduce [312…; …])
55. Francisco: Que aún no has apretado
56. (Alejandro introduce [312-39; mensaje de error]).

Tras la lectura de los globos de los botones de las cantidades ya determinadas en los que se ofrecen los nombres de las cantidades, Francisco (ítem 53) propone restar 312 menos 39. El sistema responde con un mensaje de error.

57. Alejandro: Estaba repasando yo (lee el mensaje de los globos de los botones) “Coste total del banquete”, ”Personas que han asistido de más” “Coste total del banquete con 8 personas más” (introduce [975/8; mensaje de error]).

Al seguir repasando los botones de las cantidades conocidas, Alejandro (ítem 57) propone dividir 975 entre 8. El sistema proporciona un mensaje de error. En este punto, podríamos ubicar un punto de inflexión en la resolución. Posiblemente, Alejandro integra en la situación las cantidades desconocidas determinas después de leer los nombres que les ha asignado el sistema. Aunque su propuesta es incorrecta, es el resultado de aplicar un esquema conceptual adecuado

58. Francisco: (Inaudible.)
59. Alejandro: No puede ser tan difícil. Hay que calentar el coco.
60. Francisco: (Inaudible.)
61. Alejandro: (inaudible.)
62. Francisco: (inaudible.)
63. Alejandro: Vamos a leer otra vez el problema.
64. (Francisco y Alejandro vuelven a leer el enunciado del problema otra vez)
65. Alejandro: Ya decía yo que necesitábamos los invitados para que… A ver. (lee) “Precio del menú de una persona”. Jo, pues un restaurante de lujo sería… a ver. Precio de una persona (introduce [39…; …]) ... esto… (señala con el cursor la cantidad 312) “diferencia entre los dos banquetes”. ¿Cuántos asistieron? ...si la celebración… coste total. Voy a probar (borra lo introducido anteriormente), no se

Alejandro plantea releer el enunciado (ítem 63). Tras la relectura del enunciado, verbaliza los nombres asignados por el sistema a las cantidades. A continuación, Alejandro (ítem 65) propone dividir 663 entre 39, es decir, identifica correctamente la relación $Ct=Pm \cdot P$ (isomorfismo de medidas de división cuotitiva) y consiguen hallar el “número de personas (P)”.

En la culminación de la resolución podemos concluir que ocupa un papel central el esfuerzo de Alejandro para integrar las cantidades que han ido calculando en el contexto del problema. Por otro lado, en el ítem 65, Alejandro verbaliza un hecho (“Jo, pues un restaurante de lujo sería… a ver. Precio de una persona (introduce [39…; …]) ...”) que posiblemente explique el uso que han intentado hacer del valor 39. Posiblemente consideraban 39 el precio del banquete y de ahí las dificultades para integrarlo en la resolución.

sabe, pero voy a probar. (Alejandro introduce [663/39; P=17]).

66. (El sistema da como correcta la última operación e indica la finalización del problema correctamente)

5.4.6.4. El caso de la pareja Alejandro-Francisco en el problema "La Empresa"

Carla, Icíar y Rodrigo son propietarios de una empresa que este año ha ganado 18.000 €. Deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes; a Icíar, 9; y a Rodrigo, 5. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

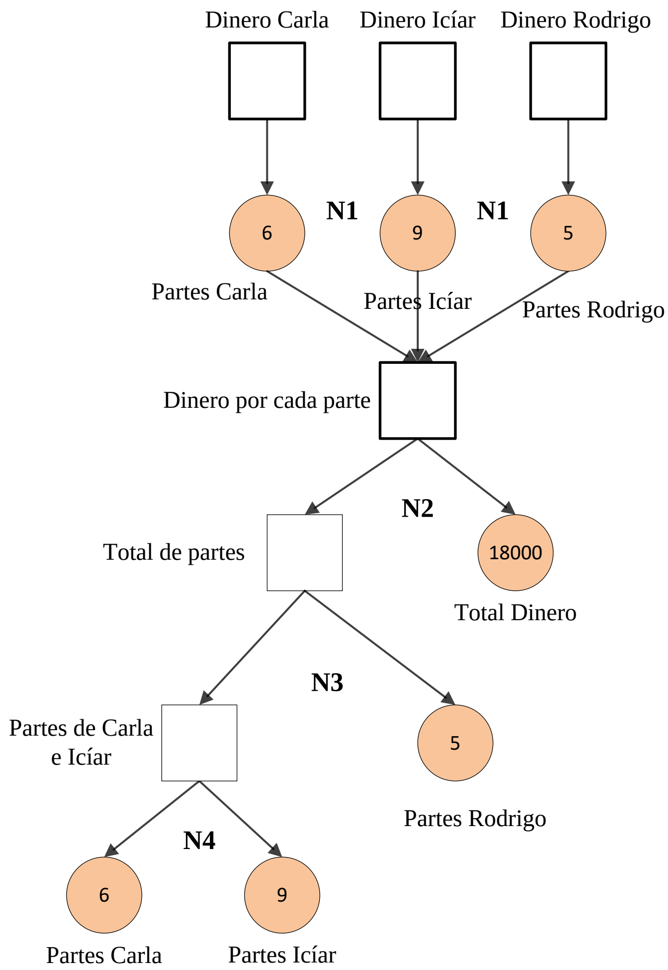


Figura 5.107.

1. (Francisco y Alejandro leen el enunciado del problema.)
2. Alejandro: A ver. Dice 6 partes…
3. Francisco: …18000 multiplicado por las 6 partes…

Tras leer el enunciado Francisco (ítem 3) propone multiplicar 18000 por 6. El sistema responde con un mensaje de error (ítem 6). El hecho de que Alejandro (ítem 2) haya verbalizado que hay 6 partes puede haber hecho que Francisco desencadenara un razonamiento en el

4. Alejandro: …sí. (introduce [18000·…; …]) o no…
5. Francisco: …o sí (Alejandro introduce [18000·6; …]) …
6. Alejandro: …o no… (introduce [18000·6; mensaje de error]).

que los 18000 euros es la cantidad que corresponde a cada parte.

7. Alejandro: Ves, ya decía yo.
8. Francisco: Era dividir que me he equivocado (introduce [18000/…; …]) …
9. Alejandro: …ya decía yo.
10. (Francisco introduce [18000/6: mensaje de error]).

Sin embargo, tras el mensaje de error, Francisco (ítem 8) propone dividir 18000 entre 6 y reconoce que la propuesta anterior fue una confusión. Al plantear dividir, centra la atención en la acción de repartir posiblemente por el efecto distractor que produce la palabra clave, lo que supone activar un esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva. El sistema proporciona un mensaje de error.

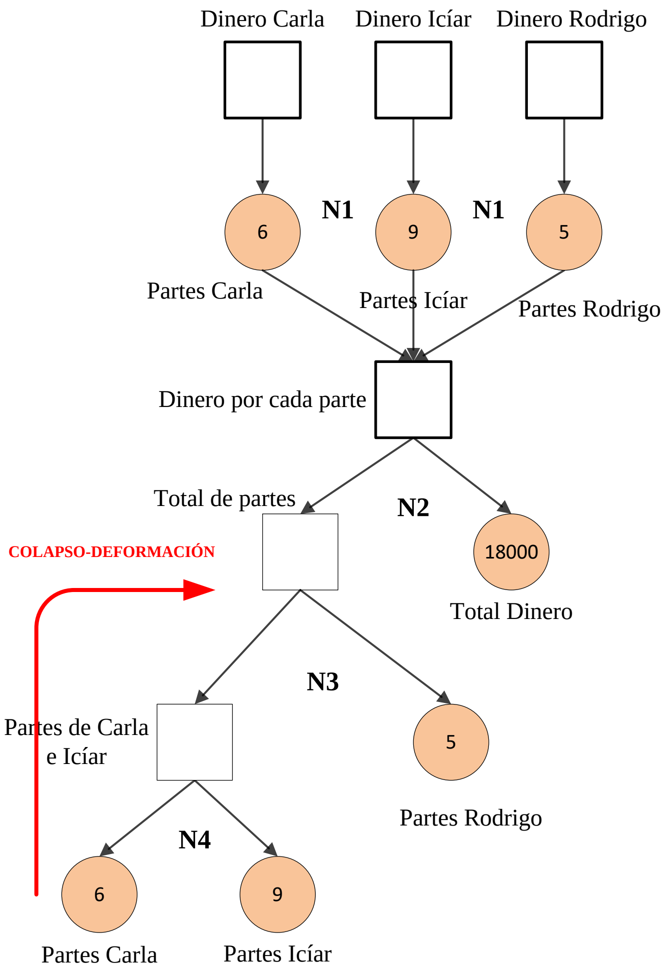


Figura 5.108.

11. Alejandro: Piensa, piensa.
12. (Ocho segundos de silencio)
13. Francisco: Repartir 9 más 6 que suman entre los dos (introduce [9+6; ...]) …
14. Alejandro: …tres. Son tres.
15. (Francisco introduce [9+6; Pci=15]).

Francisco (ítem 13) propone sumar 9 más 6, lo que supondría la determinación de un fragmento del total de partes. Esto supone aplicar correctamente un esquema de combinación 1 donde las partes son conocidas y el total es desconocido pero que no es suficiente para hallar el total de partes que hay. Esta operación está ligada a la relación $Pci=Pi+Pc$ que es correcta en las lecturas L5, L11, L12 y L13 del problema. Sin embargo, Alejandro (ítem 14) advierte de que en el problema hay tres cantidades.

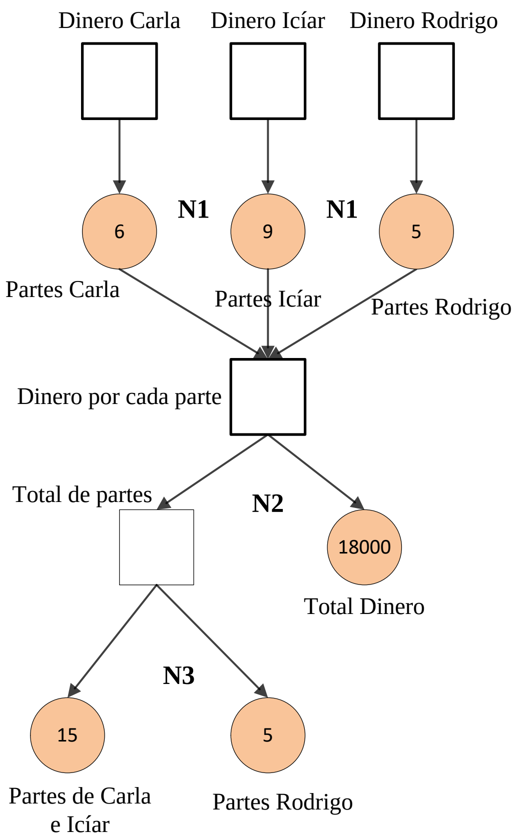


Figura 5.109.

16. Alejandro: (lee) “Partes de Carla e Icíar” (introduce [15+5; P=20]).

Ahora sí Alejandro (ítem 16) propone sumar 15 más 5 para averiguar el total de partes, aplicando nuevamente un esquema de combinación 1 plasmado en la relación $P=Pci+Pr$.

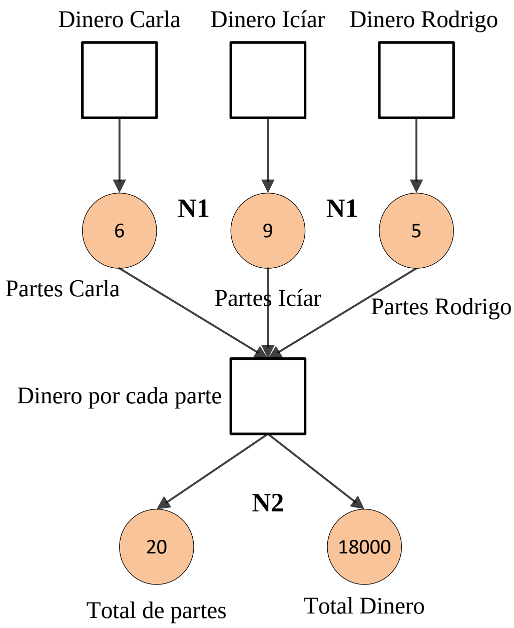


Figura 5.110.

17. Francisco: 20 multiplicado por 18000…
18. Alejandro: …o dividir (introduce [18000/…; …]) …
19. Francisco: …no… (Alejandro introduce [18000/20; Dp=900]).

Francisco (ítem 17) parece identificar que las cantidades 18000 y 20 pueden integrarse en una relación multiplicativa, pero materializa la relación de manera incorrecta mediante una multiplicación (isomorfismo de medidas multiplicativo).Sin embargo, Alejandro (ítem 18) propone dividir 18000 entre 20, es decir, plantea una operación que supondría considerar la relación correcta $D=Dp{\cdot}P$, apoyada en un esquema de isomorfismo de medidas de división partitiva, para calcular el "dinero que le toca a una parte".

La propuesta de Francisco se aparta de su resolución en el post test donde realizó correctamente una operación de división en este momento de la resolución.

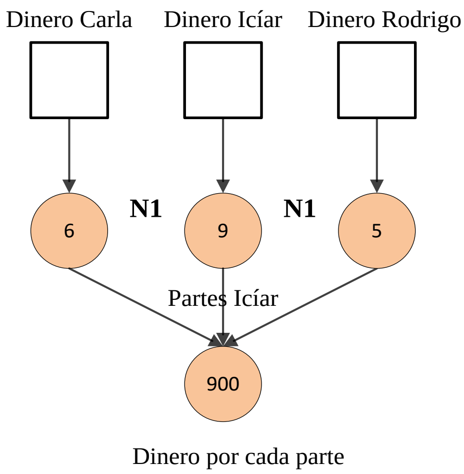


Figura 5.111.

20. Alejandro: Ves, era dividir
21. Francisco: ¡Ah! Sí.
22. Alejandro: No pasa nada. Eso ya se va.
23. Francisco: Yo… (introduce [18000/…; …]) …
24. Alejandro: …si tú lo sabes…
25. Francisco: (inaudible) (introduce [18000/900; mensaje de error]).

Francisco (ítem 25) propone dividir 18000 entre 900. El sistema responde con un mensaje de error en el que se especifica que esa relación ya se ha utilizado previamente.

26. Alejandro: Hay que pensar hombre y no hacerlo así a boleo. (lee) “Dinero que le toca de una parte” …de una parte (introduce [900…; …]) (lee) “Icíar tres partes” suena mal esto de partes, …6 partes… “Icíar 4 y a Rodrigo 5” “Cuánto dinero ha recibido cada uno” A ver… (borra lo introducido anteriormente).
27. Francisco: A lo mejor es restar (introduce [18000-900; …]) ...
28. Alejandro: …o sumar…
29. Francisco: (introduce [18000-900; mensaje de error]).

Alejandro (ítem 26) intenta reorganizar la resolución releyendo los nombres de las cantidades. Mientras realiza este repaso, empieza a introducir una expresión de la que solo queda el valor 900. Posiblemente, estaba pensado en multiplicar por las distintas partes que corresponden a los protagonistas, pero no lo verbaliza y borra. Francisco (ítem 27) propone restar 18000 menos 900, mientras Alejandro (ítem 28) sostiene que igual es sumar. El sistema proporciona un mensaje de error. Este pequeño diálogo pondría de manifiesto que los estudiantes, en este momento, no parecen disponer de un plan a seguir.

30. Francisco: …sumado ¿cómo?
31. Alejandro: No, sumado no es. Tengo una idea. (introduce [900/…; …]) …
32. Francisco: … ¿entre 5 hemos probado?...

Tras el mensaje de error y tras descartar la suma, Alejandro (ítem 33) propone dividir 900 entre 20, mientras que Francisco (ítem 32) apuesta por dividir entre 5. El sistema proporciona un

33. Alejandro: …si (introduce [900/20; mensaje de error]).	mensaje de error en el que se indica que la relación ya se ha empleado.
34. Francisco: ¡Ah! Multiplicado, has multiplicado y después sumado con 18000 (Alejandro introduce [900·20; …]), creo. (Alejandro introduce [900·20; mensaje de error]).	Francisco (ítem 34) plantea un proceso de síntesis de dos pasos en el que propone multiplicar 900 por 20 y después la cantidad obtenida sumársela a 18000. El sentido no puede aclararse y más cuando 18000 y 20·900 es la misma cantidad. Al introducir la primera operación (900·20), el sistema responde con un mensaje de error.
35. Alejandro: Pues... 36. (Silencio de dieciséis segundos) 37. (Francisco introduce [18000/20; mensaje de error]).	Tras un prolongado silencio (ítem 36) y sin verbalizar nada, Francisco (ítem 37) propone dividir 18000 entre 20. El sistema responde con un mensaje de error en el que se indica que esa relación ya se utilizado previamente.
38. Alejandro: ¡Ay! (lee) “Total de partes entre los tres” 39. (Silencio de diecisiete segundos) 40. (Francisco introduce [18000…; …]) … 41. Alejandro: …prueba hombre, no te (inaudible)… 42. Francisco: (señala) 18000 para que le toquen 6 partes a Carla. Restado (introduce [18000-6; mensaje de error]).	Tras otro prolongado silencio (ítem 39) Francisco propone restar 18000 menos 6. El sistema proporciona un mensaje de error (ítem 42). Posiblemente se centra en las cantidades tal y como aparecen en el enunciado y las relaciona de manera aditiva sin tener en cuenta que ambas cantidades no representan a magnitudes de la misma naturaleza.
43. Alejandro: (introduce [18000…; …] y lo borra) A ver. 44. (Silencio de nueve segundos.) 45. Alejandro: Si Carla e Icíar tienen estas ¿cuántas tendrá Rodrigo? 46. (Francisco introduce [20+15; mensaje de error]).	Alejandro (ítem 43) introduce la cantidad 18000 pero parece que no encuentra ninguna cantidad con la que relacionarla y borra lo introducido. Posteriormente se pregunta en voz alta (ítem 45) cuántas partes tiene Rodrigo si Carla e Icíar tiene estas, y Francisco (ítem 46) parce responder, de manera errónea, sumando 20 (el total de partes) y 15 (la suma de las partes de Carla e Icíar). El sistema responde con un mensaje de error. La acción de Francisco pone de manifiesto que tiene dificultades no solo para continuar el proceso de análisis

usando las cantidades desconocidas que se han determinado, sino que también para recordar cómo se han determinado estas cantidades. Podríamos decir que, ante la dificultad para poner en juego nuevas relaciones, los estudiantes recurren a relaciones ya usadas porque son las únicas que son capaces de identificar.

47. Alejandro: A ver.
48. (Silencio de ocho segundos.)
49. Francisco: 900 multiplicado por 15 y después sumado al 18000
50. (Alejandro intenta pedir ayuda al sistema y este le responde que no le puede dar ayuda)
51. Francisco: Pero ¿qué haces?
52. Alejandro: (Introduce [900·…; …]) Pero que tonto ¿Multiplicado por qué? (introduce [900·15; …])
53. Francisco: ¿Por qué? Por 20.
54. Alejandro: Por 20. Ahora ya tengo el 15 (introduce [900·15; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Francisco (ítem 49) realiza un proceso de síntesis de dos pasos y propone multiplicar 900 por 15 y la cantidad obtenida sumársela a 18000. Cuando Alejandro (ítem 52) introduce la operación, Francisco (ítem 53) parece que cambia de idea y propone multiplicarlo por 20. Sin embargo, Alejandro (ítem 54) deja la operación introducida con la excusa de que ya lo tiene escrito. El sistema proporciona un mensaje de error.
.

55. Alejandro: Pero he estado a punto.
56. Francisco: Y si a lo mejor probamos con el 900 (introduce [900…; …]) …
57. Alejandro: …hay que pensar hombre no probar…
58. Francisco: …por el 20 (introduce [900·20; …]) que son las partes entre los tres (introduce [900·20; mensaje de error]).

Es ahora cuando Francisco (ítem 58) propone la relación verbalizada anteriormente y multiplica 900 por 20. El sistema responde con un mensaje de error donde se indica que la relación ya se ha utilizado. Esta misma expresión ya la habían introducido anteriormente (ítem 34).

59. Alejandro: Ahí has estado cerca, pero (niega con la cabeza) …
60. Francisco: ¿Este 20 son entre los tres? (señala con el cursor el botón de la tabla de cantidades).
61. Alejandro: Son todas las partes entre los tres.
62. (Francisco introduce [18000-…; …]) …

Sin que quede claro en qué apoya su argumento, Alejandro (ítem 59) valora positivamente la acción de Francisco en el ítem 58. Esto pone de manifiesto que también Alejandro está teniendo problemas para recordar cómo se han determinado las cantidades desconocidas. Francisco (ítem 60) se pregunta si la cantidad 20 es entre las tres personas. Alejandro (ítem 61) le responde afirmativamente. Tras la

63. Alejandro: … ¡repartido!, ¡repartido! Dividido porque si es repartido habrá que dividirlo, diría yo.
64. Francisco: (Borra lo introducido) (inaudible) (introduce [18000/20; mensaje de error]).

respuesta, Francisco pretende restar 18000 menos una cantidad que no introduce. Sin embargo, Alejandro (ítem 63) insiste en dividir 18000 entre 20. El sistema responde con un mensaje de error en el que se indica que la relación ya se ha usado previamente. Es la tercera vez que los alumnos introducen esta relación (ítems 19 y 37).

65. Alejandro: No, no.
66. Francisco: No
67. Alejandro: (inaudible)
68. Francisco: (inaudible)
69. Alejandro: (señalando) Este dividido entre este que salía 900.
70. (Alejandro introduce [18000·…; …])
71. Francisco: No
72. Alejandro: Tú qué sabes (introduce [18000·20; mensaje de error])
73. Francisco: Y tú tampoco.
74. (Silencio de diecisiete segundos)
75. (El investigador invita a abandonar el problema sin resolverlo correctamente en su totalidad)

Por último, Alejandro (ítem 72) propone multiplicar 18000 por 20. Francisco (ítem 71) muestra su disconformidad y el sistema responde con un mensaje de error.

Posiblemente, Alejandro se limita a hacer nuevas combinaciones con las cantidades que formaban parte de una relación ya usada.

Tras la finalización del tiempo establecido por el investigador para resolver correctamente el problema se invita a los alumnos a abandonarlo sin resolverlo en su totalidad (ítem 75).

5.4.6.5. El caso de la pareja Alejandro-Francisco en el problema "El Granjero"

Un granjero se dedica a la venta de los huevos que ponen sus gallinas. En la granja tiene 12 corrales grandes y 28 corrales pequeños. Cada corral grande produce 140 huevos diarios y cada corral pequeño, 45. Si el granjero comercializa los huevos en cajas donde caben 60 huevos, ¿cuántas cajas necesita diariamente?

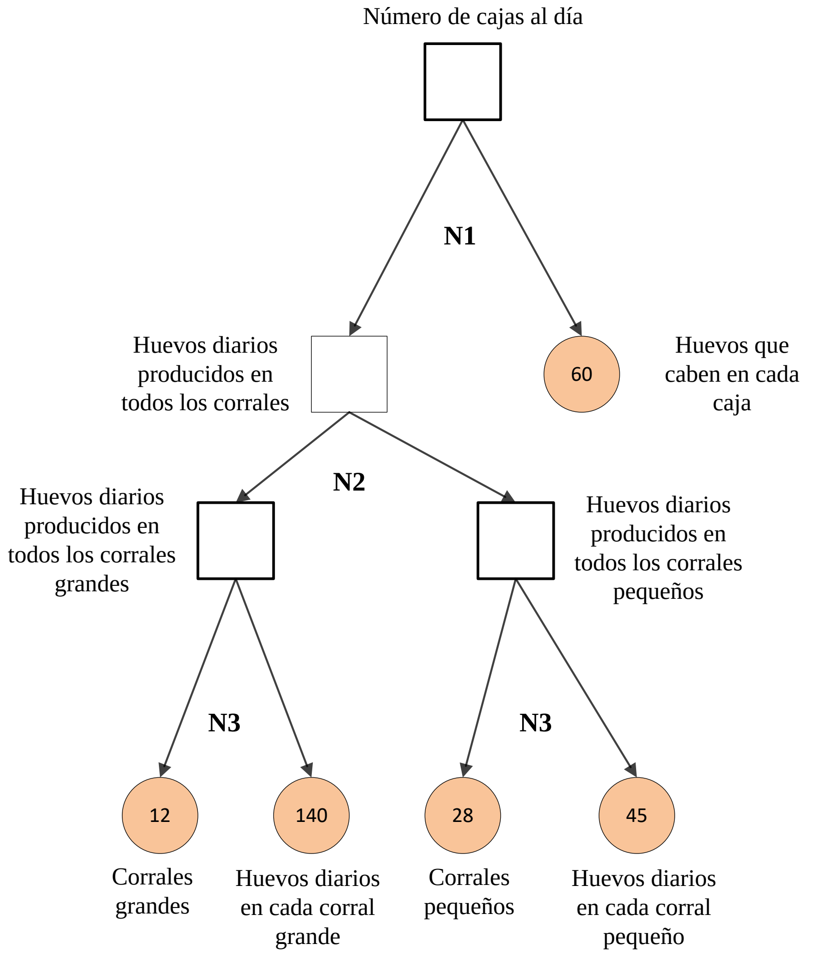


Figura 5.112.

1. (Francisco y Alejandro leen el enunciado del problema.)
2. Alejandro: (inaudible) A ver. Vámonos aquí… mira… sin apretar ni nada (Alejandro mueve el cursor por los botones de la tabla de cantidades y lee) “número de corrales grandes” …
3. Francisco: …lo sé (introduce [28+…; …]) …
4. Alejandro: …no levantes la mano. Dime lo sé, lo sé. (inaudible) (Francisco introduce [28+12; mensaje de error]).

Tras leer el enunciado, Francisco (ítem 3) propone sumar 28 más 12. El sistema responde con un mensaje de error (ítem 4).

La relación no es válida, aunque la relación de sumar corrales grandes y corrales pequeños pueda parecer válida para averiguar el total de corrales. El problema está en que cada corral aporta un número diferente de huevos y sin tener en cuenta esto el problema no se puede resolver. Hay que tener en cuenta el resto de cantidades conocidas del problema para saber que esta relación no forma parte de este problema, aunque pueda ser válida en otro problema. El problema de la adjetivación de las cantidades es un problema que Alejandro y Francisco ya habían tenido en el post test ya que los dos habían utilizado esta relación.

5. Alejandro: A ver, a ver, a ver, a ver. (Recorre con el cursor los botones de la tabla de cantidades leyendo el mensaje que se despliega de ellos) “número de corrales grandes”, “número de corrales pequeños”, “huevos diarios que producen los corrales grandes” Madre mía (introduce [140…; …]) …
6. Francisco: … (inaudible) (Alejandro introduce [140·12; …]) …
7. Alejandro: (inaudible) (introduce [140·12; Hcg=1680]).

Tras el mensaje de error, Alejandro (ítem 5) recorre con el cursor todos los botones de las cantidades conocidas para leer el nombre asignado a cada una. Al terminar (ítem 6) propone multiplicar 140 por 12. Esto supone materializar la relación *Hcg=Hucg·Ncg* aplicando posiblemente un esquema de isomorfismo de medidas. En este caso, la lectura de los nombres de las cantidades conocidas ha sido suficiente para que Alejandro identificara una relación correcta.

8. Alejandro: Ves (lee la nueva cantidad obtenida) “huevos diarios producidos en los corrales grandes” Ahora los corrales pequeños. (Busca con el cursor el botón que corresponde a los huevos diarios que se producen en los corrales pequeños y lee) (inaudible) “…corral pequeño” (introduce [45·…; …]) …
9. Francisco: …pero esos son diarios, cada día (Alejandro introduce [45·28; Hcp=1260]).

Una vez averiguada la primera relación, Alejandro (ítem 8) identifica correctamente la relación isomorfa ligada a los corrales pequeños y propone multiplicar 45 por 28. Ha identificado correctamente la relación equivalente *Hcp=Hucp·Ncp* correspondiente de nuevo a un isomorfismo de medidas. Francisco (ítem 9), mientras Alejandro introduce la fórmula, parece no estar de acuerdo basando su argumento en que la cantidad que están calculando es diaria, sin tener en cuenta que todas las cantidades del problema son diarias.

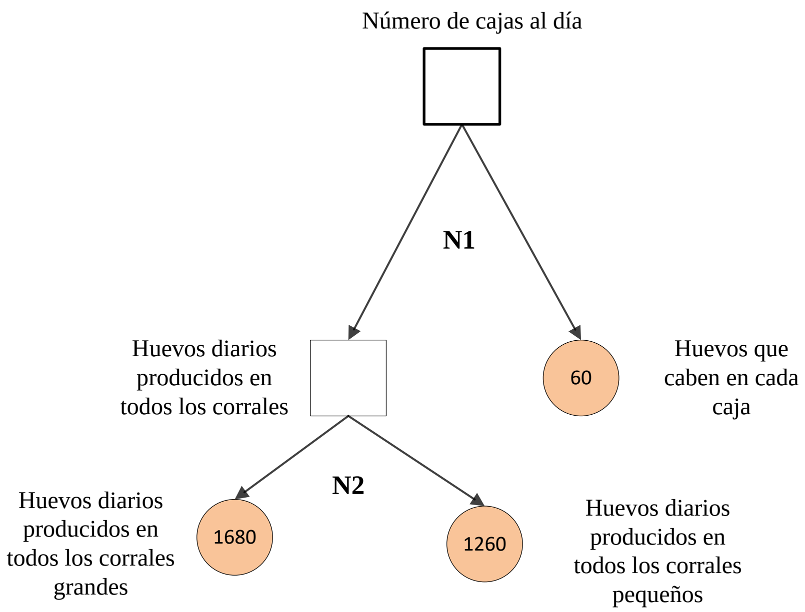


Figura 5.113.

10. Alejandro: …y ahora va…
11. Francisco: …sumados…
12. Alejandro: … (introduce [1680+…; …]) sumado, hay que sumarlo (introduce [1680+1260; H=2940]).

Una vez obtenidos los dos datos, Francisco (ítem 11) y Alejandro (ítem 12) identifican correctamente la relación entre las dos incógnitas auxiliares encontradas y propone sumar 1680 más 1260. De esta manera, materializan correctamente un esquema de combinación a las cantidades *Hcg* y *Hcp* y establecer la relación *H=Hcg+Hcp* propia de la L1 del problema.

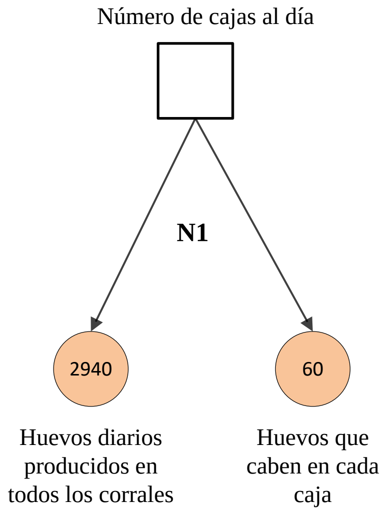


Figura 5.114.

13. Alejandro: Y…
14. Francisco: (introduce [2940…; …]) ¿el 60 ya lo hemos probado?
15. Alejandro: El 60 no
16. Francisco: ¿El 140?
17. Alejandro: Sí
18. (Francisco introduce [2940/60; C=49]).
19. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente).

Por último, Francisco (ítem 18) identifica correctamente la última relación entre cantidades y propone dividir 2940 entre 60. La operación anterior supone materializar la relación *H=C·Hcp* fruto de aplicar un esquema de isomorfismo de medidas de división cuotitiva.
El sistema da como correcta la última relación e indica la finalización del problema (ítem 19). La pareja ha seguido la lectura L1.

5.4.6.6. El caso de la pareja Alejandro-Francisco en el problema "Los Disfraces"

Se disponen de 450 m de tela para hacer 25 disfraces de león que necesitan 6 metros de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer disfraces de elefante. Si para hacer un disfraz de elefante se necesitan 15 m de tela, ¿cuántos disfraces de elefante podrán hacerse?

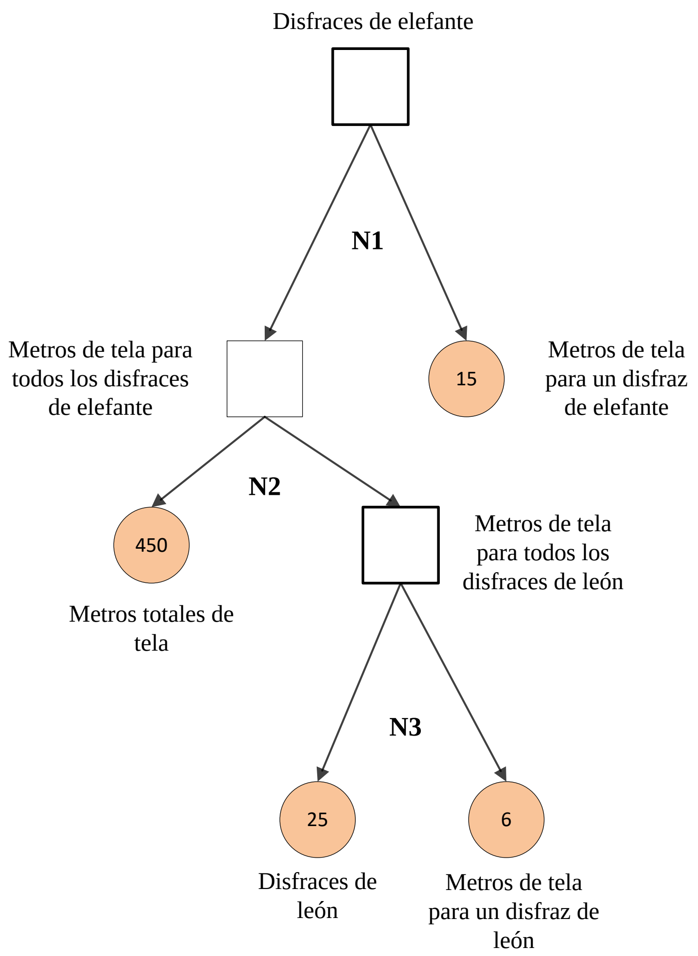


Figura 5.115.

1. (Francisco y Alejandro leen el enunciado del problema.)
2. Alejandro: Vamos a ver. Sin apretar nada ni hacer nada (recorre con el cursor los botones de la tabla de cantidades) “Número de disfraces de león” …
3. Francisco: …25 multiplicado por 15…
4. Alejandro: (lee) “metros…” Si no me habías dejado ni leer (introduce [25·6; Ml=150]).

Tras leer el enunciado Alejandro (ítem 2) repasa el nombre de las cantidades mientras que Francisco (ítem 3) propone multiplicar 25 por 15. Mientras Alejandro introduce 25 por 6 lo que significa identificar correctamente una relación entre las cantidades *L* y *Mul*. Es decir, plantea una operación que supondría considerar la relación correcta *Ml*=*L*·*Mul* (apoyada en un isomorfismo de medidas) para calcular *Ml*. Francisco, por su parte había combinado multiplicativamente las cantidades que representaban los metros de tela necesarios para hacer cada tipo de disfraz. En cualquier caso, la actuación de Alejandro supone poner en marcha una organización de acciones que aprovecha las posibilidades que ofrece la interfaz, ya que, tras leer el enunciado, repasa de manera exhaustiva los nombres de las cantidades conocidas representadas en forma de botón.

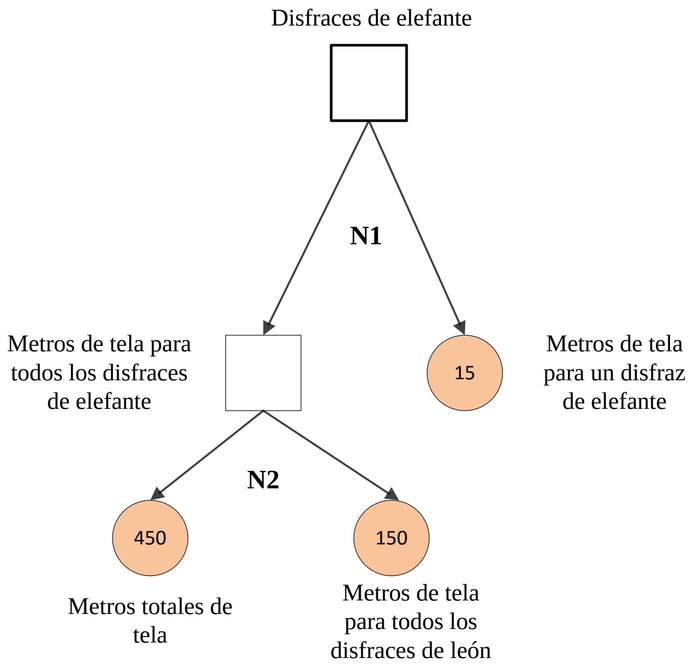


Figura 5.116.

5. Francisco: Va. Después sumado
6. Alejandro: (Lee los nombres de las cantidades que aparecen en los globos desplegables de los botones) "Los metros totales de tela por disfraz de elefante" Si tienes una idea prueba.
7. (Francisco introduce [150·15; mensaje de error]).

Ahora Alejandro (ítem 6) lee la nueva cantidad obtenida en la tabla de cantidades, mientras que Francisco (ítem 7) propone multiplicar 150 por 15. El sistema responde con un mensaje de error.
Parece que Francisco ha repetido la intención del episodio relacionando cantidades de manera multiplicativa, pero sin una base correcta anterior.

8. Alejandro: A ver, déjame (lee de la tabla de cantidades) "totales de tela" (introduce [450·150; …]) …
9. Francisco: … ¿eh? (Alejandro introduce [450·150; mensaje de error]).

Alejandro (ítem 8), tras una relectura de los nombres de las cantidades, propone multiplicar 450 por 150. El sistema responde con un mensaje de error.
Parece ser que Alejandro ha identificado una relación multiplicativa entre las cantidades que realmente están relacionadas de manera aditiva.

10. Francisco: No
11. Alejandro: (inaudible)
12. (Francisco introduce [150-15; mensaje de error]).

Francisco (ítem 12) propone restar 150 menos 15. El sistema responde con un mensaje de error.
Francisco insiste en combinar las dos cantidades que ya usó en el episodio anterior, pero cambia la operación. Es

posible que simplemente esté probando a relacionar las mismas cantidades con operaciones al azar en un episodio de *gaming the system* que reflejaría que ha centrado su certeza en que estas dos cantidades deben combinarse.

13. Alejandro: A ver… (lee los desplegables de los botones de la tabla de cantidades) "…león…", "disfraz de león", "metros de tela disfraz de elefante", "metros totales de tela", "metros para hacer disfraces de león"
14. Alejandro: Esto (inaudible) (introduce [450+…; …]) …
15. Francisco: …vale
16. Alejandro: No (borra lo que había introducido)
17. Francisco: Si
18. Alejandro: (introduce [450+150; mensaje de error])

Alejandro (ítem 13) vuelve a utilizar la estrategia de leer los nombres de las cantidades y propone primero (ítem 14) sumar a 450 otra cantidad que no introduce, pero se lo piensa mejor y lo borra (ítem 16). Pero Francisco (ítem 17) afirma que sí que puede valer y Alejandro (ítem 18) introduce 450 más 150. El sistema proporciona un mensaje de error.
Podemos concluir que Alejandro ha centrado la atención en dos cantidades que considera que deben usarse en la siguiente operación, pero no consigue integrarlas de manera adecuada en un esquema conceptual.

19. Francisco: ¡Ah!
20. Alejandro: Eres muy listo ¿eh? Vale. "metros de tela de disfraces de león"
21. (Silencio de cinco segundos.)
22. Alejandro: Disfraces de león… (introduce [450/…; …]) …
23. Francisco: … ¿dividir?… no, no, no. (Alejandro introduce [450/15; …]) No, no, no (Alejandro introduce [450/15; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Alejandro (ítem 20) repasa el significado de algunas cantidades y propone (ítem 23) dividir 450 entre 15 ante la oposición de Francisco (ítem 23). El sistema responde con un mensaje de error.
Esta última acción de Alejandro pone de manifiesto que en todas las operaciones que ha planteado incluía el valor 15. Como este valor solo se usará en la operación final, se podría concluir que Alejandro deforma los significados de las cantidades de los niveles más profundos para hacerlas alcanzar el nivel superior. Es decir, es posible que Alejandro en todo momento esté centrando la atención en la primera relación del análisis, omitiendo la concatenación de nuevos análisis. En resumen, la relación propuesta asociada a un esquema conceptual de isomorfismo de medida de división cuotitiva sería correcta si la cantidad 450 fuera el total de la tela usada para los disfraces de elefante, pero en este caso es el total de

tela usada para todos los disfraces. Es decir, parece que Alejandro ha tomado el 450 como una parte de la tela mientras que su significado aquí es el total de tela.

24. Alejandro: A ver Tanito, prueba.
25. (Francisco introduce [450/150; mensaje de error]).

Francisco (ítem 25) propone dividir, de nuevo, 450 entre 15. El sistema responde con un mensaje de error.
Francisco no se ha percatado de que esta ha sido la última relación introducida por Alejandro. De hecho, es la primera acción de Alejandro no apoyada en una lectura previa de los nombres de las cantidades.

26. Alejandro: (inaudible)…pistas.
27. Francisco: Pero es que si serían 400 de elefantes y otros más… espera. Para los 15 metros cuántos…
28. Alejandro: …elefantes.
29. Francisco: Si vas a restarlos ya los restos yo. (Alejandro introduce [150·…; …]) (Niega con la cabeza) Eso es para leones (Alejandro introduce [150·25; mensaje de error]).

Alejandro (ítem 29) propone multiplicar 150 por 25. El sistema responde con un mensaje de error.
Las cantidades 150 y 25 forman parte de una relación multiplicativa que ya ha sido usada. La operación que propone supondría una materialización incorrecta de dicha relación, por otro lado, redundante. Antes de la propuesta de Alejandro, Francisco (ítems 27 y 29) parecía proponer una operación que incluiría a las cantidades. Estas cantidades, 450 (aunque verbaliza 400) y 15, sin embargo, no se conectan directamente mediante esta relación..

30. Francisco: ¡Ay! Se me ha olvidado.
31. Alejandro: Piensa, piensa. A ver…
32. Francisco: ¡Ay!
33. Alejandro: A vale bien.
34. Francisco: (introduce [150+15; mensaje de error]).

Francisco (ítem 34) propone sumar 150 más 15. El sistema responde con un mensaje de error.
A pesar de que anteriormente parecía haber propuesto restarlas ahora ha introducido una suma.

35. Francisco: Siempre fallamos.
36. (Alejandro introduce [450+15; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error Alejandro (ítem 36) propone sumar 450 más 15. El sistema responde con un mensaje de error.
Parece que la propuesta de esta relación por parte de Alejandro responde simplemente a combinar dos cantidades para ver si produce el valor de una tercera.

37. Francisco: ¿Qué haces?
38. Alejandro: (inaudible) Haz tú que me he liado.
39. (Silencio de cuarenta y cinco segundos.)
40. Francisco: (introduce [15·6; mensaje de error]).

Tras un prolongado silencio (ítem 39) en el que los alumnos parecen muy perdidos en el problema, Francisco (ítem 40) propone multiplicar 15 por 6. El sistema responde con un mensaje de error.
Francisco ha incluido en la relación de isomorfismo de medidas multiplicativa la cantidad de tela necesaria para hacer un disfraz de león y la cantidad de tela necesaria para hacer un disfraz de elefante.

41. Francisco: Vaya tío.
42. Alejandro: (maneja el cursor) “metros totales” de elefante… (introduce [450…; …]) …
43. Francisco: …pero para ya con lo de elefante (Alejandro introduce [450/15; …])…
44. Alejandro: No. He dicho para lo de elefante (introduce [450/15; mensaje de error]).

Alejandro (ítem 42) propone (ítem 44) dividir 450 entre 15. El sistema responde con un mensaje de error.
De nuevo Alejandro plantea dividir entre 15, aplicando la operación que debería realizar en último lugar y deformando las cantidades de niveles inferiores. Esta relación ya la habían propuesto dos veces anteriormente (ítems 23 y 25).

45. Francisco: ¡Buah!
46. Alejandro: Madre…
47. (Francisco introduce [450-6; mensaje de error]).

Ante la desesperación (ítems 45 y 46), Francisco (ítem 47) propone restar 450 menos 6. El sistema responde con un mensaje de error.
En los últimos episodios, Francisco ha abandonado la dinámica de leer los nombres de las cantidades a las que ya se les ha asignado un valor.

48. Alejandro: A ver. (introduce [450/15; …]) ¿esto ya lo hemos hecho?
49. (Francisco se encoge de hombros.)
50. (Alejandro introduce [450/15; mensaje de error]).

Por cuarta vez Alejandro (ítem 48) propone dividir 450 entre 15. El sistema responde con un mensaje de error.
Alejandro (ítem 48) ha preguntado a Francisco si la relación la habían introducido, pero Francisco (ítem 49) no lo sabía. Esta es la cuarta vez (ítems 23, 25 y 44) que introducen esta relación.

51. (Silencio de seis segundos.)
52. Francisco: (Introduce [25…; …]) ahora con (inaudible) creo. No, no, no. (Introduce [25+15; …]) A lo mejor sí. (introduce [25+15; mensaje de error]).

Tras un silencio, Francisco (ítem 52) propone sumar 25 más 15. El sistema responde con un mensaje de error.
Aunque parece que al introducirlo se ha dado cuenta de que no podía funcionar, Francisco ha introducido en una relación aditiva dos cantidades de distinta

	naturaleza (número de disfraces y metros de tela por disfraz) violando la homogeneidad de magnitudes en una relación aditiva.
53. Francisco: Piensa algo tú también ¿no? 54. (Silencio de once segundos.) 55. Alejandro: A ver. (lee) “150 metros de tela para disfraces de león” y (inaudible) metros de tela cada uno… 56. Francisco: …100 multiplicado por 15. ¡Ay! ya lo he hecho yo. 57. (Alejandro introduce [6…; …]) (Posteriormente lo borra) 58. Francisco: (Introduce [15·6; mensaje de error]).	Alejandro (ítem 55) relee el enunciado mientras Francisco (ítem 56) propone multiplicar 150 (aunque verbaliza 100) por 15. Pero se da cuenta de que esa relación ya la han introducido y desiste de ello. Por otra parte, Alejandro (ítem 57) introduce el 6 en una nueva operación, pero parece que no encuentra otra cantidad para relacionarla y borra lo introducido. Tal vez arrastrado por esto, Francisco (ítem 58) propone multiplicar 15 por 6. El sistema responde con un mensaje de error. Esta relación entre tres cantidades ya la habían propuesto anteriormente (ítem 40).
59. Francisco: No. (Introduce [15/6; mensaje de error]). 60. (El investigador invita a abandonar el problema sin resolverlo correctamente en su totalidad).	Por último y tras el mensaje de error, Francisco (ítem 59) propone dividir 15 entre 6. El sistema responde con un mensaje de error. Parece que esta relación propuesta es más fruto de la desesperación que de un razonamiento. Tras la finalización del tiempo establecido por el investigador para resolver correctamente el problema se invita a los alumnos a abandonarlo sin resolverlo en su totalidad (ítem 60).

5.4.6.7. El caso de la pareja Alejandro-Francisco en el problema “El Pienso”

Un granjero gasta diariamente 15 kilos de pienso para gallinas y 120 kilos de pienso para vacas. El kilo de pienso para gallinas cuesta 2 € y el de pienso para vacas, 5 €. Si en un año solo puede gastar 250.000 euros. ¿Cuánto dinero le sobra?

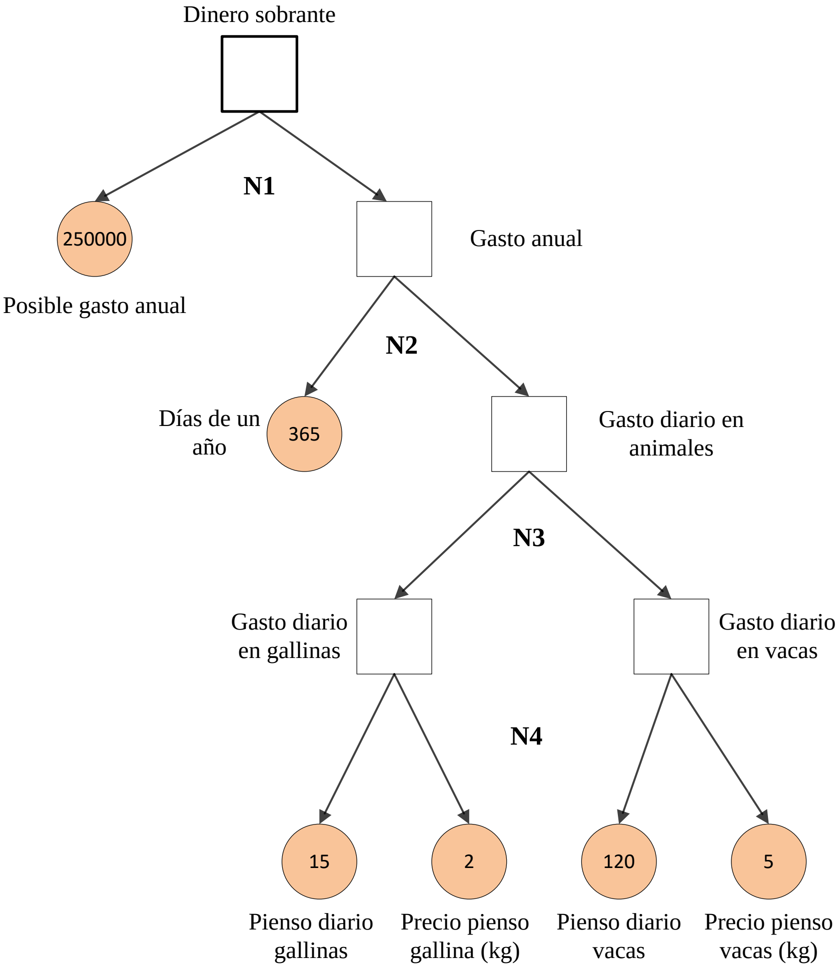


Figura 5.117.

1. (Alejandro y Francisco leen el enunciado del problema.)
2. Alejandro: A ver.
3. Francisco: 2 euros más 5 euros, multiplicado (introduce [2·…; …]) ...
4. Alejandro: …no…
5. Francisco: …que sí jolín… (introduce [2·5; …]) …
6. Alejandro: …o sí…
7. Francisco: …que sí que es.
8. Alejandro: Lo has puesto al revés… (Francisco introduce [2·5; mensaje de error]).

Tras la lectura del problema, Francisco (ítem 3), propone inicialmente sumar 2 más 5, pero inmediatamente modifica su planteamiento a una multiplicación de dos cantidades de igual magnitud (*Pug*·*Puv*). El sistema responde con un mensaje de error. Alejandro duda sobre la validez de la respuesta, pero no la descarta de manera rotunda (ítems 4 y 6). Por otro lado, Alejandro (ítem 8) parece indicar a Francisco que ha introducido los operandos en un orden incorrecto. Sin embargo, tanto en la verbalización de Francisco como en el enunciado, los datos se encuentran en ese mismo orden.

9. Alejandro: Multiplicado por 2. El más grande arriba (inaudible) (introduce [5·2; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Alejandro (ítem 9) propone multiplicarlas al revés. El sistema responde con un mensaje de error. Esto (1) constata una dificultad

	para aplicar la conmutatividad de los factores en una multiplicación y (2) pone de manifiesto que Alejandro consideraba que efectivamente existía una relación multiplicativa entre esas cantidades. En cualquier caso, no se ha verbalizado un análisis completo y solo se han realizado síntesis incorrectas con los datos ofrecidos en el enunciado. En este caso, las acciones (multiplicar precios unitarios) no tendrían sentido ni tan siquiera en otro contexto.
10. Francisco: ¡Eh! Es dividido. 5 dividido por 2. (Alejandro introduce [120/15; mensaje de error]).	Ahora Francisco (ítem 10) propone dividir 5 entre 2, por lo que podemos interpretar que se está limitando a combinar, mediante operaciones sin un criterio claro, dos cantidades que tienen la característica de cuantificar una misma magnitud (precio de un kilo). Alejandro (ítem 10) introduce 120 dividido entre 15, lo cual supone cometer un error similar al de Francisco, pero uniendo cantidades que hacen referencia a la magnitud peso. El sistema responde con un mensaje de error.
11. Francisco: No. 12. Alejandro: Bien. (Lee los desplegables de los botones de la tabla de cantidades). "Dinero que se podría gastar al año", "kilos diarios en pienso de gallinas". Si lo sabes dilo. No levantes la mano. 13. Francisco: (introduce [250000-15; mensaje de error]).	Alejandro (ítem 12) repasa los nombres de las cantidades leyendo los globos que emergen cuando sitúa el cursor sobre los botones de las cantidades conocidas. Esto podemos interpretarlo como un intento de integrar esas cantidades en el contexto del problema. Francisco (ítem 13), sin prestar atención, introduce 250000 menos 15. El sistema responde con un mensaje de error. En este intento, Francisco ha propuesto, posiblemente aplicando ensayo y error, una relación aditiva entre cantidades de distinta naturaleza (dinero y cantidad de pienso).
14. Francisco: No, no, no da igual 15. Alejandro: (Inaudible)…borra. (Lee de nuevo los desplegables) "kilos de pienso para gallinas", "kilos diarios	Alejandro (ítem 15) continúa verbalizando los nombres de las cantidades conocidas, Francisco (ítem 16) propone sumar 120 a otra cantidad que no verbaliza ni introduce. Alejandro (ítem 17) borra lo que había introducido

de pienso para vacas" pienso para vacas…

16. Francisco: … ¡aquí!, sumado, esto… (introduce [120+…; …]) …
17. Alejandro: …pues no (borra lo introducido).
18. Francisco: (inaudible) Es eso.
19. Alejandro: Pues no (introduce [120·…; …]).
20. Francisco: O igual sí.
21. Alejandro: No (introduce [120·5; Pdv=600]).

Francisco. Este (ítem 18) parece realizar una propuesta que Alejandro (ítem 19) rechaza de manera rotunda. Alejandro (ítem 21) multiplica 120 por 5 y el sistema acepta la propuesta. En definitiva, han utilizado la relación *Pdv=Kv·Puv* apoyada en un isomorfismo de medidas que les permite averiguar "el dinero gastado en pienso para vacas en un día *(Pdv)*".

Es posible que Alejandro haya sido capaz de articular las relaciones entre cantidades una vez ha leído los nombres de las mismas.

22. Alejandro: Toma. Vete para tú casa.
23. Francisco: Vete tú.
24. Alejandro: Gallinas… ¿gallinas? Qué fácil, por 2.
25. Francisco: No (Alejandro introduce [15·2; Pdg=30]).

Alejandro (ítem 24) reproduce el mismo esquema, pero con las cantidades correspondientes a las gallinas. Así, multiplica 15 por 2 usando la relación *Pdg=Kg·Pug* para averiguar "el dinero gastado en pienso para gallinas en un día (*Pdg*).

Aunque podemos asumir que la lectura de los nombres asignados automáticamente a las cantidades, ha posibilitado que Alejandro desencadene los dos análisis de nivel N4, no se observa que lo haya integrado en un encadenamiento de análisis.

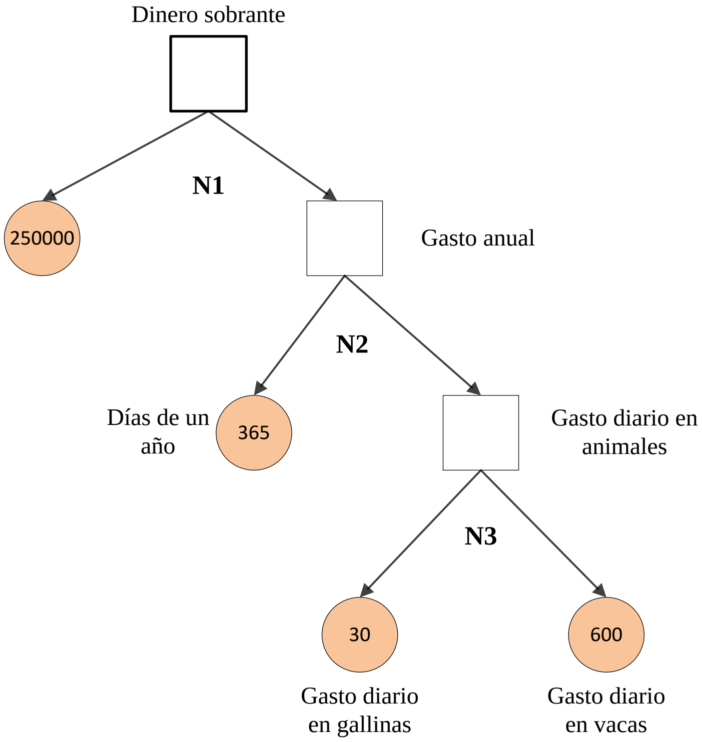


Figura 5.118.

26. Alejandro: Qué no dice. Madre…
27. Francisco: Que has sumado, has sumado.
28. Alejandro: Estás muy equivocado.
29. Francisco: Estás muy equivocado tú. (Introduce [600+30; …]).
30. Alejandro: (Lee la tabla de cantidades) “dinero gastado en pienso para gallinas en un día” Fácil, qué fácil hombre, no lo pongas más difícil de lo que está (Francisco borra lo introducido e introduce [600/…; …]) En pienso para vacas… para gallinas en un día…qué fácil, lo tiene… 250000 (Francisco introduce [600/30; mensaje de error]).

Mientras Francisco (ítem 29) inicia la introducción de la suma 600 más 30 (correcta), Alejandro (ítem 30) sigue repasando los nombres de las cantidades. Francisco, un tanto ajeno, introduce 600 entre 30, a lo que el sistema responde con un mensaje de error.

31. (Alejandro introduce [250000/600; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error, Alejandro (ítem 31) propone dividir 250000 entre 600. El sistema responde con un mensaje de error.

32. Francisco: Mal

Mientras Alejandro (ítem 33) repasa las cantidades conocidas, Francisco propone sumar 600 más 30 (algo que ya había

33. Alejandro: En un día. (Lee la tabla de cantidades) “Dinero gastado en pienso para vacas en un día”, “dinero gastado en pienso para gallinas en un día”
34. Francisco: (Lee la tabla de cantidades) “Dinero gastado en un día” (introduce [600+30; …]) …
35. Alejandro: …ya he probado antes.
36. (Francisco introduce [600+30; Pdc=630]).

iniciado en el ítem 29). De esta manera, halla el gasto diario total.

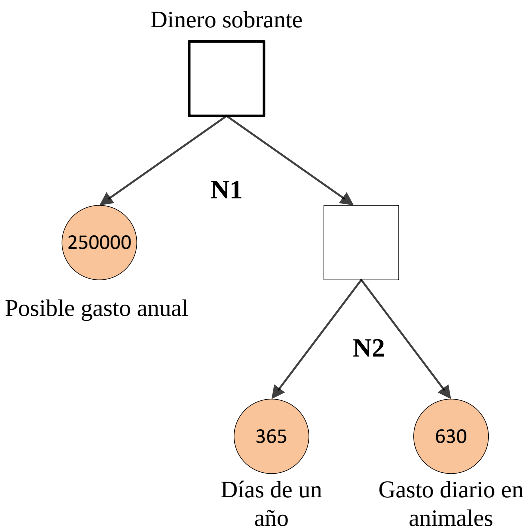


Figura 5.119.

37. Alejandro: (Lee la nueva cantidad en la tabla de cantidades) “Dinero gastado en un día en comida para los animales”
38. Francisco: Multiplicado 25000 con 630…
39. Alejandro: (introduce [250000·…; …]) …o no…
40. Francisco: …qué sí. Confía en (inaudible) (Alejandro introduce [250000·630; mensaje de error]).

Alejandro (ítem 37) lee el nombre de la cantidad recién calculada en la tabla de cantidades y Francisco (ítem 38) propone multiplicar 250000 (aunque verbaliza 25000) por 630. Alejandro accede a la petición y el sistema responde con un mensaje de error.

41. Alejandro: Toma.
42. Francisco: ¿Y cómo será? ¿cómo será? Dividir ¿no?
43. Alejandro: (Lee de la tabla de cantidades) “Dinero gastado en un día

Es ahora cuando Francisco (ítem 42) se pregunta si será dividirlas. Alejandro (ítem 43) relee algunas cantidades y Francisco (ítem 44) propone dividir 250000 entre 630. El sistema responde con un mensaje de error.

para la comida de los animales” para la comida…para la comida…

44. Francisco: ¡Ah! Dividido. (introduce [250000/…; …]) …
45. Alejandro: … ¡ah! Qué listo el chico este (Francisco introduce [250000/630; mensaje de error]).

Aunque la operación sería correcta, el resultado sería un decimal. Los alumnos habían sido informados previamente de que las soluciones no enteras no serían admitidas.

46. Francisco: Venga.
47. Alejandro: A ver. (Lee de los botones de la tabla de cantidades) “Dinero gastado en la comida para los animales” Esto es nuevo (señalando el botón de la cantidad 365). Esto no lo había probado yo. (Lee el desplegable) “Días en un año”, “(inaudible) en un año” (introduce [250000/…; …]) …
48. Francisco: …a lo mejor está mal (Alejandro introduce [250000/365; mensaje de error]).

De nuevo Alejandro (ítem 47) realiza una relectura de los nombres de las cantidades y descubre una cantidad nueva en la que no se habían fijado (los días de un año *Da*=365) y propone dividir 250000 entre 365. El sistema responde con un mensaje de error.
Parece ser que Alejandro intenta ahora averiguar cuánto de ese dinero se podría destinar a cada día del año. Esta división partitiva podría ser válida en una lectura del problema para averiguar cuánto dinero podríamos gastarnos cada día del año. Sin embargo, la división no es exacta y a los estudiantes se les avisó que todas las operaciones deberían dar resultados enteros.

49. Alejandro: No. Está mal, muy mal. Me ha salido mal.
50. (Francisco introduce [250000-630; …]).
51. Alejandro: Pues no.
52. Francisco: Pues sí.
53. Alejandro: Un poco más para arriba.
54. (Francisco introduce [250000-630; mensaje de error]).

Tras el mensaje de error Francisco (ítem 50) propone restar 250000 y 630. El sistema responde con un mensaje de error. Posiblemente, Francisco considera, con razón, que estas cantidades están relacionadas e insiste en combinarlas mediante otras operaciones.

55. Alejandro: Pues no, ves. (Francisco pulsa el botón de ayuda y el sistema le responde que no puede darle ayudas) No puede darte ninguna.
56. Francisco: Ni a ti tampoco.
57. Alejandro: (lleva el cursor) en comida para los animales…
58. Francisco: …para los cerdos…

Posiblemente descentrados por las respuestas del sistema, Francisco (ítem 55) pide ayuda, pero el programa, de acuerdo a la configuración recibida, responde que no puede dársela. Francisco (ítem 63) propone restar 600 menos 630. El sistema responde con un mensaje de error. La relación que proponen ya ha sido utilizada previamente de manera correcta.

59. Alejandro: …no hay cerdos en una granja… 60. Francisco: …sí... 61. Alejandro: …sí que hay, pero pocos. 62. (Francisco introduce [600…; …]) … 63. Alejandro: …600… (Francisco introduce [600-630; mensaje de error]).	
64. Alejandro: Te da 30, hombre, te da 30. 65. Francisco: ¿Dónde estás? ¡Ah! Estaba antes ahí. ¡Ah! Sumado, sumado (inaudible) (introduce [600+…; …]) … 66. Alejandro: … (inaudible) (Francisco introduce [600+630; mensaje de error]).	Francisco (ítem 66) propone ahora sumar las dos cantidades, es decir, propone sumar 600 más 630. El sistema responde con un mensaje de error. Nuevamente, pretende materializar una relación que ya ha sido empleada.
67. (Silencio de diecinueve segundos.) 68. Francisco: (Francisco introduce [600/630: mensaje de error]).	Tras un largo silencio, Francisco (ítem 68) propone dividir 600 entre 630. El sistema responde con un mensaje de error. Francisco está empeñado en colocar estas dos cantidades en su próxima relación y parece que ha estado utilizando una estrategia del *gaming the system* sin darse cuenta de que esas cantidades forman una relación ya empleada.
69. Alejandro: No, no. Piensa, piensa. 70. Francisco: Si tú lo has hecho ¿por qué no te lo sabes? 71. Alejandro: Pero es que no me acuerdo. 72. Francisco: ¡Ay! Pues hazlo. 73. Alejandro: (inaudible) 74. (Silencio de dieciséis segundos.) 75. Francisco: Espera. ¿Puedo hacer 60 más 30? 76. Alejandro: ¿Otra vez? 77. Francisco: Yo que sé. 78. Francisco: ¡Ah! Esperemos que funcione (introduce [600·630; mensaje de error]).	En esa estrategia del *gaming the system*, Francisco (ítem 78) propone la última relación entre esas tres cantidades y multiplica 600 por 630. El sistema responde con un mensaje de error. Parece que estaba claro que Francisco quería agotar todas las posibilidades de relación entre las cantidades 600 y 630 y no ha tenido más remedio que probarlas todas para darse cuenta que estas cantidades no se relacionan en ningún nivel a parte de la relación correcta ya establecida en el N3 del proceso de análisis donde averiguaron el gasto diario en animales (630).

79. Alejandro: Tengo una corazonada (introduce [250000/630; mensaje de error]).	Alejandro (ítem 79) propone dividir 250000 entre 630 y el sistema responde con un mensaje de error. Alejandro parece que sigue pensando en averiguar los días que se podría alimentar a los animales con ese dinero, pero ya es una relación introducida anteriormente (ítem 45) que no es válida ya que la división no es exacta.
80. Francisco: No 81. Alejandro: Tú que sabrás. 82. (Francisco introduce [250000·30; mensaje de error]).	Tras el mensaje de error, Francisco propone multiplicar 250000 por 30. El sistema responde con un mensaje de error.
83. Alejandro: (Recorre con el cursor los botones de la tabla de cantidades) Las vacas… esto lo dejamos a un lado. 84. Francisco: (Alejandro introduce [250000/…; …]) dividido por 365 85. Alejandro: Eso ya lo hemos probado (introduce [250000/365; …]) 86. Francisco: No 87. Alejandro: Tú que sabrás (introduce [250000/365; mensaje de error]).	Alejandro (ítem 83) vuelve a recorrer los botones de la tabla de cantidades y propone dejar a un lado todo lo que tenga que ver con las vacas. Por otro lado, Alejandro y Francisco (ítem 84) proponen dividir 250000 entre 365. El sistema responde con un mensaje de error.
88. Francisco: Tú que sabrás no. Si no te acuerdas si ya lo hemos hecho. 89. (Francisco introduce [250000+30; …]) (Mientras Alejandro niega con la cabeza) 90. Francisco: ¿Tú qué sabes? 91. Alejandro: No es. Te lo digo yo (Francisco introduce [250000+30; mensaje de error]).	Tras el mensaje de error Francisco (ítem 89) propone sumar 250000 más 30 y el sistema responde con un mensaje de error.
92. (Alejandro introduce [250000-630; mensaje de error].)	Sin mediar palabra Alejandro (ítem 92) introduce 250000 menos 630. El sistema responde con un mensaje de error. Esta relación ya la habían introducido anteriormente (ítem 54).
93. Francisco: Jolín tío. 94. Alejandro: (inaudible)…pues los animales.	En un intento final, Francisco (ítem 95) propone sumar 630 más 30. El sistema responde con un mensaje de error.

95. Francisco: (Introduce [630…; …]) (inaudible) Es que voy a probar a ver si (inaudible) (introduce [630+30; mensaje de error]).

96. (Silencio de once segundos)
97. Francisco: ¿Qué estabas pensando antes?
98. Alejandro: Nada. Estaba en blanco. Como las cartas, en blanco.
99. Francisco: No. No están en blanco, tienen dibujo. Yo estoy en blanco como las nubes.
100. Alejandro: Las nubes no son blancas a veces.
101. Francisco: Sí.
102. Alejandro: No. Cuando empieza a llover no.
103. Francisco: ¡Ah! Negras.
104. (Silencio de cinco segundos.)
105. Alejandro: A ver.
106. Francisco: Vamos a probar a ver si me sale esto (introduce [5·…; …]) … multiplicado…
107. Alejandro: Dame, dame, (borra lo introducido) una corazonada… ya se me ha ido.
108. (El investigador invita a abandonar el problema sin resolverlo correctamente en su totalidad).

Tras la finalización del tiempo establecido por el investigador para resolver correctamente el problema se invita a los alumnos a abandonarlo sin resolverlo en su totalidad (ítem 108).

6. Conclusiones

6.1. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE GRUPO

El estudio de grupo tenía la intención de responder al primer objetivo de la investigación:

> Conocer cómo influye la enseñanza de la resolución aritmética de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente y qué efectos puede tener en la competencia de un estudiante la cantidad de ayuda recibida.

En primer lugar, es necesario señalar que, a causa de las características de la muestra, los resultados y conclusiones obtenidos de este grupo no deben ser generalizados a otras poblaciones y son propios del grupo en el que se ha llevado la experimentación. Por otro lado, aunque uno de los objetivos era poder analizar el potencial que tenía HINTS en la enseñanza de la resolución aritmética de problemas verbales, también es necesario apuntar que, en los resultados obtenidos de la secuencia de enseñanza de cada grupo, pueden haber intervenido otros factores como los problemas seleccionados, las estructuras semánticas planteadas, el ambiente en el que se desarrolló la investigación, el estado de ánimo de los estudiantes en un determinado momento, etc. Es por ello, que no podemos atribuir exclusivamente la responsabilidad de los resultados al uso del tutor, sino que se debe a la acción conjunta de la secuencia de enseñanza, en la cual HINTS desempeña un papel fundamental.

El estudio de grupo pretendía explorar y comparar cómo las diferentes secuencias de enseñanza administradas a los dos grupos de participantes modificaban el nivel de competencia en la resolución aritmética de problemas verbales de los sujetos. La necesidad de construir unos cuestionarios orientados a medir esta competencia antes y después de la instrucción aplicables en un tiempo asumible dentro del aula, imposibilita la inclusión de todas las categorías semánticas aditivas y multiplicativas en los problemas empleados. Labor que sería aún más compleja si tomamos en consideración la manera en que éstas se pueden combinar en el contexto de problemas de varias etapas. Las estructuras semánticas aditivas que se utilizaron en el cuestionario Pre son las de cambio 2, cambio 4 y combinación 1 mientras que las estructuras multiplicativas fueron la de isomorfismo de medidas 1, isomorfismo de medidas 2 e isomorfismo de medida 3. El análisis del nivel de dificultad de las etapas reveló la existencia de diferencias estadísticamente significativas a causa de la categoría semántica tanto en las etapas aditivas como multiplicativas. En concreto, se constató, para el primer tipo de estructura, que las etapas asociadas a estructuras de combinación 1 presentan una tasa de éxito superior a las de cambio, especialmente en la comparación con cambio 2. En lo que refiere a la estructura multiplicativa, las diferencias globales no cristalizaron en diferencias significativas en las comparaciones pareadas, aunque a nivel descriptivo se observó la tasa de éxito más alta y más baja para isomorfismo 1 y 2, respectivamente. Una posible causa del menor éxito de esta estructura ha podido deberse al ser la estructura semántica que menos fue abordada tanto en términos de problemas/estudiante con 30 estudiantes de los 52 que participaron, como en términos absolutos con 39 etapas en total. Nuestros resultados coinciden con los presentados por Ivars y Fernández (2016) y Bell et al. (1984) en el que la estructura de isomorfismo de medidas 1 era la que mayor tasa de éxito tenía entre los estudiantes. Sin embargo, nuestros resultados apuntan una mayor tasa de éxito en la estructura de isomorfismo de medidas 3 sobre la de isomorfismo de medidas 2 a diferencia de lo que apuntan estas investigaciones en las que los resultados eran mejores para la estructura de isomorfismo de medidas 2. Si atendemos a la estructura aditiva, los resultados coinciden con los presentados por Nesher (1982), Riley et al. (1983) y Hershkovitz y Nesher (2003) en el que los problemas de combinación 1 son problemas más fáciles que los de cambio 2 o cambio 4. Estas similitudes podrían dar cuerpo a la hipótesis que habíamos establecido a la hora de ligar cada etapa de un problema con la aplicación de un esquema conceptual propio de situaciones de una etapa.

Con respecto al número de etapas, se puede observar que los estudiantes parecen tener más dificultades conforme el número de etapas es mayor ya que la tasa de éxito va disminuyendo conforme aumenta el número de etapas. Pero esta característica, que podría ser considerada como lógica, nos ofrece la posibilidad de concluir que, no solo el número de etapas es una característica de complejidad de un problema verbal, sino que las estructuras semánticas que se plantean en esas etapas pueden influir, incluso más, en la complejidad del problema e influir en la dificultad que tienen los estudiantes cuando resuelven aritméticamente problemas verbales. Esto lo observamos en la baja tasa de éxito que han tenido los problemas de cinco etapas (37%) respecto, por ejemplo, a problemas de seis etapas, donde la tasa de éxito ha sido de 50%. Esto ha podido deberse a que los problemas de cinco etapas han sido fuertemente influidos a la baja por el problema *Los Planos* con una tasa de acierto del 21%.

Centrándonos ya en el análisis de los resultados asociados a la efectividad de las secuencias de enseñanza usadas con el sistema tutorial HINTS, en este punto se recuerda que el diseño experimental consistió en dos secuencias de enseñanza que diferían exclusivamente en la versión que los estudiantes utilizaron del ITS. Así, uno de los grupos utilizó la versión del ITS con ayudas a demanda (grupo CH) mientras que el otro trabajó con la misma versión del ITS, pero sin la opción de poder solicitar ayudas (grupo SH). Nótese que el único aspecto que difiere entre las versiones de HINTS empleadas tiene relación con la cantidad de ayuda que potencialmente se facilita al resolutor. En términos de diseño, esta cuestión no es baladí, pues al construir un ITS ha de determinarse, por un lado, las estrategias de tutorización que se creen convenientes y efectivas para lograr el aprendizaje de los estudiantes y en qué medida se van a usar estas estrategias en el tutor. De esta manera, la cantidad y el tipo de ayuda presentada puede estar íntimamente relacionada con la efectividad del ITS, pues una baja cantidad y calidad de la ayuda puede provocar en el estudiante la incapacidad de beneficiarse de ella, mientras que demasiada ayuda puede provocar la perdida de interés y concentración del estudiante durante el proceso de resolución del problema (Dabbagh, 2003). Esto último corresponde a un problema común en ITS diseñados para la docencia, especialmente en aquellos que brindan asistencia en el proceso de resolución. En estos casos, el estudiante puede completar la tarea abusando de las estrategias de soporte del sistema, especialmente en entornos donde el usuario puede pedir ayuda sucesivamente hasta que el programa finalmente resuelva el problema en lugar de ellos mismos (Baker, Corbett, Koedinger y Roll, 2005). Este es el caso de nuestro ITS, que es capaz de proporcionar, al alcanzarse el nivel de ayuda tres, la información exacta de la operación que el resolutor debe acometer. A este respecto, diferentes estudios han demostrado que el uso excesivo de ayudas da como resultado poco aprendizaje (Baker, Corbett, Koedinger y Wagner, 2004; Shute, Woltz y Regian, 1989; Walonoski y Heffernan, 2006) mientras que otros autores sostienen que los sistemas que son intensivos en la tutoría del proceso de resolución pueden conducir a mejores resultados (por ejemplo, González-Calero et al., 2015; Koedinger y Aleven, 2007; VanLehn, 2011).

Si atendemos al efecto de la instrucción atendiendo a la estructura de las etapas (aditiva o multiplicativa) podemos concluir que en ambos grupos ha habido mejores tasas de éxito en casi todas las estructuras semánticas (excepto en cambio 2 e isomorfismo 3 en el grupo SH que han disminuido ligeramente la tasa de éxito) si bien se observan mayores incrementos en el grupo CH. En cuanto a la categoría semántica, los resultados son muy similares a los obtenidos para el caso de la estructura, no observándose diferencias estadísticamente significativas entre el grupo SH y CH antes y después de la instrucción.

De manera general, los resultados empíricos señalan una mejora estadísticamente significativa tras la instrucción tanto para el grupo sin ayudas como para el grupo con ayudas. Sin embargo, no existen diferencias significativas en el nivel de mejora al comparar entre grupos, a pesar de que la mejora sea algo mayor en el grupo CH. Por lo tanto, en nuestra investigación no se observa un efecto de pérdida de interés por la intensidad de la ayuda recibida. Una posible explicación sería que los estudiantes evitaran solicitar ayudas en exceso al sistema. De hecho, esta autolimitación se describe detalladamente en la sección siguiente como una de las actuaciones observadas en el estudio de casos. Sin embargo, la versión del ITS en el momento en que se realizó la secuencia de enseñanza no permitía recoger información sobre la cantidad de ayudas que solicitaban los estudiantes en situaciones uno a uno.

6.2. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE CASOS

El estudio de casos tiene la intención de responder al segundo objetivo de este trabajo:

> Identificar cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven aritméticamente problemas verbales en un sistema tutorial inteligente tras haber sido instruidos previamente en la resolución aritmética de problemas verbales mediante dicho sistema.

A continuación, las conclusiones del estudio de casos se presentan como un listado de actuaciones que han realizado los estudiantes. En ocasiones, se necesitará incluir descripciones del estado de la resolución o incluso pequeños trozos de los protocolos escritos con el único fin de hacer comprensible al lector el fenómeno que estamos intentando describir. No obstante, y siempre que sea posible, intentaremos mantener el espíritu de este capítulo y minimizar el espacio que se destina a este aspecto. A pie de página, utilizaremos anotaciones que hacen referencia a la localización de las actuaciones de las diferentes parejas y que pretenden dirigir al lector a la situación donde se produce el fenómeno que se está describiendo en el texto. De esta forma, el lector podrá volver al capítulo 5 para ver con más detalle las diferentes actuaciones de los estudiantes. La manera en que vamos a referenciar estos episodios está tomada de Arnau (2010). En estas referencias se indicará el estudiante que realiza la actuación, la pareja que está llevando a cabo la resolución, el problema que está siendo resuelto y los ítems en los que se está produciendo la actuación que se está describiendo. Si la actuación no está siendo desarrollada por un estudiante concreto, sino que es el resultado de la acción conjunta de los dos miembros de la pareja, el apartado destinado al estudiante no será incluido.
Como ya se indicó anteriormente, la resolución de problemas mediante HINTS produce una modificación del procedimiento de resolución. Desde el punto de vista de la investigación, esto posibilita la emergencia de situaciones que no serían posibles cuando se resuelve, sin ayuda, con lápiz y papel. Es por esto que, el catálogo de actuaciones que ofrecemos a continuación se divide en dos grandes bloques. En el primer bloque se describen fenómenos que podríamos considerar una consecuencia directa de la interacción de un resolutor con HINTS, mientras que, en el segundo, se proporcionan tendencias cognitivas centradas en el puro proceso de resolución. No obstante, una separación clara entre ambos aspectos no siempre es posible.

6.2.1 CATÁLOGO DE ACTUACIONES RELACIONADO CON EL SOPORTE PROPORCIONADO POR HINTS DURANTE LA RESOLUCIÓN

Básicamente, el programa HINTS ofrece tres tipos de soporte: (1) la información ligada al estado de resolución en forma de valores y nombres asociados a las cantidades conocidas y desconocidas ya calculadas; (2) la retroalimentación ofrecida cada vez que se introduce un cálculo en forma de mensajes de error; y (3) los mensajes producidos cuando el resolutor solicita una ayuda.

6.2.1.1 EL USO DE LA INFORMACIÓN LIGADA AL ESTADO DE LA RESOLUCIÓN

Cuando se inicia la resolución de un problema, HINTS nos muestra el enunciado y una colección de botones con los valores de todas las cantidades conocidas, tanto explícitas como implícitas, necesarias para resolver las diferentes líneas de resolución. En esta investigación se decidió no incorporar en los archivos de configuración de los problemas cantidades que pudieran actuar como distractores. De esta manera, se omitieron incluso cantidades explícitas en el enunciado, pero innecesarias, que podrían haber sido usadas en una resolución en lápiz y papel. Por ejemplo, el enunciado del problema *Las Pelotas de tenis* se inicia con la proposición "En un club de tenis tienen dos carros con 105 y 287 pelotas" donde aparece la cantidad a la que podríamos llamar *número de carros*. Esta cantidad no se utiliza durante la resolución y, por lo tanto, no se le asignó un botón en la interfaz de HINTS. En el cuestionario Post, Pau planteó una resolución incorrecta en la que utilizó el valor conocido de la cantidad *número de carros* (2). Sin embargo, en el estudio de casos, Pau[1] dirigió la resolución del problema que se completó de manera exitosa sin cometer un solo error. Parece plausible concluir que la imposibilidad de utilizar esta cantidad puede estar detrás de que Pau plantee una estrategia de resolución correcta.

Al contrario, el hecho de que una cantidad conocida implícita sea mostrada desde un inicio en forma de botón puede provocar que un estudiante, que en lápiz y papel no la habría tenido en cuenta, y por tanto habría fracasado en el intento de resolución, pueda utilizarla cuando resuelve en HINTS. Este sería el caso de la pareja Claudia-Natalia[2] en el problema *El Pienso* en el que proponen de manera correcta que deben calcular el gasto en un año tras señalar el botón asociado a la cantidad *Días que tiene un año* (365). Sin embargo, ninguna de las dos fue capaz de materializar esta relación en el cuestionario Post cuando resolvieron con lápiz y papel. Sin embargo, otras veces, incluso al descubrir el botón de la cantidad, esta no consigue integrarse dentro de una operación correcta en la resolución. Este es el caso de Andrea cuando en el problema *El Pienso*, remarca verbalmente la cantidad 365 y Marina intenta integrar la cantidad 365 en una operación incorrecta.

65. Andrea: (lee) "kilos diarios para gallinas", "precio diario para gallinas", "kilos diarios para vacas", "precio diario para vacas" y "días en un año" (remarca esto último con la voz).
66. Marina: 250000 menos 365…
67. Andrea: (introduce [250000-365; mensaje de error]).

[1] (Pau, Pablo-Pau; *Las pelotas de tenis*; ítems 1-7), (Nerea, César-Nerea; *Las pelotas de tenis*; ítems 1-13)
[2] (Claudia-Natalia; *El Pienso*; ítems 16-25), (Julia; Andreu-Julia; *El Pienso*; ítem 13), (Andrea-Marina; *El Pienso*; ítems 61-71).

6.2.1.2 LA INFLUENCIA DE LA RETROALIMENTACIÓN AUTOMÁTICA

Como ya se indicó en el capítulo 3.3.1, HINTS era capaz de, ante la introducción de una relación incorrecta por parte de los estudiantes, proporcionar un mensaje de error informando de la naturaleza del error cometido para su posible subsanación. Estos mensajes automáticos se clasificaban en dos tipos: (a) mensajes donde se indicaba que la operación introducida no era resultado de ninguna relación correcta, (b) mensajes donde se indicaba que la operación introducida, aunque asociada a una relación correcta, asignaba valor a una cantidad conocida o a una cantidad desconocida ya calculada anteriormente.
La información contenida en el primer tipo de mensajes no incluía sugerencias sobre cómo continuar la resolución. Prácticamente su papel era hacer consciente a los resolutores de que la acción carecía de sentido dentro de cualquiera de las líneas de resolución. La única información con respecto al contenido del problema era el nombre de las cantidades puestas en juego. Las grabaciones y las referencias verbales de los estudiantes nos han revelado que la influencia del contenido de estos mensajes ha sido meramente anecdótica dentro del proceso de aprendizaje. En general, los estudiantes no parece que hayan tenido en cuenta la información proporcionada por el ITS en este tipo de errores. Esto se ha constatado por la ausencia de lecturas en voz alta de los mensajes y por la celeridad con la que cerraban todas estas ventanas en las que el tutor ofrecía información sobre errores de este tipo.

La respuesta inmediata que ofrecía HINTS ha tenido como consecuencia que, en ocasiones, los estudiantes han puesto en práctica secuencias de *gaming* encadenando acciones en las que fijaban un elemento y variaban el resto. En estas secuencias de *gaming*, se ha podido observar patrones que permiten identificar las certezas de los estudiantes en el estado de la resolución (Arnau, González-Calero, Arevalillo-Herráez, 2016). De esta forma, se han identificado actuaciones en las que se fijaban las cantidades que se daba por seguro que debían participar y se probaba su combinación con varias operaciones aritméticas. Episodios de *gaming* de este tipo podemos encontrarlos, por ejemplo, en la pareja Andrea-Marina[3] en el problema *Los Disfraces*. La pareja había conseguido alcanzar el nivel N2 de análisis resolviendo correctamente, aunque no sin dificultad, la operación del nivel N3, encontrándose en la situación que aparece en la Figura 6.1. En este momento, leen la nueva cantidad calculada y empiezan a proponer una serie de relaciones entre dos cantidades que consideran que deben estar. Estas dos cantidades son los *Metros totales de tela* (450) y la última cantidad desconocida calculada que son los *Metros de tela para todos los disfraces de león* (150).

[3] (César-Nerea; *El Mayorista;* ítems 49-67), (César-Nerea; *El Bautizo;* ítems 10-17), (César-Nerea; *El Pienso;* ítems 16-19), (Andrea-Marina; *El Bautizo*; ítems 1-33), (Andrea-Marina; *El Bautizo*; ítems 39-50), (Alejandro-Francisco; *El Pienso*; ítems 37-54).

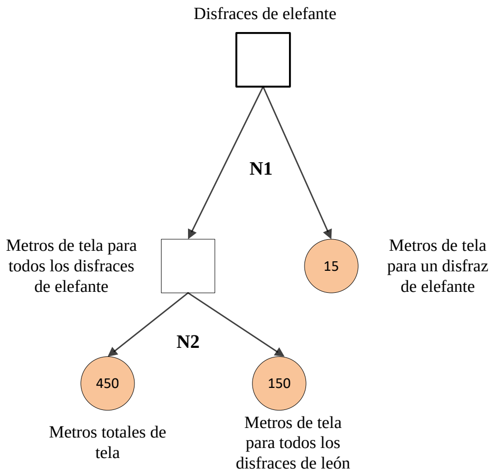


Figura 6.1

33. Marina: (Lee) “metros de tela para disfraces de león” 450 dividido entre…
34. Andrea: …vale, nos sobran 150…
35. Marina: …150… (introduce [450…; …]) 450 dividido entre 150 (introduce [450/150; …]), o multiplicado por 150… (introduce [450/150; mensaje de error]).
36. Andrea: (inaudible)…
37. Marina: … o restar también. A ver…450… metros de tela… (Andrea introduce [450+150: mensaje de error]).
38. Marina: Claro, si hay eso, restar 450 (introduce [450…;…]) menos 150 (introduce [450-150;…]). ¿No son metros? Pues habrá que probarlo… (introduce [450-150; Me=300]).

Como se puede apreciar en la conversación, parece que Marina tiene claro que las dos cantidades de la próxima relación deben ser las que están poniendo en juego y lo que no tiene muy claro es mediante qué operación aritmética relacionarlas.

En otros casos, se observaba que cuando los estudiantes no recibían la confirmación esperada, sustituían la operación por otra que produjera un mismo efecto sobre el tamaño esperado del valor de la cantidad resultante. Así, por ejemplo, usaban las parejas de operaciones división y resta cuando tenían la idea de que la cantidad resultante debía ser más pequeña que uno de los operandos que se situaba en posición dividendo o minuendo. Episodios de *gaming* de este tipo podemos encontrarlos, por ejemplo, en la pareja Claudia-Natalia[4] en el problema *La Empresa*. La pareja había conseguido plantear correctamente y sin ninguna dificultad, las operaciones del nivel N3 y N2. La situación en la que se encontraban en este momento era la que aparece en la Figura 6.2. En esta situación, la pareja parece no saber cómo continuar y solicita una ayuda al sistema. El sistema les proporciona una ayuda de nivel 1 indicando que pueden calcular la cantidad *Dinero que le corresponde a Rodrigo* a lo que Natalia propone dividir *Dinero por cada parte* (900) entre las *Partes que le corresponden a Rodrigo* (5). Ante el mensaje de error del sistema, Claudia propone una resta entre las mismas dos cantidades.

[4] (Claudia-Natalia; *El Bautizo*; ítems 1-18), (Claudia-Natalia; *La Empresa*; ítems 10-33).

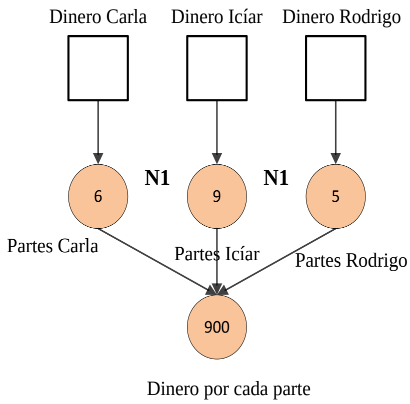


Figura 6.2

16. Claudia: (Sigue leyendo el problema) Ya. Pues… “ha ganado 18000 euros y deciden repartir el dinero de forma que a Carla le toquen 6 partes a Icíar 9 partes y a Rodrigo 5”.
17. Natalia: ¿Pedimos ayuda?
18. Claudia: Vale.
19. (Natalia pide ayuda al sistema)
20. Claudia: (Lee en voz baja la ayuda) “puedes calcular el dinero que le corresponde a Rodrigo”.
21. Claudia: A Rodrigo… 5 partes.
22. Natalia: 900 dividido entre 5 (introduce [900/5; mensaje de error]).
23. Natalia: ¡Uy! ¿no? A ver, espera.
24. Claudia: Es que yo había pensado…
25. Natalia: ¡¡Ahhh!! 900, no, (Claudia introduce [900…; …]) entonces no sería…
26. Claudia: Había pensado yo esto (introduce [900-5…; …]).
27. Natalia: No sé, prueba a ver.
28. (Claudia introduce [900-5; mensaje de error].)

Probablemente, las dos alumnas han centrado su atención en la palabra repartir del enunciado y en su significado típico de división para, posteriormente, con la idea de la resta mantener esta intención, sin percatarse que las dos cantidades son de diferente magnitud.

En el caso de la pareja César-Nerea, cuando estaban resolviendo el problema *El Mayorista*, tras haber calculado el *Coste de los corderos comprados* (2530) y los *Ingresos de los corderos vendidos al restaurante* (2145), entran en una fase de confusión donde plantean algunas relaciones incorrectas. Tras pedir dos niveles de ayuda (Figura 6.3), los estudiantes se centran en las dos cantidades proporcionadas por el sistema desarrollando una secuencia de *gaming*, donde combinan estos valores con las cuatro operaciones aritméticas hasta que han dado con la correcta.

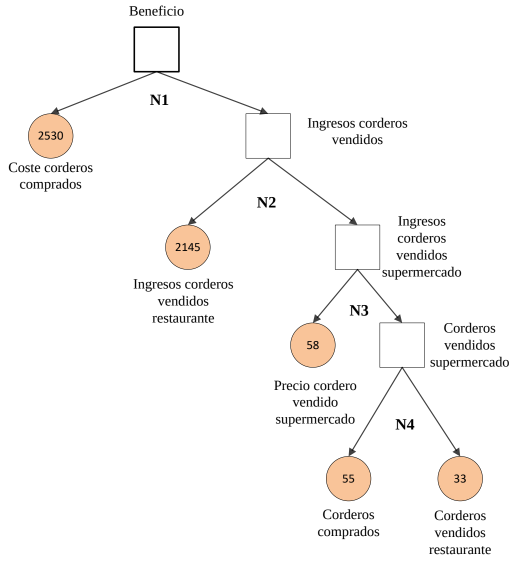


Figura 6.3

49. Nerea: No. ¿Ponemos otra pista?
50. César: Vale.
51. (César pide ayuda al sistema.)
52. César: (Lee parte de la ayuda en voz alta) “Los corderos que se vendieron en el restaurante…”
53. Nerea: Ya lo sé, ya lo sé… yo… eran…
54. César y Nerea: … el 55 (Nerea introduce [55…; …]) …
55. Nerea: … por (introduce [55·…; …]) … ¿33 eran?
56. César: 33 que se vendieron (Nerea introduce [55·33; …]), y lo que te dieran…
57. (Al pulsar aceptar [55·33; mensaje de error].)
58. César: No.

59. Nerea: No. A lo mejor es dividirlo.
60. César: No (introduce [55…; …]) igual es sumarlo. Sumar (introduce [55+…; …]) …
61. Nerea: …sí…
62. César: …las cantidades de cordero…
63. Nerea: Ahí (señala la pantalla el 33).
64. (César introduce [55+33; mensaje de error].)
65. Nerea: No. Pues será dividir (introduce [55/…; …]). A ver si es restar…
66. (Nerea introduce [55/33…; …].)
67. César: Sí, es restar, es restar, es restar… es restar… (Nerea borra [55/33…; …]) los 55 corderos menos los 33 corderos (Nerea introduce [55-…; …]) y te dará los corderos que faltan (Nerea introduce [55-33; Ncs=22]).

Por otra parte, los mensajes de error del segundo tipo sí que proporcionaban una información que podía ayudar en la resolución. Esto es así porque en estos mensajes se indicaba el hecho de que la operación introducida sí que tenía sentido en la situación planteada, pero que era el resultado de aplicar una relación ya utilizada[5]. Los estudiantes, de manera similar a los mensajes de primer tipo, no han perdido el tiempo en revisar su contenido. Una excepción es la pareja Alejandro-Francisco cuando en la resolución del proceso *El Mayorista* y tras haber introducido una operación incorrecta, lee el mensaje de error que le proporciona el ITS.

[5] (César-Nerea; *El Bautizo*; ítems 40-42).

24. Francisco: Mal.
25. Alejandro: (Lee el mensaje de error) “Esta operación ya la habías usado para calcular el precio que paga el mayorista por cada cordero” ¡buahh! ¡Uh! que lío nos hemos hecho.
26. Francisco: A ver… 55 (introduce [55…; …]) multiplicado por (introduce [55·…; …]) …
27. Alejandro: …eso ya lo hemos hecho ¿no?
28. Francisco: … 33 (introduce [55·33; mensaje de error]).

Otro ejemplo de este caso, pero en el que parece que no han leído el mensaje de error, es la pareja Andrea-Marina cuando están resolviendo el problema *La Empresa*. La pareja había conseguido resolver correctamente, y sin ninguna dificultad, las operaciones del nivel N3 y el nivel N2 de la resolución. La situación en la que se encontraban en este momento es la que aparece en la Figura 6.4.

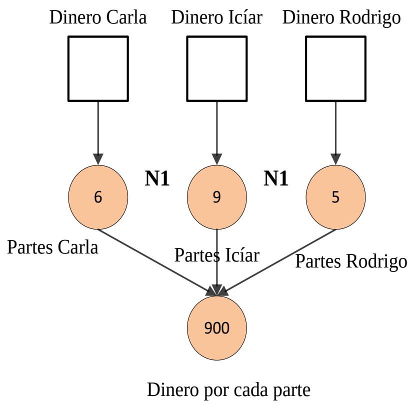


Figura 6.4.

16. Marina: …900 por 20 que hay 20…
17. Andrea: … ¿o entre 20?… (introduce [900·20; mensaje de error]).

[…]

25. (Marina introduce [900·20; mensaje de error])

Primero, Andrea y Marina deciden multiplicar *Dinero por cada parte* (900) por *Total de partes* (20). Con esta relación, obtendríamos la cantidad conocida *Total del dinero* (18 000), por lo que el sistema muestra un mensaje de error donde se hace explícito esto (ítem 17). Sin embargo, las estudiantes no parecen leer el mensaje de error ya que unos ítems más adelante vuelven a proponer la misma operación (ítem 25). Este tipo de actuaciones podría hacer patente que los estudiantes intentan realizar cálculos sin un plan claro de resolución donde combinan cantidades mediante relaciones correctas, pero ya utilizadas y quizá por eso familiares.

6.2.1.3 EL USO DE LA INFORMACIÓN PROPORCIONADA EN LAS AYUDAS A DEMANDA

Para los estudiantes del grupo CH, hemos configurado HINTS para proporcionar tres niveles de ayuda en cada paso del proceso de resolución. Como ya se ha comentado en el capítulo 3, el primer nivel de ayuda únicamente da el nombre de una cantidad desconocida que puede calcularse en el paso siguiente. De las tres parejas que utilizaban la versión de HINTS con ayudas, la pareja con mayor competencia (Andreu-Julia) en la resolución aritmética de problemas verbales no solicitó ninguna ayuda para la resolución de sus tres problemas. La pareja con competencia media, Claudia-Natalia, solicitó una ayuda de nivel 1 en el problema *El Mayorista* y otra en el problema de *La Empresa*. La primera de ellas, no se transformó en una relación correcta y la pareja necesitó de una ayuda de nivel 2 mientras que la del segundo problema necesitó la introducción de alguna relación incorrecta antes de introducir la operación correcta. La pareja más activa en la demanda de ayudas fue la pareja menos competente (César-Nerea). César-Nerea solicitaron siete ayudas de nivel 1 en cinco de sus siete problemas resueltos: *El Mayorista* (2 ayudas), *El Bautizo* (2 ayudas), *La Empresa* (1 ayuda), *El Granjero* (1 ayuda) y *El Pienso* (1 ayuda). De esas siete ayudas de nivel 1, cinco les permitieron introducir con éxito la siguiente operación y pudieron seguir avanzando en la resolución. Por ejemplo, la pareja César-Nerea[6] había alcanzado el estado descrito en la Figura 6.5 durante la resolución del problema *El Bautizo*. Tras un intento fallido, en el que han multiplicado 975 (*Precio del banquete si hubieran asistido ocho personas más*) por 663 (*Precio del banquete con menos personas*), los estudiantes deciden solicitar ayuda al sistema, lo que les conduce de manera inmediata a producir una operación correcta.

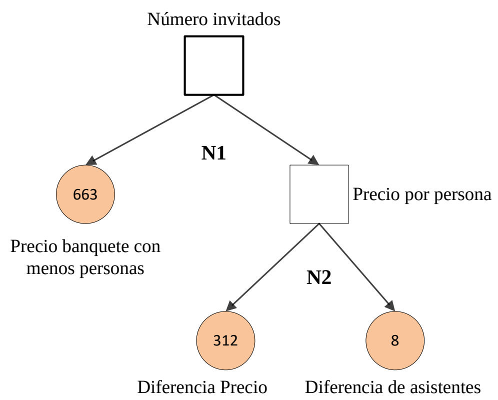


Figura 6.5

31. César: ¿Pedimos una ayuda?
32. Nerea: Sí (asiente con la cabeza).
33. César: (Aprieta el botón de ayuda y la lee) “El precio del menú…”.
34. Nerea: (acaba de leer) “…del menú de una persona”. Vale, pues ya sé. (inaudible.)
35. César: ¿Qué te parece una división entre (introduce [312…; …]) el dinero que hubo entre los dos banquetes (introduce [312/…; …]) dividido por las ocho personas que deberían haber venido? (introduce [312/8; *Pm* = 39])

Esta misma pareja[7], y en la parte final de la resolución del mismo problema, recurren nuevamente a una ayuda de primer nivel cuando se hallan en el estado de resolución de la Figura 6.6 y han realizado dos intentos 39·663 y 312/39 en los que se ponía de manifiesto que percibían la existencia de un isomorfismo de medidas entre las cantidades, pero se producían vacilaciones tanto en la operación (multiplicación y división) como en las cantidades que debían emplearse (siempre incluían *Precio por persona*, pero usaban tanto el *Precio del banquete* como la *diferencia de precios de los banquetes*). Nuevamente, la lectura del nombre asignado a la cantidad que deben calcular (*Personas que asisten al bautizo*) organiza de forma casi inmediata la resolución.

[6] (César; César-Nerea; *El Bautizo*; ítems 31-36), (César-Nerea; *El Bautizo*; ítems 45-48), (César; César-Nerea; *La Empresa*; ítems 21-29), (Nerea; César-Nerea; *El Granjero*; ítems 16-25), (César; César-Nerea; *El Pienso*; ítems 20-22).

[7] (César; César-Nerea; *El Bautizo*; ítems 50-56), (César; César-Nerea; *La Empresa*; ítems 21-29), (Nerea; César-Nerea; *El Granjero*; ítems 16-25), (César; César-Nerea; *El Pienso*; ítems 20-22)

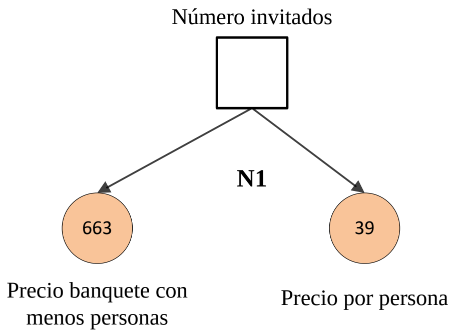


Figura 6.6

45. Nerea: ¿Pedimos una pista?
46. César: Vale.
47. Nerea: (Aprieta el botón de ayuda y la lee) “Personas que asisten al bautizo”. A ver.
48. César: Si por una persona se gastan… si por una persona en el menú se gastan 39 euros…
49. Nerea: ¡Ah! Claro.
50. César: Lo que se gastan en el banquete, o sea con el menú (introduce [663…; …]), dividido (introduce [663/39…; …]) por lo que se gastan con una persona ([663/39; *P* = 17].)
51. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente.)

Podríamos decir que en estas situaciones la ayuda organiza el proceso de análisis al establecer un objetivo concreto centrado en la resolución de un problema de una etapa. Esto es así porque HINTS proporciona el nombre de la cantidad a calcular y el resolutor debe determinarla usando la colección de cantidades conocidas y desconocidas ya calculadas que tiene a su disposición. A diferencia de la resolución de los problemas de una etapa, la presencia de valores que no son necesarios puede crear distracción.
En el segundo nivel de ayuda, HINTS proporciona los nombres de las cantidades que deben utilizar para hallar la cantidad indicada en la ayuda de nivel 1. Podríamos decir que un ayuda de nivel 2 sitúa como poco a los resolutores en una síntesis, pues invita a la construcción de operaciones sin la necesidad de una reflexión sobre lo que se ha de calcular. Esta ayuda solo fue solicitada en dos ocasiones por la pareja César-Natalia y una vez por la pareja Claudia-Natalia, ambas en el problema *El Mayorista*. El éxito de estas tres ayudas se reduce a que, en dos de esas tres ocasiones, los estudiantes consiguieron introducir la relación correcta pero no inmediatamente después de solicitar la ayuda, sino tras introducir alguna operación no correcta. En el caso de la pareja Claudia-Natalia con el problema *El Mayorista*, las estudiantes habían calculado correctamente el *Coste de los corderos comprados* y los *Ingresos de los corderos vendidos* tras realizar varias operaciones en los niveles N4, N3 y N2, faltándoles por abordar el último nivel de resolución del problema como muestra la Figura 6.7.

Ante el bloqueo en el que se encuentran, las alumnas solicitan una ayuda de nivel 1 y el sistema les responde que tienen que hallar el *beneficio* (ítem 73). Posiblemente, ante la dificultad que tienen para interpretar la palabra, deciden solicitar una ayuda de nivel 2 (ítem 74). Tras algún intento fallido, la ayuda les permite resolver el problema.

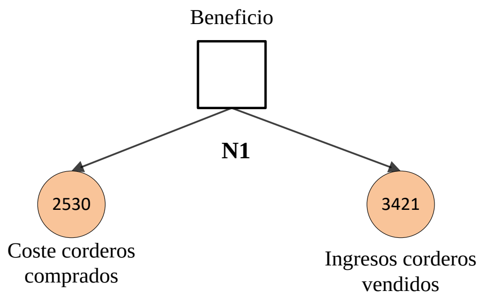


Figura 6.7

71. Natalia: ¿Pedimos una ayuda?
72. Claudia: Mejor que sí (pide ayuda al sistema).
73. Natalia: (Lee la ayuda) “puedes calcular el beneficio”.
74. Claudia:(Vuelve a apretar el botón de ayuda y lee la nueva ayuda) “precio que paga el mayorista por todos los corderos, 2530, y dinero que reciben de la venta de todos los corderos, 3421”.
75. Natalia: Creo que ya sé lo que tenemos que hacer.
76. Claudia: 2530 más 3421. Es 2530…
77. Natalia: ¿No sería restarlo?
78. (Claudia introduce [2530+…; …].)
79. Natalia: …menos, menos…
80. Claudia: …3421.
81. Natalia: Sí.
82. (Claudia introduce [2530+3421; mensaje de error].)

La otra pareja que utiliza las ayudas de nivel 2 en el problema *El Mayorista*, es la pareja César-Nerea. Lo hace en dos ocasiones: (1) la primera es la secuencia ya descrita en la Figura 6.3, en la que la pareja, al leer las dos cantidades, realiza un proceso de *gaming* con las dos cantidades hasta que introduce la relación correcta y; (2) la segunda aparece posteriormente (ítem 80) cuando ante un nuevo bloqueo, César presiona tres veces el botón de ayuda y saltan, sin poder leerlas, de la ayuda de nivel 1 y 2 a una ayuda de nivel 3. Ante esta nueva situación de ayuda de nivel 3 en el proceso de resolución que se muestra en la Figura 6.8, los estudiantes leen la ayuda completa, se informan de las cantidades que tienen que utilizar y de la operación que relaciona esas cantidades y no tienen ninguna dificultad en introducir la relación correcta que deshace el bloqueo y les permite seguir resolviendo el problema. En este caso, la única ayuda de nivel 3 demandada, ha resuelto con éxito el bloqueo de los estudiantes.

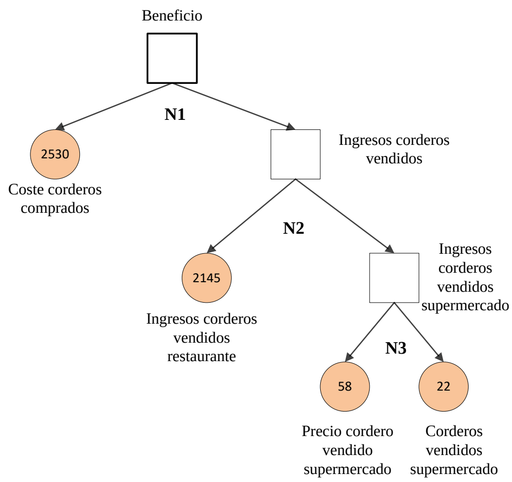


Figura 6.8

18. Nerea: ¿Y si pedimos una pista?
19. César: Una pista, vale (solicita una ayuda al sistema, pero presiona dos veces más el botón de ayuda por lo que el sistema proporciona una ayuda de nivel 3).
20. César: (Empieza a leer la ayuda proporcionada) “para calcular el dinero que ha recibido de los corderos al supermercado tienes que realizar la siguiente operación” (Nerea señala en la pantalla lo que va a leer César ahora) “primero vende cada cordero al supermercado por número de corderos que se venden al supermercado sabiendo el precio al que vende cada cordero al supermercado…”

21. Nerea: Era…
22. César: … 58 (introduce [58…; …]) por 22 (introduce [58·22; *Pcs*=1276]).

6.2.2 CATÁLOGO DE ACTUACIONES RELACIONADAS CON EL PROCESO DE RESOLUCIÓN

En la sección anterior, hemos presentado un catálogo de actuaciones de los estudiantes que son estrictamente consecuencia del soporte que proporcionaba HINTS. En esta sección, vamos a presentar una serie de actuaciones relacionadas con el propio proceso de resolución. Sin embargo, como ya hemos apuntado anteriormente, la separación entre estas dos categorías no es realmente posible, ya que no podemos desligar una de otra, y únicamente lo hacemos con la intención de organizar el catálogo de actuaciones.

6.2.2.1 LA PROFUNDIDAD DE LOS PROCESOS DE ANÁLISIS

Ya hemos comentado en la sección 2.5 que la resolución de problemas verbales multietapa puede ser descrita mediante lo que Puig (1996) llamaría un método de resolución con contenido heurístico, pues el método pretende proporcionar un plan de resolución general para la resolución aritmética. A este método de resolución se le conoce con el nombre de método de análisis y síntesis (Kalmykova, 1975; Puig y Cerdán, 1988).

Kalmykova (1975) apunta que este método es difícil e incomprensible para muchos estudiantes en los niveles de primaria, pues resulta demasiado abstracto y se necesita una gran cadena de conclusiones para su correcta aplicación. Como consecuencia, en nuestra investigación se esperaba encontrar un número escaso de estudiantes que realizaran procesos de análisis-síntesis completos. De hecho, solo hay dos parejas que verbalicen este tipo de razonamientos y, en ambos casos, se producen en una línea de resolución de dos etapas en el problema *Las pelotas de tenis*[8]. Por ejemplo, en el caso de la pareja Alejandro-Francisco, este último verbaliza “Yo creo que habría que sumar 105 más 287 y después dividirlo por 7”. Una razón para esto se hallaría en que la carga cognitiva exigida pare realizar un análisis completo se incrementa a medida que aumenta la profundidad del análisis. Así, los estudiantes que participaron en el estudio de casos describieron, normalmente, secuencias de análisis de un único nivel y solo de manera puntual, se han expresado planes en los que se combinaban un máximo de dos niveles de análisis no completos. Un ejemplo de este último tipo se produce en un episodio donde Julia (Figura 6.9), ayudada por el comentario de Andreu, verbaliza un proceso de síntesis combinando los niveles N3 y N2 en el problema *El Bautizo*[9].

[8] (Pablo-Pau; *Las pelotas de tenis*; ítems 1-5), (Alejandro-Francisco; *Las pelotas de tenis*; ítems 1-5)

[9] (Pau; Pablo-Pau; *El Bautizo*; ítems 5-10), (Andrea; Andrea-Marina; *El Mayorista*; ítem 3), (Marina; Andrea-Marina; *Los Disfraces*; ítems 16-20), (Claudia-Natalia; *El Mayorista*; ítems 14-21), (Julia; Andreu-Julia; *El Bautizo*; ítems 10-19), (César-Nerea; *El Granjero*; ítems 28-37), (César-Nerea; *La Empresa*; ítems 25-29), (Julia; Andreu-Julia; *El Pienso*; ítems 1-5), (Claudia; Claudia-Natalia; *El Mayorista*; ítems 14-21).

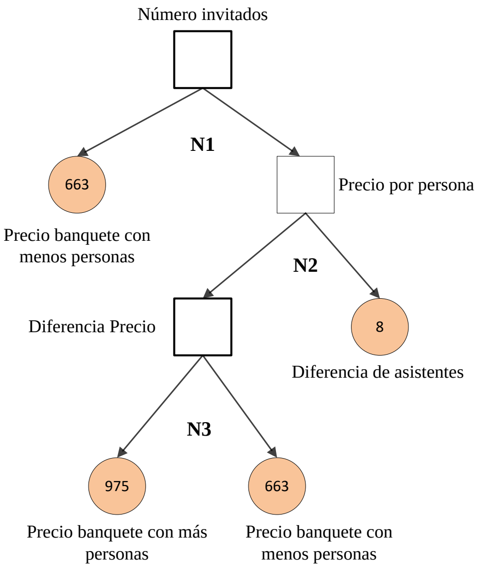


Figura 6.9

11. Julia: 975 euros es lo que ha costado con las 8 personas. Tendremos que saber lo que ha costado una persona.
12. Andreu: Ya.
13. Julia: Entonces… menos 8, pero menos 8 no.
14. (Silencio de seis segundos.)
15. Julia: ¿Y…? Espera… ¿673 más 975… y después eso lo dividimos entre 8?
16. Andreu: ¿Más o menos? … menos.

Se podría plantear que los sujetos participantes en el estudio sí que realizaban análisis completos, pero que no los verbalizaban. Sin embargo, se han observado bloqueos en el último paso de resolución del problema que apoyarían la ausencia no solo de un análisis completo previo, sino también de cualquier análisis correcto que integrara a la incógnita principal del problema. Este hecho puede ser observado, por ejemplo, en la pareja Claudia-Natalia cuando resuelven el problema *El Mayorista*[10] (véase Figura 6.7 y diálogo adjunto). El hecho de no ser capaces de realizar un análisis en el nivel N1, nos lleva a pensar que estos estudiantes organizan la resolución mediante procesos de análisis-síntesis parciales que no tienen muy claro hacia donde conducen.

También se observan actuaciones en las que los estudiantes realizan procedimientos analíticos incorrectos desde una cantidad desconocida que no se hallaba en el nivel más profundo de la línea de resolución. Esto se refleja en los episodios que hemos llamado procesos de colapso-deformación[11] donde los resolutores cercenan una relación y asignan un valor de una de las cantidades conocidas de nivel más profundo a una de las cantidades desconocidas de nivel menos profundo. Así, en el problema *Los Disfraces*, Alejandro lleva a cabo uno de estos procesos partiendo del estado de resolución de la Figura 6.10.

[10] (Andreu-Julia; *El Pienso*; ítems 18-24), (Claudia-Natalia; *El Mayorista,* ítems 38-60), (Claudia-Natalia; *La Empresa;* ítems 10-32), (Andrea-Marina; *La Empresa*; ítems 10-63).

[11] (Andreu-Julia; *El Bautizo;* ítems 4-5), (Andreu-Julia; *El Bautizo;* ítems 6-8), (Andreu-Julia; *La Empresa;* ítems 6-8), (Claudia; Claudia-Natalia; *El Bautizo;* ítems 16-18), (Nerea; César-Nerea; *El Mayorista*; ítem 18), (César-Nerea; *El Mayorista*; ítem 37-42), (César; César-Nerea; *El Bautizo*; ítem 14), (César; César-Nerea; *La Empresa*; ítem 2), (Nerea; César-Nerea; *Los Disfraces*; ítem 4).

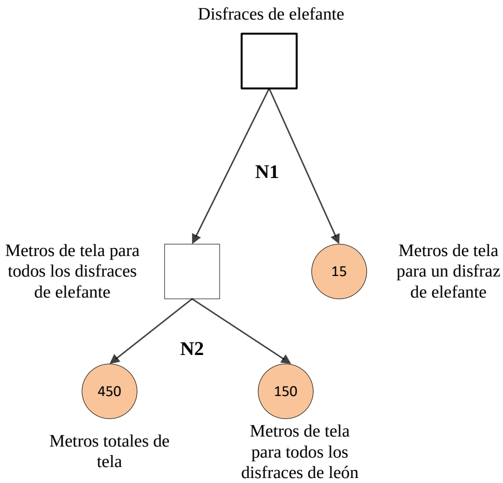


Figura 6.10

20. Francisco: ¡Ah!
21. Alejandro: Eres muy listo ¿eh? Vale. “metros de tela de disfraces de león”
22. (Silencio de cinco segundos.)
23. Alejandro: Disfraces de león… (introduce [450/…; …]) …
24. Francisco: … ¿dividir?… no, no, no. (Alejandro introduce [450/15; …]) No, no, no (Alejandro introduce [450/15; mensaje de error]).

Es posible que, en este episodio, Alejandro en todo momento esté centrando la atención en el primer nivel de análisis, omitiendo la concatenación de nuevos análisis. Esto se pondría de manifiesto en el hecho de que Alejandro había propuesto anteriormente varias operaciones en las que incluía siempre la cantidad *Metros de tela para un disfraz de elefante* (15). En el episodio adjunto a la Figura 6.10, la operación propuesta podríamos asociarla a un esquema conceptual de isomorfismo de medida de división cuotitiva. Este razonamiento sería correcto si la cantidad 450 fuera el total de la tela usada para los disfraces de elefante, pero en este caso es el total de tela usada para todos los disfraces. Es decir, parece que Alejandro ha tomado el 450 como una parte de los metros de tela mientras que su significado es el total de metros de tela.

Los procesos de colapso-deformación podrían ser consecuencia de la carga cognitiva exigida para mantener a nivel mental el entramado de relaciones. Esta dificultad podría tener como consecuencia la simplificación de los nombres de las cantidades como origen de la deformación. De hecho, este proceso se ha observado principalmente cuando se presentaba la combinación de un esquema multiplicativo de menor nivel de profundidad y uno aditivo de mayor nivel de profundidad. Una hipótesis plausible sería que en un esquema aditivo las cantidades que se combinan son del mismo tipo de magnitud y, como consecuencia, comparten similitudes en los nombres. De hecho, una posible confirmación a esta hipótesis la encontraríamos en el caso de Nerea en la pareja César-Nerea en el problema *El Mayorista* (Figura 6.11) donde el fenómeno se produce entre cantidades de distinta especie (a la cantidad *Corderos vendidos en el supermercado* se le da el valor del *Ingreso por los corderos vendidos*) pero ligadas a un mismo agente.

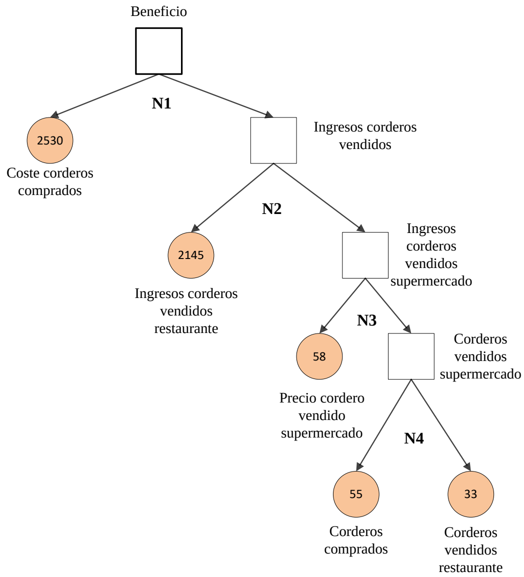


Figura 6.11

18. Nerea: Yo creo que primero esto (señala en la tabla de cantidades el dato 2145) multiplicado entre los 58 (lo señala en el enunciado del problema).

6.2.2.2 LA INTEGRACIÓN EN EL PLAN DE LAS CANTIDADES DESCONOCIDAS RECIÉN DETERMINADAS

En la sección 6.2.1 hemos mostrado ejemplos de cómo la información proporcionada por HINTS influía en las actuaciones de los estudiantes durante la resolución. En este apartado y el siguiente retomamos el análisis de las actuaciones en las que se usa esta información, pero centrando más la atención en episodios que podrían producirse en situaciones de lápiz y papel.

La determinación de cantidades desconocidas que participan como incógnitas auxiliares ha dado lugar a episodios durante la resolución en los que se producían intentos de avance articulados sobre la lectura del nombre de la cantidad desconocida que se acababa de calcular y que el ITS hacía visible. Desde un punto de vista teórico, la viabilidad del procedimiento se podría apoyar en que, efectivamente, en un hipotético proceso de análisis, toda incógnita auxiliar existe con la intención final de determinar la incógnita del problema. Sin embargo, la no existencia de un análisis completo inicial no puede asegurar que se alcance la solución. Se han observado numerosas actuaciones en las que los estudiantes centran su atención en esa última cantidad desconocida calculada. Así en el problema *El Bautizo*, Julia y Andreu, al resolver la operación del nivel N2 y leer el nombre asignado por HINTS a la nueva cantidad obtenida, *Precio del menú de una persona*, desencadenan el último nivel de análisis en el problema lo que les permite llegar a la solución correcta[12]. De la misma manera, en el problema *La Empresa* la lectura del

[12] (Claudia-Natalia; *El Pienso*; ítems 16-25), (Claudia-Natalia; *El Pienso*; ítems 26-30), (Nerea; César-Nerea; *La Empresa*; ítems 30-31), (César-Nerea; *La Empresa*; ítems 32-37), (César; César-Nerea; *El Pienso*; ítems 24-27), (Andreu; Andreu-Julia; *La Empresa*; ítems 18-27), (Andreu-Julia; *El Bautizo*; ítems 23-28), (Andreu-Julia; *La Empresa*; ítems 9-17), (Andreu-Julia; *La Empresa*; ítems 18-27), (Julia; Andreu-Julia; *El Pienso*; ítems 3-5), (Julia; Andreu-Julia; *El Pienso*; ítem 13).

nombre de la nueva cantidad obtenida en el nivel N2 de análisis, permite a Julia y Andreu (Figura 6.12) desencadenar un esquema de isomorfismo en el nivel N1 para resolver el problema correctamente.

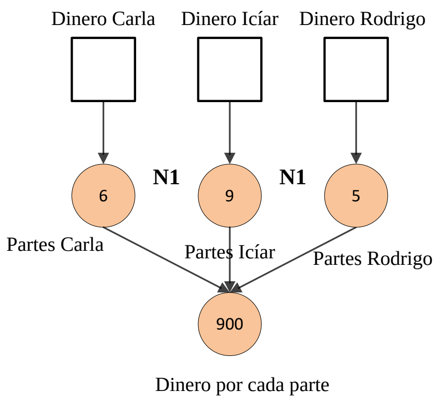


Figura 6.12

18. Julia: Vale, ahora… (lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) “dinero que le toca a una parte” que son 900 euros que esa le ha tocado a…
19. Julia: …900 que es una parte…
20. Andreu: Espera…
21. Julia: … por 9. 900 por 9 ¿no?
22. Andreu: (Lee el mensaje que aparece cuando señala con el cursor el 900) “dinero que le toca a una parte”
23. Julia: 900 (introduce [900…; …]) por 9 (introduce [900·9; *Di*=8100]).

Otro ejemplo de esta situación es la que encontramos con la pareja César-Nerea cuando están resolviendo el problema *El Pienso.* La pareja se encuentra en el último nivel de análisis como se muestra en la Figura 6.13. El estudiante lee el nombre que asigna HINTS a la cantidad que acaba de calcular y vuelve a la semántica del problema con la intención de integrarla. De esta manera parece articular un proceso de análisis apoyado inicialmente en la incógnita del problema (*Dinero sobrante*) y la cantidad desconocida (*Gasto anual*) que acaba de determinar.

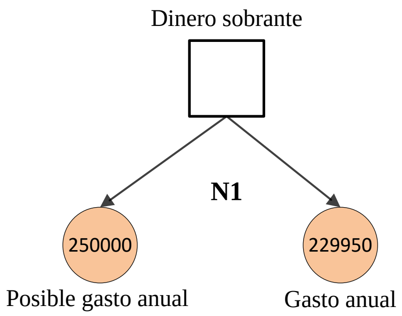


Figura 6.13

24. César: ¡Ah! Ya está. (Lee el 229950 de la tabla de cantidades y la pregunta del enunciado) “Dinero que se gasta en un año en comida para animales” y nos pregunta “¿Cuánto le sobra?”. Una resta entre esto (introduce [250000…; …]) ...
25. César y Nerea: …menos…
26. (César introduce [250000-229950; *Pag*=10950].)
27. (El sistema da como correcta la operación e indica la finalización del problema correctamente)

En otras ocasiones, los estudiantes no son capaces de integrar la última cantidad en una relación lo que les lleva a proponer relaciones incorrectas. Este es el caso de la pareja Andreu-Julia[13] en el problema *El Pienso* donde después de hallar la última cantidad

---

[13] (Andreu-Julia; *El Bautizo*; ítems 20-22), (Andreu-Julia; *La Empresa*; ítems 9-16), (Julia; Andreu-Julia; *El Pienso*; ítem 3), (Natalia; Claudia-Natalia; *El Pienso*; ítems 16-17), (Claudia-Natalia; *El Bautizo*; ítems 23-29), (Claudia; Claudia-Natalia; *El Bautizo*; ítems 30-34), (Natalia; Claudia-Natalia; *La Empresa;* ítem 8), (César; César-Nerea; *El Bautizo*; ítems 30 y 39), (César; César-Nerea; *La Empresa*; ítem 33), (Marina-

conocida *Gasto anual* (229 950), Julia no es capaz de integrarla en la última relación del problema (Figura 6.14).

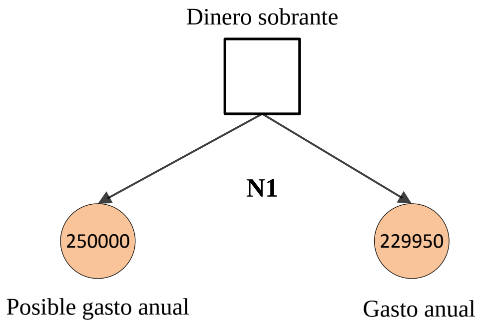


Figura 6.14

18. Julia: (Lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) “dinero gastado en un año”. Ahora sumar eso (señala el dato 229950) más eso (señala el dato 219000). Este (introduce [229950…; …]) más (introduce [229950+…; …]) doscientos… este (introduce [229950+219000; mensaje de error]).

Como conclusión general, los estudiantes no han realizado ni verbalizado procesos de análisis-síntesis completos, limitándose en sus actuaciones a materializar procesos de análisis de un nivel y, en algunas ocasiones, de dos niveles. Por otro lado, se observa que el proceso de resolución está basado en la técnica de intentar integrar en la próxima relación la última cantidad calculada. Posiblemente, las características de HINTS han promovido entre los estudiantes el recurso a esta estrategia de resolución, aunque es posible que sea la que utilicen de manera habitual.

6.2.2.3 LA INTEGRACIÓN EN EL PLAN DE OTRAS CANTIDADES YA PRESENTES

También se observan episodios en los que estudiantes intentan generar secuencias de análisis-síntesis partiendo de los nombres de las cantidades presentes tanto en la tabla de cantidades determinadas como en los globos emergentes de los botones. Así, por ejemplo, la pareja Andrea y Marina se encontraba en el estado de resolución del problema *El Mayorista* que se muestra en la Figura 6.15, cuando se desencadena la verbalización del plan apoyada sobre la lectura de los nombres de las cantidades conocidas o desconocidas ya determinadas que aparecen en los globos emergentes cuando se sitúa el cursor del ratón sobre el botón con el valor de una cantidad presente en el listado de cantidades determinadas. En este episodio, Marina lee los nombres de las cantidades desconocidas calculadas que están presentes en la tabla de cantidades ya determinadas mientras que, de manera independiente pero simultánea, Andrea lee el nombre de una cantidad conocida que aparece en un globo emergente. La combinación de toda esta información conduce a Marina a plantear un plan incorrecto[14]. A pesar de intentar identificarlas volviéndolas a

Andrea; *La Empresa*; ítems 14-17), (Alejandro-Francisco; *El Pienso*; ítems 42-45), (Andreu-Julia; *El Pienso*; ítems 14-15).

[14] (Andreu-Julia; *La Empresa*; ítems 18-23), (Julia; Andreu-Julia; *El Pienso*; ítem 17), (Nerea; César-Nerea; *El Mayorista*; ítem 28), (César; César-Nerea; *El Pienso;* ítems 8 y 24), (Alejandro; Alejandro-Francisco; *El Bautizo*; ítems 52-57), (Alejandro; Alejandro-Francisco; *El Pienso*; ítem 47), (Alejandro; Alejandro-Francisco; *El Pienso*; ítems 11-13), (Alejandro; Alejandro-Francisco; *Los Disfraces*; ítems 5-9), (Claudia-Natalia; *El Mayorista*; ítems 61-70).

leer, Andrea y Marina tienen problemas a la hora de identificar las cantidades que tenían que utilizar, tal vez debido a la cantidad excesiva de datos distintos que tenía el problema.

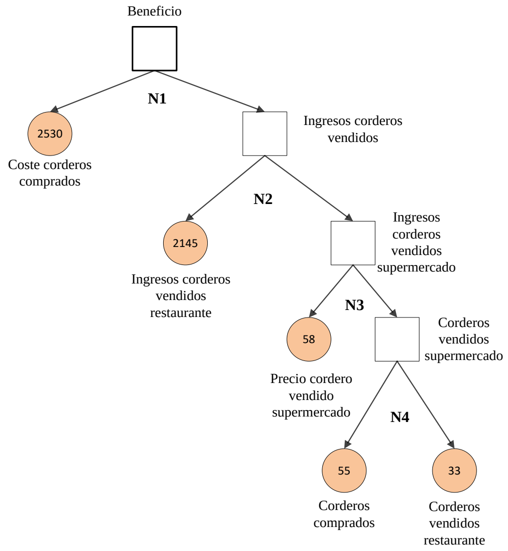


Figura 6.15.

58. (Andrea introduce [2530/…;…]).
59. Marina: Espera (Lee) “Dinero que paga el mayorista por todos los corderos”, “Dinero que recibe de la venta de los corderos…”. Es que es diferente.
60. Andrea: (señala en la pantalla el dato 58 con el desplegable de lo que significa el dato)…esa…
61. Marina: … ¿qué?
62. Andrea: ¿Lo has visto? (vuelve a señalar el dato).
63. Marina: No. (lee) “Precio que vende el cordero al supermercado”. Pues sería…2145 dividido entre… 58. Si no es…

En otras ocasiones, la revisión de los nombres de las cantidades permite valorar el plan que se está considerando. Este es el caso de Claudia-Natalia[15] en el problema *El Mayorista* en el que, tras una operación correcta, Claudia toma como referente inicialmente la pregunta del enunciado y comienza a construir una fórmula. Sin embargo, parece dudar de qué representa el primer valor que introduce, 2530, y lee el nombre asignado por el sistema a la cantidad. Tras esto parece encontrar un error y reelabora el plan leyendo la pregunta del enunciado y el listado de nombres de las cantidades desconocidas ya calculadas (Figura 6.16).

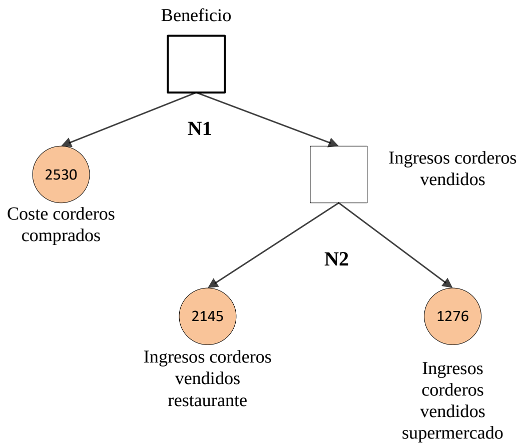


Figura 6.16

25. Claudia: (Lee la pregunta del enunciado) “¿Qué beneficio obtuvo?”. Ahora todo el dinero…
26. Natalia: Sí, lo tenemos que sumar.
27. Claudia: Sí. 1530 (introduce [2530…; …]) que es el dinero...
28. Natalia: Sí.
29. Claudia: …(Lee el globo de texto que se despliega al situar el cursor sobre el botón que representa a la cantidad 2530) “Precio que pagó…”, no mentira.
30. Natalia: No, primero, bueno sí.
31. Claudia: No espera. (Borra lo que había escrito.) (Vuelve a leer la pregunta del problema y un dato de la tabla de cantidades.) El que obtuvo, dinero que recibe, 2145 (introduce [2145…; …]) …

[15] (Claudia; Claudia-Natalia; *El Bautizo*; ítems 1-12), (César; César-Nerea; *El Pienso*; ítem 24), (Alejandro; Alejandro-Francisco; *El Pienso*; ítems 15-21), (Alejandro; Alejandro-Francisco; *Los Disfraces*; ítems 1-4).

32. Natalia: Sí. El dinero que obtuvo él.
33. Claudia: …dinero…
34. Natalia: …mil doscientos…
35. Claudia: …más (introduce [2145+…; …]) …
36. Natalia: Sí.
37. (Claudia introduce [2145+1276; Dv=3421].)

Con respecto al enunciado, se observan casos en los que los estudiantes necesitan en un determinado momento del proceso de resolución, leer de manera completa o parcial el enunciado en lo que aparentemente son intentos de actualizar el plan de resolución, clarificar ideas o de obtener algo de luz para el planteamiento de la próxima relación. Es el caso de Julia que, tras introducir una relación incorrecta, relee el enunciado del problema *La Empresa* lo que le permite desencadenar la relación correcta en el nivel N3 de análisis[16] como se ve en la transcripción del diálogo.

5. Julia: No. (inaudible) A ver. (Lee en el enunciado) “6 partes” … ¿Y si sumamos todas las partes?
6. Andreu: Sí porque así tendremos todas.
7. Julia: 6 (introduce [6…; …]) más (introduce [6+9; Pci=15]).
8. Julia: 6 más 9…eh… (lee el nuevo dato obtenido en la tabla de cantidades) “15 partes a Carla e Icíar”. Ahora nos falta el 5 que sería… No, es que lo hemos hecho mal. ¿No sería 6 más 9 más 5? Pues, 6 (introduce [6…; …]) más (introduce [6+…; …]) 9 (introduce [6+9…; …]) más (introduce [6+9+…; …]) 5 (introduce [6+9+5; P=20]).

Típicamente en problemas donde hay un mayor nivel de profundidad de análisis, los estudiantes necesitan realizar nuevas lecturas de la pregunta del problema durante el proceso de resolución tal vez buscando visualizar el esquema de análisis que falta por aplicar a la resolución[17]

6.2.2.4 LAS DIFICULTADES PARA INTERPRETAR LA INFORMACIÓN OFRECIDA EN LENGUAJE NATURAL

Nesher y Teubal (1975) argumentan que se necesitaban tres procesos distintos para la resolución correcta de un problema verbal: (1) la comprensión lingüística del problema verbal; (2) la comprensión y construcción de la relación entre el texto y las relaciones aritméticas y, (3) la resolución de las operaciones aritméticas propuestas. En esta sección vamos a dirigir nuestra atención a la comprensión lingüística. Palabras como beneficio, ingresos, precio o costes pueden provocar en los estudiantes bloqueos o errores a la hora de construir una relación entre cantidades debido a la imposibilidad de darles un

[16] (Julia; Andreu-Julia; *La Empresa*; ítem 5 y 20), (César-Nerea; *El Mayorista*; ítems 25-35), (Nerea; César-Nerea; *La Empresa*; ítems 33-37), (César; César-Nerea; *Los Disfraces*; ítem 9), (César; César-Nerea; *El Pienso*; ítem 24), (Andrea-Marina; *Los Disfraces*; ítems 27-32)

[17] (Claudia; Claudia-Natalia; *El Mayorista*; ítem 25), (Marina; Andrea-Marina; *El Mayorista*; ítems 68-75)

significado adecuado (Bogolyubov, 1972b). Así, posiblemente, la dificultad para interpretar términos como coste e ingreso, está detrás de la actuación de la pareja César-Nerea, en el problema *El Mayorista* (véase Figura 6.17 y la transcripción del episodio adjunta) donde introducen en una misma relación aditiva los *Ingresos por la venta de los corderos al restaurante*, los *Ingresos obtenidos por la venta de los corderos al supermercado* y el *Coste de los corderos comprados.*

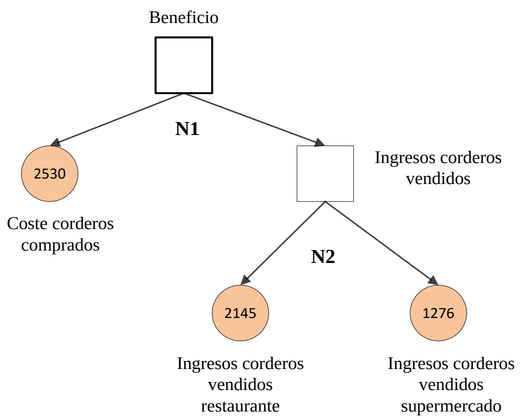


Figura 6.17

23. César: Y ahora ese dinero que recibes, ahora sí, una suma (introduce [2145…; …])…
24. Nerea: Ya veremos…
25. Cesar: (introduce [2145+1276+2530; …]) tiene que ser una suma.
26. (César pulsa aceptar [2145+1276+2530; mensaje de error].)
27. (El investigador invita a abandonar el problema sin resolverlo correctamente en su totalidad).

Esa misma dificultad se ha manifestado habitualmente en el último paso del problema *El Mayorista* cuando los estudiantes debían relacionar costes, ingresos y beneficios[18]. Por ejemplo, a la pareja Claudia-Natalia (véase Figura 6.7 y la transcripción del episodio adjunta) sólo le falta realizar una resta para determinar el beneficio a partir del coste y los ingresos. Sin embargo, Claudia, con la oposición de Natalia, propone introducir una suma. Posiblemente, detrás de estas actuaciones esté la dificultad para evocar el esquema de cambio a partir de la palabra clave beneficio para resolver el problema.

Esta vacilación también se observa en situaciones donde los estudiantes tienen clara la operación que sugiere la palabra clave, pero no consiguen identificar qué cantidades deben ser los operandos. Es el caso de la pareja Andrea-Marina en el problema *El Mayorista*, donde Andrea le recuerda a Marina que para hallar el *Beneficio* tienen que realizar una resta, pero lo que parece que no tienen claro es que esa resta sería ingresos menos costes y no costes menos ingresos[19]

Por otra parte, es probable que muchas veces el error de los estudiantes al relacionar cantidades en una expresión aritmética resida en la coincidencia de la magnitud (dinero) o de los agentes (vacas) sin llegar a distinguir la adjetivación asociada (*Dinero ganado*, *Dinero gastado*, *Gasto diario en vacas*, o *Gasto al año en vacas*). Durante la resolución del problema *El Pienso*, Julia quiere relacionar aditivamente las cantidades *Gasto diario*

[18](Claudia-Natalia; *El Mayorista*; ítems 38-60).
[19] (César-Nerea; *El Pienso*; ítem 6), (Andrea; Andrea-Marina; *El Mayorista*; ítems 97-102).

en vacas y Gasto al año en vacas para averiguar el *Gasto anual*[20]. Esto mismo, le ocurre a la pareja César-Nerea cuando en el problema *El Mayorista*, y tras un bloqueo, solicitan una ayuda de nivel 1. El ITS les indica que tienen que hallar el *Número de corderos que se venden al supermercado*. César verbaliza que esa cantidad es conocida cuando en realidad la cantidad conocida es el *Número de corderos que se venden al restaurante*. Posiblemente la gran cantidad de valores y su paralelismo en cuanto a coincidencias de magnitudes y/o agentes pueda estar detrás de estos errores. Esto mismo le ocurre a Claudia en la pareja Claudia-Natalia cuando resuelven el problema *El Mayorista* en el que se producen ciertas imprecisiones entre el *dinero gastado y ganado* a pesar de que consiguen identificar la relación de manera correcta.

Más allá de la capacidad que tienen las palabras clave para evocar esquemas conceptuales, Nesher y Teubal (1975) describen las dificultades de los estudiantes cuando en los enunciados aparecen palabras clave, a las que se refieren como distractores, que sugieren la operación contraria a la que debe realizarse. En el estudio de casos se han producido varias actuaciones en las que la presencia de distractores dirigía a los estudiantes a una acción errónea[21]. En el caso de la pareja Claudia-Natalia (véase Figura 6.2 y la transcripción del episodio adjunta) en el problema *La Empresa*, Claudia posiblemente ha centrado su atención en la palabra *repartir* que aparece en el enunciado. Tras plantear correctamente las relaciones del nivel N3 y N2, Claudia piensa que como las personas van a repartirse una cantidad de dinero, habrá que finalizar con una división típica de una situación reparto. Esto provoca que Claudia plantee operaciones de división y resta con el único objetivo de obtener una cantidad más pequeña a la que tiene desarrollando un proceso de *gaming*. De manera similar, en este mismo problema, algunas parejas intentan realizar un reparto equitativo del *Dinero total* entre tres, aunque la no presencia del botón ligado a la cantidad *número de personas* hace que descarten la idea inmediatamente[22] como se pone de manifiesto en el siguiente diálogo desarrollado por la pareja César-Nerea tras leer el enunciado del problema *La Empresa*.

2. César: Una multiplicación entre el dinero de todos (introduce [18000…; …]) dividido (introduce [18000/…; …]) por las partes (introduce [18000/6…; …]) de…de… ([18000/6; mensaje de error].)
3. Nerea: No. Yo tengo una idea.
4. César: ¿Qué quieres multiplicarlo?
5. Nerea: Yo creo que (introduce [18000…; …]) 18 dividido entre 3 porque…

[20] (Julia; Andreu-Julia; *El Pienso*; ítems 14-16), (Claudia; Claudia-Natalia; *El Mayorista*; ítems 7-13), (César; César-Nerea; *El Mayorista*; ítems 31-36), (Nerea; César-Nerea; *El Granjero*; ítem 4), (Andrea-Marina; *El Mayorista*; ítems 21-28)
[21] (Claudia-Natalia; *El Bautizo*; ítems 1-15), (Claudia-Natalia; *La Empresa*; ítems 13-15), (Nerea; César-Nerea; *La Empresa*; ítem 5).
[22] (Nerea; César-Nerea; *La Empresa*; ítems 2-9), (Marina; Andrea-Marina; *La Empresa*; ítems 14-17).

En otras ocasiones, se observan lecturas fragmentadas del enunciado o de los nombres de las cantidades como origen de acciones que no permiten avanzar en la resolución. Es el caso de la pareja Andrea-Marina en el problema *El Pienso*.

1. (Andrea y Marina empiezan a leer el enunciado del problema, pero sin acabar de leerlo se ponen a hablar.)
2. Marina: Sí.
3. Andrea: Sumar 120 más 15…
4. Marina: …120 más 15…
5. Andrea: …120… (introduce [120…; …]) …
6. Marina: …más 15… (Andrea introduce [120+15; …]) …
7. Andrea: …15 y nos dará todo el pienso (introduce [120+15; mensaje de error]).

Posiblemente este error se produce como consecuencia de no haber finalizado la lectura del problema. De esta manera se producen integraciones de cantidades conocidas dentro de un esquema conceptual con sentido en la situación, pero que no permite resolver el problema. Si únicamente nos centramos en la primera frase del enunciado "Un granjero gasta diariamente 15 kg de pienso para gallinas y 120 kg de pienso para vacas" como si se tratara de un enunciado incompleto, parece plausible completarlo con la pregunta "¿Cuántos kilos ha gastado?".

6.3. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN Y LÍNEAS FUTURAS

Una limitación de nuestra investigación ha sido la ausencia de determinadas estructuras semánticas aditivas y multiplicativas en los problemas presentados tanto en la secuencia de enseñanza como en el cuestionario Pre y Post. Eso ha sido consecuencia de las inevitables limitaciones de tiempo ligadas a una experimentación en situaciones reales de aula. Por otro lado, aquellas presentadas, no aparecen en la misma proporción, lo que se puede convertir en otra limitación en la presentación de estos resultados.

Tampoco atendimos a la determinación de la complejidad de los nombres asociados a las cantidades en los archivos de configuración de los problemas suministrados a HINTS. La construcción de los nombres solo respondió a que estuvieran bien formados y fueran comprensibles, pero sus características no se tuvieron en cuenta como un posible factor de dificultad a la hora de interpretar los mensajes que producía HINTS.

Por otro lado, durante la secuencia de instrucción no se recogió información sobre la resolución de los problemas en HINTS. La versión actual de HINTS sí que permite la recogida de información de manera minuciosa y en tiempo real de cada una de las acciones que realiza el estudiante durante la resolución de tareas matemáticas. Esto permitirá implementar nuevas metodologías de investigación y proporcionar nuevos puntos de vista de problemas de investigación ya abordados.

Para finalizar conviene señalar que una de las finalidades primeras de los estudios cualitativos es la generación de hipótesis para el desarrollo de nuevas investigaciones. En nuestro caso, hemos obtenido tres conclusiones que podrían producir líneas de investigación futuras. La primera se centraría en el hecho de que los estudiantes participantes en el estudio de casos articulen la resolución de los problemas apoyándose sobre el nombre asignado por HINTS a la última cantidad calculada. La segunda línea de investigación derivaría de la eficacia asociada a las ayudas donde únicamente se proporcionaba el nombre de la siguiente cantidad que debe calcularse, así como de la autorregulación de los estudiantes a la hora de solicitar ayudas. La tercera línea dirigiría la atención al posible uso en la instrucción de utilizar los nombres de las cantidades como un elemento central de la enseñanza de la resolución de problemas verbales.

7. Referencias bibliográficas

Aleven, V., McLaren, B., Roll, I., y Koedinger, K. (2006). Toward meta-cognitive tutoring: A model of help seeking with a cognitive tutor. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 16*, 101–128.

Anderson, J. R., Boyle, C. F., y Reiser, B. J. (1985). Intelligent tutoring systems. *Science, 228*(4698), 456-462. doi: 10.1126/science.228.4698.456.

Arevalillo-Herráez, M. y Arnau, D. (2013). A Hypergraph Based framework for intelligent tutoring of algebraic reasoning. En H. C. Lane, K. Yacef, J. Mostow y P. I. Pavlic (Eds.), *Artificial Intelligence in Education (LNAI 7926)* (pp. 512-521). Berlín, Heidelberg: Springer-Verlag.

Arevalillo-Herráez, M., Arnau, D. y Marco-Giménez, L. (2013). Domain-specific knowledge representation and inference engine for an intelligent tutoring system. *Knowledge-Based Systems, 49*, 97-105.

Arevalillo-Herráez, M., Arnau, D., Marco-Giménez, L., González-Calero, J. A., Moreno-Picot, S., Moreno-Clari, P., Ayesh, A., Santos, O. C., Boticario, J., Saneiro, M., Salmeron-Majadas, S., Cabestrero, R. y Quirós, P. (2014). Providing personalized guidance in arithmetic problema solving. En M. Kravcik, O. C. Santos y J. G. Boticario (Eds.), *Proceedings of the 4th International Workshop on Personalization Approaches in Learning Environments (PALE), held in conjunction with the 22nd International Conference on User Modeling, Adaptation and Personalization (UMAP2014)* Aalborg, Denmark, July 11th, 2014, vol. 1181, pages 42.48. CEUR Workshop Proceedings, ISS 1613-0073.

Arevalillo-Herráez, M., Marco-Giménez, L., Arnau, D. y González-Calero, J. A. (2017). Adding sensor-free intention-based affective support to an Intelligent Tutoring System. *Knowlege-Based Systems, 132,* 85-93.

Arganbright, D. E. (1984). Mathematical Applications of an Electronic Spreadsheet. En V. P. Hansen y M. J. Zweng (Eds.), *Computers in Mathematics Education* (pp. 184-193). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo* (Tesis Doctoral). Universitat de València, Valencia, España.

Arnau, D. (2015). Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales. En C. Fernández, M. Mpolina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 45-59). Alicante: SEIEM.

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y González-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervisión in a intelligent tutoring system for arithmetical problema solving. *Learning Technologies, IEEE Transactions on, 7*(2), 155-164.

Arnau, D., González-Calero, J. A., y Arevalillo-Herráez, M. (2016). Gaming the system: An opportunity to analyse difficulties in arithmetical problema solving. En K. Krainer, N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 2446-2452).* Prage, Czech Republic: Charles University in Prage, Faculty of Education and ERME.

Atkinson, R. K. (2003). *An experimental evaluation of tutorials in problem solving (TiPS): A remedial mathematics tutor* (Final Technical Report. Grant Nunber. N00014-02-1-0191). Arlington, VA: Office of Naval Research.

Baker, R. S., Corbett, A. T., Koedinger, K. y Roll, I. (2005). Detecting when students game the system, across tutor subjects and classroom cohorts. En L. Ardissono, P. Brna y A. Mitrovic (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference on User Modeling* (pp. 220–224). Heidelberg, Germany: Springer.

Baker, R. S., Corbett, A. T., Koedinger, K. R. y Wagner, A. Z. (2004). Off-task behavior in the cognitive tutor classroom: When students "game the system". En E. Dykstra-Erickson y M. Tscheligi (Eds.), *Proceedings of ACM CHI 2004 Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 383–390). Washington, DC: Association for Computing Machinery.

Barnett, J. (1979). The study of syntax variables. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 23-68). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Beal, C. R. (2013). AnimalWatch: An intelligent tutoring system for algebra readiness. En R. Azevedo y V. Aleven (Eds.), *International Handbook of Metacognition and Learning Technologies,* (Vol. 2, pp. 337-348). New York, EEUU: Springer.

Beal, C. R., y Arroyo, I. (2002). The AnimalWatch project: Creating an intelligent computer mathematics tutor. En S. Calvert, A. Jordan y R. Cocking (Eds.), *Children in the digital age* (pp. 183-198). Westport, CT: Praeger.

Beal, C. R., Arroyo, I., Cohen, P., y Woolf, B. (2010). Evaluation of AnimalWatch: an intelligent tutoring system for arithmetic and fractions. *Journal of Interactive Online Learning*, *9*(1), 64–77.

Bell, A., Fischbein, E., y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 129-147.

Bell, A., Greer, B., Grimison, L., y Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(5), 434-449.

Bogolyubov, A. N. (1972a). A combined analytic and synthetic method of solving arithmetic problems in elementary school. En J. Kilpatrick and I. Wirszup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*. *Vol. VI. Instruction in Problem Solving* (pp. 61-94). Stanford, CA: School Mathematics Study Group Stanford University and Survey of Recent East Europe Mathematical Literature.

Bogolyubov, A. N. (1972b). Work with words in the solution of arithmetic problems in elementary school. En J. Kilpatrick and I. Wirszup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. Vol. VI*. *Instruction in Problem Solving* (pp. 31-60). Stanford, CA: School Mathematics Study Group Stanford University and Survey of Recent East Europe Mathematical Literature.

Caldwell, J. H., y Goldin, G. A. (1979). Variables affecting word problem difficulty in elementary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 10,* 323-336.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., y Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(1), 27-39.

Castro, E., y Frías, A. (2013). Two-step arithmetic word problems. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 379-406.

Castro, E., Rico, L., y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10*(3), 243-253.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Servei de Publicacions de la Universitat de València: València.

Chang, K. E., Sung, Y. T., y Lin, S. F. (2006). Computer-assisted learning for mathematical problem solving. *Computers & Education*, *46*(2), 140-151.

Chapman, O. (2006). Classroom Practices for Context of Mathematics Word Problems. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 211-230. https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1

Christou, C., y Philippou, G. (1998). The Developmental Nature of Ability to Solve One-Step Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 436-443.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales en la resolución de problemas* (Tesis doctoral). Universidad de Barcelona, Barcelona, España.

Cohen, J. (1992). Statistical power analysis. *Current directions in psychological science, 1*(3), 98-101.

Cook, B. (1973). *An analysis of arithmetic linguistic and algebraic structural variables that contribute to problem solving difficulty in algebra word problems*. Trabajo presentado en el Annual Meeting of The American Educational Research Association. New Orleans, LA. (ERIC Document Reproduction Service No ED076433).

Corbett, A. T., Koedinger, K. R., y Anderson, J. R. (1997). Intelligent tutoring systems. En M. Helander, T. K. Landauer, y P. Prabhu (Eds.), *Handbook of Human Computer Interaction* (Second Edition, pp. 849-874). Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science.

Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20*(4), 405-438.

Dabbagh, N. (2003). Scaffolding: An important teacher competency in online learning. *TechTrends, 47*(2), 39-44.

De Corte, E., y Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders´ strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 363-381.

Derry, S. J. (2001). *Development and assessment of tutorials in problem solving (TiPS): A remedial mathematics tutor*. (Final report to the Office of Naval Research N00014–93–1-0310), Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin, Madison, Wisc.

Durand, C., y Vergnaud, G. (1976). Structures addictives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie, 36,* 28-43.

Etlinger, L. (1974). The electronic calculator: A new tren in school mathematics. *Educational Technology, 14*(12), 43-45.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17.

Freedam, R., Ali, S. S., y Mc Roy, S. (2000). What is an intelligent tutoring system? *Intelligence, 11*(3), 15-16.

Frías, A., y Castro, E. (2007). Influencia del número de conexiones en la representación simbólica de problemas aritméticos de dos pasos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *2*(1), 29-41.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora*, *17-18*, 51-59.

Fuchs, L. S., y Fuchs, D. (2002). Mathematical problem-solving profiles of students with mathematics disabilities with and without co-morbid reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *35*, 563-573.

Fuchs, L., Seethaler, P. M., Powell, S. R., Fuchs, D., Hamlett, C. L., y Fletcher, J. M. (2008). Effects of preventative tutoring on the mathematical problem solving of third-grade students with math and reading difficulties. *Exceptional Children, invierno, 74*(2), 155-173.

García, A. I., Jiménez, J. E., y Hess, S. (2006). Solving arithmetic word problems: An analysis of classification as a function of difficulty in children with and without arithmetic LD. *Journal of Learning Disabilities, mayo/junio, 39*(3), 270-281.

González-Calero, J. A. (2014). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente* (Tesis Doctoral). Universitat de València, Valencia, España.

González-Calero. J. A., Arnau, D., Puig, L. y Arevalillo-Herráez, M. (2015). Intensive scaffolding in an intelligent tutoring system for the learning of algebraic word problem solving. *British Journal of Educational Technology*, *46*(6), 1189-1200.

Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., y Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *93*, 615-626.

Hershkovitz, S., y Nesher, P. (2003). The role of schemes in solving word problems. *The Mathematics Educator, 7*(2), 1-24.

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias. *Educación matemática, 28*(1), 9-38.

Jerman, M., y Rees, R. (1972). Predicting the relative difficulty of verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 306-323.

Jitendra, A. K., George, M. P., Sood, S., y Price, K. (2010). Schema-based instruction: Facilitating mathematical word problem solving for students with emotional and behavioural disorders. *Preventing School Failure, 54*(3), 145-151.

Kalmykova, Z. I. (1975). Analysis and synthesis as problem solving methods. En J. Kilpatrick, I. Wirszup, E. G. Begle, J. W. Wilson, y M. G. Kantowski (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol. XI, pp. 1–171). Stanford, CA: School Mathematics Study Group Stanford University and Survey of Recent East Europe Mathematical Literature.

Kantowsky, M. G. (1977). Processes involved in mathematical word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(3), 163-180.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. Hatfield (Ed.), *Mathematical problem solving* (pp. 7-20). Columbus, OH: ERIC.

Kinda, S. (2013). Generating scenarios of division as sharing and grouping: A study of Japanese Elementary and University students. *Mathematical Thinking and Learning, 15*(3), 190-200. doi: 10.1080/10986065.2013.794256.

Kodippili, A. y Senaratne, D. (2008). Is Computer-generated Interactive Mathematics Homework more Effective than Traditional Instructor-graded Homework? *British Journal of Educational Technology, 39*(5), 928-932.

Koedinger, K. R. y Aleven, V. (2007). Exploring the assistance dilemma in experiments with cognitive tutors. *Educational Psychology Review, 19*(3), 239–264.

Koedinger, K. R., y Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences, 13*, 129-164.

Kouba, V. L. (1989). Children´s solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(2), 147-158.

Kulm, G. (1979). The Classification of Problem-Solving Research Variables. En G.A. Golding and C.E. McClintock (Eds.) Task Variables in Mathematical Problem Solving (pp. 1-21). Columbus OH: ERIC/SMEAC.

Leigh-Lancaster, D. (2010). The case of technology in senior secondary mathematics: Curriculum and assessment congruence? In C. Glascodine and K.-A. Hoad (Eds.), *ACER Research Conference Proceedings 2010* (pp. 43–46). Camberwell, Australia: Australian Council for Educational Research.

Lepik, M. (1990). Algebraic word problems: Role of linguistic and structural variables. *Educational Studies in Mathematics, 21***,** 83–90.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics concepts and processes* (pp. 229-261). Orlando, Florida: Academic Press.

Looi, C. K., y Tan, B. T. (1996). WORDMATH: A computer-based environment for learning word problema solving. En A. Diaz de Ilarraza Sánchez e I. Fernández de Castro (Eds.), *Computer Aided Learning and Instruction in Science and Engineering* (pp. 78-86). Berlín: Springer.

Marchand, P., y Bednard, N. (1999). L´enseignement de l´algèbre au secondaire: une analyse des problèmes presents aux élèves. *Bulletin AMQ, 39*(4), 30-42.

Marchand, P., y Bednard, N. (2000). Développement de l´algèbre dans un context de resolution de problèmes. *Bulletin AMQ, 15*(4), 15-25.

Marshall, S. P. (1988). *Assessing schema knowledge* (Technical Report. Contract No. N00014-K-85-0661). Arlington, VA: Office of Naval Research.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in Problem Solving*. New York, USA: Cambridge Univ. Press.

Marshall, S. P., Pribe, C. A., y Smith, J. D. (1987). *Schema knowledge structures for representing and understanding arithmetic story problems* (Technical Report. Contract No. N00014-K-85-0061). Arlington, VA: Office of Naval Research.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y división*. Madrid, España: Síntesis.

Mulligan, J. T. (1992). Children´s solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal, 4*(1), 24-41.

Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (1997). Young children´s intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Nathan, M. J. (1990). Empowering the student: prospects for an unintelligent tutoring system. En *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 407-414). New York: ACM.

Nathan, M. J., Kintsch, W., y Young, E. (1992). A theory of algebra-word-problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and Instruction, 9*(2), 329-389.

Nesher, P. (1976). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 7*(4), 369-388.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction. En T. P. Carpenter, J. M. Moser, y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 25-38). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. En J. Hielbert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 19-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nesher, P. (1991). Two-steps problems, research finding. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings Fifteenth PME Conference,* Vol. III. (pp. 65-71). Assissi, Italia.

Nesher, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *Suma*, *31*, 19-26.

Nesher, P., Greeno, J. G., y Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, *13*(4), 373-394.

Nesher, P., y Hershkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(1), 1-23.

Nesher, P., Hershkovitz, S., y Novotna, J. (2003). Situation model, text base and what else? Factors affecting problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 151-176.

Nesher, P., y Katriel, T. (1978). Two cognitive modes in arithmetic word problem solving. *Paper presented at the second annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Osnabruck, West Germany.

Nesher, P., y Teubal, E. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics 6*, 41–51.

Neuman, D. (1999). Early learning and awareness of division: A phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 101-128.

Nohda, N. (2000). Teaching by open approach methods in Japanese mathematics classroom. In. T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Hiroshima, pp. 39–53.

Nunes, T., Desli, D., y Bell, D. (2003). The development of children´s understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research*, *39*(7), 651-675. doi: 10.1016/j.ijer.2004.10.002.

Nwana, H. S. (1990). Intelligent tutoring systems: an overview. *Artificial Intelligent Review, 4*(4), 251-277.

OECD (2014a). PISA 2012 *Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V).* PISA, OECD Publishing.

OECD (2014b). PISA 2012 *Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I)*. PISA, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264201118-en.

Parmar, R. S., Cawley, J. R., y Frazita, R. R. (1996). Word problem-solving by students with and without math disabilities. *Exceptional Children, 62*, 415- 429.

Pedrotty, D., Bryant, B. R., y Hammill, D. D. (2000). Characteristic behaviors of students with LD who have teacher-identified math weaknesses. *Journal of Learning Disabilities, 33*(2), 177-199.

Pehkonen, E. (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. Helsinki: Department of Teacher Education, University of Helsinki.

Perales, F. J. (1993). La resolución de problemas: Una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias, 11*(2), 170-178.

Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Powell, S. R. (2011). Solving word problems using schemas: A review of the literatura. *Learning Disabilities Research and Practice, 26*(2), 94-108.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid, España: Síntesis.

Puig, L., y Cerdán, F. (1990). La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. Conferencia llevada a cabo en la *Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, Acapulco, Guerrero, México.

Reusser, K. (1993). Tutoring systems and pedagogical theory: representational tools for understanding, planning, and reflection in problem solving. En S. P. Lajoie y S. J. Derry (Eds.), *Computers as cognitive tools* (pp. 143–177). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Riley, M. S., Greeno, J. G., y Heller, J. I. (1983). Development of children´s problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Ritchey, T. (1991). Analysis and Synthesis – On scientific method based on a study by Bernhard Riemann. *Systems Research, 8*(4), 21-41. (Reprint (1996) available at: www.swemorph.com/method).

Sangwin, C., Cazes, C., Lee, A., & Wong, K. L. (2010). Micro-level automatic assessment supported by digital technologies. En C. Hoyles and J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology—Rethinking the terrain. The 17th ICMI study* (Vol. 13, New ICMI Study Series, pp. 227–250). New York, NY: Springer.

Sanz, M. T., González-Calero, J. A., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2019). Using reading comprehension to build a predictive model for the fourth-grade grade students´

achievement when solving word problems in a intelligent tutoring system. *Revista de Educación, 384,* 41-69.

Schmidt, S., y Weiser, W. (1995). Semantic structures of one-step word problems involving multiplication or division. *Educational Studies in Mathematics, 28*(1), 55-72.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida: Academic Press.

Schwartz, J. L. (1996). *Semantic aspects of quantity*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Shute, V. J., y Psotka, J. (1994). *Intelligent tutoring systems: past, present, and future* (Interim Technical Paper. Report Number: AL/HR-TP-1994-0005). Texas, VA: Armstrong Laboratory.

Shute, V. J., Woltz, D. J., y Regian, J. W. (1989). An investigation of learner differences in an ITS environment: There's no such thing as a free lunch. En D. Bierman, J. Breuker y J. Sandberg (Eds.), *Artificial intelligence and education* (pp. 260-266). Amsterdam: IOS.

Squire, S., y Bryant, P. (2002). The influence of sharing on children's initial concept of division. *Journal of Experimental Child Psychology, 81*, 1-43.

Steffe, L. P., y Johnson, D. C. (1971). Problem solving performance of first-grade children. *Journal for Research in Mathematics Education, 2*, 50–64.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic Word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology*, *85*(1), 7-23.

Urretavizcaya, M. (2001). Sistemas inteligentes en el ámbito de la educación. *Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, *5(12*), 5-12.

Van der Schoot, M., Bakker, A. H., Horsley, T. M., y Van Lieshout, E. C. D. M. (2009). The consistency effect depends on markedness in less successful but not successful problem solvers: An eye fixation study in primary school children. *Contemporary Educational Psychology, 34*, 58–66.

VanLehn, K. (1987). *Towards a theory of impasse-driven learning* (Technical Report PGC-1. Contract No. N00014-86-K-0349). Arlington, VA: Office of Naval Research.

VanLehn, K. (2011). The relative effectiveness of human tutoring, intelligent tutoring systems, and other tutoring systems. *Educational Psychologist, 46*(4), 197-221. doi: 10.1080/00461520.2011.611369.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T.

Romberg (Eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp.39-59). Hillsdale. NJ: Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). London: Academy Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hielbert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México D.F, México: Trillas.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). Hove, England: Psychology Press.

Vergnaud, G. (2001). Problemas aditivos y multiplicativos. En Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (Ed.). *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 189-228). Madrid, España: Secretaría General Técnica.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Sweits and Zeitlinger.

Waalkens, M., Aleven, V., y Taatgen, N. (2013). Does supporting multiple student strategies lead to greater learning and motivation? Investigating a source of complexity in the architecture of intelligent tutoring systems. *Computers and Education, 60*(1), 159-171.

Walonoski, J. A., y Heffernan, N. T. (2006). Detection and analysis of off-task gaming behavior in intelligent tutoring systems. En M. Ikeda, K. Ashley y T. Chan (Eds.), *Proceedings of the 8th International Conference on Intelligent Tutoring Systems* (pp. 382–391). Heidelberg, Germany: Springer.

Xin, Y. P., y Zhang, D. (2009). Exploring conceptual model-based approach to teaching situated word problems. *The Journal of Educational Research, julio/ agosto, 102*(6), 427-441.